Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 7

Circuitos de segundo orden

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

Considerando el circuito de la Figura 1, encuentre la expresión de $V_o(t)$ en el tiempo.

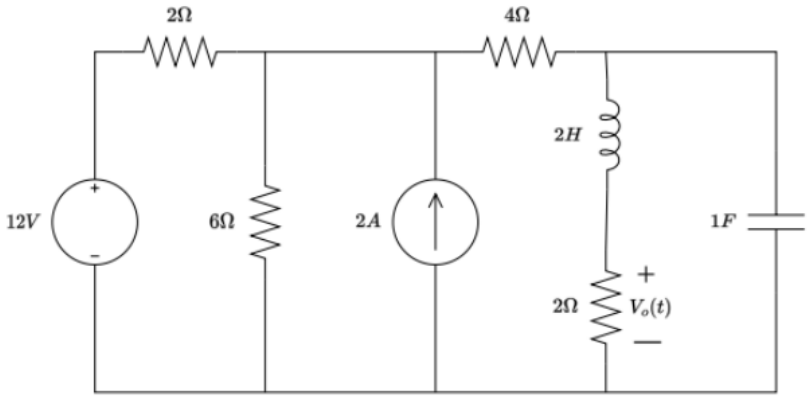


Figura 1: Circuito

Solución: En primer lugar, se observa que es posible reducir el circuito a partir de transformación de fuentes, de la siguiente manera:

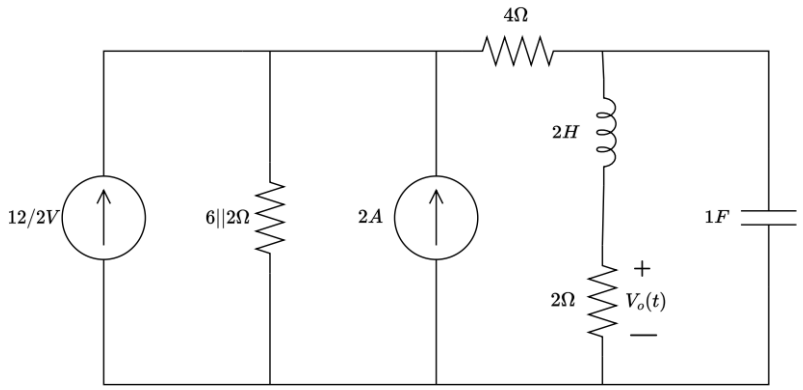


Figura 2: Circuito

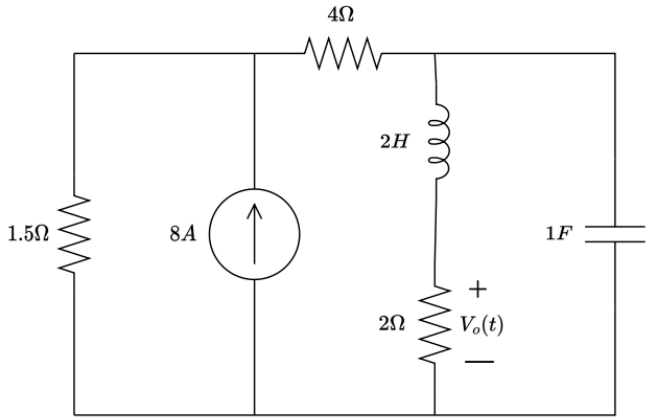


Figura 3: Circuito

Luego, se determinan las condiciones iniciales, donde, para $t < 0$, los inductores actúan como cortocircuitos y los capacitores como circuitos abiertos.

$$V_c(0^+) = V_c(0^-) = (8 \cdot 1{,}5) \cdot \frac{2}{2+4+1{,}5} = 3{,}2V$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-) = 8 \cdot \frac{1{,}5}{1{,}5+4+2} = 1{,}6A$$

Para V_o:

$$V_o(0^-) = V_c(0^-) = V_c(0^+) = 3{,}2V$$

$$V_o(0^+) = I_L(0^+) \cdot 2 = 3{,}2V$$

$$\frac{dV_o(0)}{dt} = 0$$

Luego, se analiza $t > 0$, donde se calcula V_o a partir del operador s utilizando el método de nodos. Recordar que, en el dominio de Laplace, un inductor tiene impedancia sL y un capacitor tiene impedancia $\frac{1}{sC}$.

$$\frac{0 - V_1}{1{,}5} + 8 = \frac{V_1 - V_2}{4}$$

$$\frac{V_1 - V_2}{4} = \frac{V_1 - V_o}{2s} + \frac{V_1 - 0}{\frac{1}{1s}}$$

$$\frac{V_1 - V_o}{2s} = \frac{V_o - 0}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene lo siguiente para V_o:

$$V_o = \frac{8}{s^2 + 1{,}66s + 1{,}16}$$

$$V_o \cdot (s^2 + 1{,}66s + 1{,}16) = 8$$

$$\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + 1{,}66 \cdot \frac{dV_o(t)}{dt} + 1{,}16 \cdot V_o(t) = 8$$

Donde:

$$1{,}66 = 2\zeta\omega_0$$

$$1{,}16 = \omega_0^2$$

De esta forma,

$$\omega_0 = 1{,}07$$

$$\zeta = 0{,}77$$

Por lo que, al ser $\zeta < 1$, la respuesta es subamortiguada, por lo que la solución homogénea de $V_o(t)$ tiene la siguiente forma:

$$V_o^h(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot (k_1 \cdot cos(w_d t) + k_2 \cdot sin(w_d t))$$

$$w_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Reemplazando:

$$V_o^h(t) = e^{-0{,}82t} \cdot (k_1 \cdot cos(0{,}68t) + k_2 \cdot sin(0{,}68t))$$

Luego, se debe obtener la solución particular. Reemplazando en la ecuación diferencial $V_o^p(t) = k_3$, siendo k_3 una constante.

$$0 + 0 + 1{,}16 \cdot k_3 = 8$$

$$k_3 = 6{,}89$$

De esta forma,

$$V_o(t) = e^{-0{,}82t} \cdot (k_1 \cdot cos(0{,}68t) + k_2 \cdot sin(0{,}68t)) + 6{,}89$$

Ahora, se debe determinar k_1 y k_2 a partir de las condiciones iniciales.

$$V_o(0) = 1 \cdot (k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0) + 6{,}89 = 3{,}2$$

$$k_1 = -3{,}69$$

$$\frac{dV_o(0)}{dt} = 3{,}02 + 0{,}68 \cdot k_2 = 0$$

$$k_2 = -4{,}44$$

**El desarrollo para encontrar k_2 se hizo en Mathematica:

```
In[6]:= D[E^(-0.82*t)*(-3.69*Cos[0.68*t] + k2*Sin[0.68*t]) + 6.89, t]
Out[6]= e^(-0.82 t) (0.68 k2 Cos[0.68 t] + 2.5092 Sin[0.68 t]) - 0.82 e^(-0.82 t) (-3.69 Cos[0.68 t] + k2 Sin[0.68 t])

In[7]:= F[t_] := e^(-0.82` t) (0.68` k2 Cos[0.68` t] + 2.5092000000000003` Sin[0.68` t]) -
          0.82` e^(-0.82` t) (-3.69` Cos[0.68` t] + k2 Sin[0.68` t])

In[8]:= F[0]
Out[8]= 3.0258 + 1. (0. + 0.68 k2)

In[9]:= Solve[3.0258` + 1.` (0.` + 0.68` k2) == 0, k2]
Out[9]= {{k2 → -4.44971}}
```

Finalmente,

$$V_o(t) = e^{-0{,}82t} \cdot (-3{,}69 \cdot cos(0{,}68t) - 4{,}44 \cdot sin(0{,}68t)) + 6{,}89$$

Criterios de corrección:

- **1 puntos** Plantea las condiciones iniciales.
- **2 puntos** Encuentra las ecuaciones del circuito con método de nodos (o mallas).
- **2 puntos** Resuelve el sistema de ecuaciones, obteniendo V_o (operador s), ω_0, y ζ.
- **1 punto** Se encuentra la expresión final de V_o.
- **Error de arrastre**: Descuento depende de la magnitud del error.

Problema 2

Para el circuito de la Figura 2, asuma que el switch S_1 llevaba mucho tiempo en su posición inicial, hasta que en $t = 0$ cambia de posición según como indica la flecha.

a) Encuentre la ecuación diferencial que describe el voltaje del capacitor a lo largo del tiempo sin ocupar la transformada de Laplace.

b) Determine el voltaje del capacitor a través del tiempo.

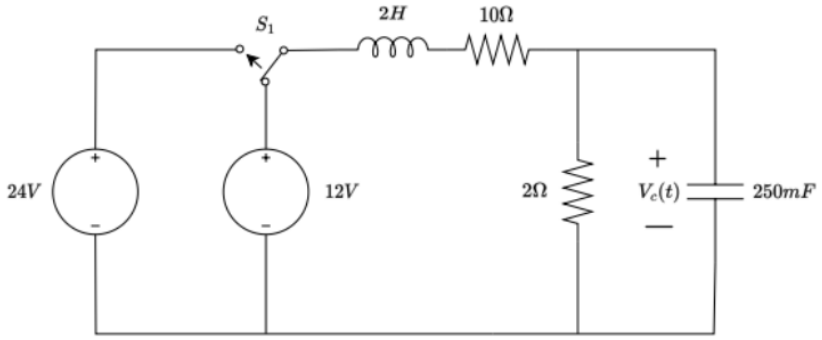


Figura 4: Circuito

Solución:

a) Para $t > 0$, se obtiene la ecuación diferencial que caracteriza el voltaje del capacitor.

Ley de mallas:

$$-24 + 2 \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + 10 \cdot i_L(t) + 2 \cdot (i_L(t) - i_c(t)) = 0$$

Ley de nodos:

$$i_L(t) = \frac{v_c(t)}{2} + i_c(t)$$

Considerando que $i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}$, y reemplazando la ecuación obtenida por la ley de nodos en la ecuación de mallas, se tiene:

$$-24 + 2 \cdot (\frac{1}{2}\frac{dv_c(t)}{dt} + 250m \cdot \frac{d^2v_c(t)}{dt^2}) + 10 \cdot (\frac{v_c(t)}{2} + 250m \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}) + 2 \cdot \frac{v_c(t)}{2} = 0$$

$$0{,}5 \cdot \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 3{,}5 \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + 6 \cdot v_c(t) = 24$$

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 7 \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + 12 \cdot v_c(t) = 48$$

b) En primer lugar se obtienen las condiciones iniciales, considerando que el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor como un circuito abierto.

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 12 \cdot \frac{2}{2+10} = 2V$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{12}{10+2} = 1A$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{i_L(0^+) - v_c(0^+)/2}{C} = 0$$

Luego, a partir de la ecuación diferencial:

$$7 = 2\zeta\omega_0$$
$$12 = \omega_0^2$$

De esta forma,

$$\omega_0 = 3{,}46$$
$$\zeta = 1{,}01$$

Por lo que, al ser $\zeta > 1$, la respuesta es sobreamortiguada (también se pueden calcular las raíces del polinomio característico y se llega a que son reales y distintas), por lo que la solución homogénea de $V_c(t)$ tiene la siguiente forma:

$$v_c^h(t) = k_1 \cdot e^{(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})\cdot t} + k_2 \cdot e^{(-\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})\cdot t}$$

$$v_c^h(t) = k_1 \cdot e^{(-3{,}49+0{,}49)\cdot t} + k_2 \cdot e^{(-3{,}49-0{,}49)\cdot t}$$
$$v_c^h(t) = k_1 \cdot e^{-3\cdot t} + k_2 \cdot e^{-3{,}98\cdot t}$$

Luego, se debe obtener la solución particular. Reemplazando en la ecuación diferencial $V_c^p(t) = k_3$, siendo k_3 una constante.

$$0 + 0 + 12 \cdot k_3 = 48$$

$$k_3 = 4$$

De esta forma,

$$v_c(t) = k_1 \cdot e^{-3\cdot t} + k_2 \cdot e^{-3{,}98\cdot t} + 4$$

Ahora, se debe determinar k_1 y k_2 a partir de las condiciones iniciales.

$$v_c(0) = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 + 4 = 2$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = k_1 \cdot -3 \cdot e^{-3\cdot 0} + k_2 \cdot -3{,}98 \cdot e^{-3{,}98\cdot 0} = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$k_1 = -8$$
$$k_2 = 6$$

Por lo que finalmente se obtiene:

$$v_c(t) = -8 \cdot e^{-3\cdot t} + 6 \cdot e^{-3{,}98\cdot t} + 4$$

Criterios de corrección:

- **2 puntos** Plantea de forma correcta la edo. (1 punto si esta medianamente bien).

- **1 punto** Encuentra raíces del polinomio característico o ω_0 y ζ.
- **1 punto** Condición inicial.
- **2 puntos** Respuesta correcta.
- **Error de arrastre**: Descuento depende de la magnitud del error.

Problema 3

Para el circuito de la Figura 3, asuma que los switch S_1 y S_2 llevaban mucho tiempo en sus posiciones iniciales hasta que en $t = 0$ S_1 se abre y S_2 se cierra (es decir, en $t < 0$ S_1 estaba cerrado y S_2 estaba abierto).

a) Calcule las condiciones iniciales del capacitor.

b) Encuentre la ecuación diferencial que describe el voltaje del capacitor a lo largo del tiempo $t > 0$ sin ocupar la transformada de Laplace.

c) Indique los valores de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento, indicando qué tipo de amortiguamiento es.

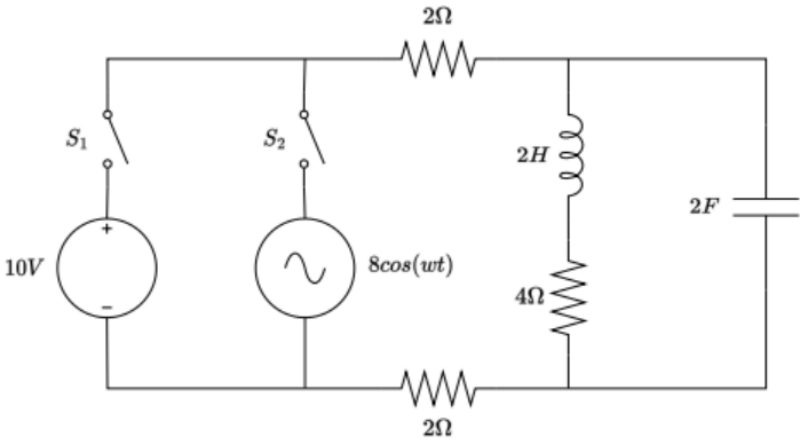


Figura 5: Circuito

Solución:

a) Para obtener las condiciones iniciales se sabe que el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor como un circuito abierto.

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 10 \cdot \frac{4}{2+4+2} = 5V$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{10}{2+4+2} = 1{,}25A$$

b) Se definen las ecuaciones de las mallas del circuito, considerando i_1 la corriente de la primera malla e i_c la corriente de la segunda malla, ambas en sentido horario.

Malla 1:

$$-8cos(wt) + 4 \cdot i_1 + v_c = 0$$

Relación de corrientes:

$$i_1 - i_L = i_c$$

Malla 2:

$$4 \cdot (i_c - i_1) - v_L + v_c = 0$$

Ecuaciones inductor-capacitor:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se reemplaza la ecuación de relación de corrientes y las ecuaciones de inductor-capacitor, considerando que se quiere obtener un sistema de ecuaciones respecto al voltaje del capacitor.

$$-8cos(wt) + 4 \cdot (C\frac{dv_c}{dt} + i_L) + v_c = 0$$

$$4 \cdot (-i_L) - L\frac{di_L}{dt} + v_c = 0 \qquad (*)$$

A partir de la primera ecuación anterior se despeja i_L:

$$i_L = 2cos(wt) - \frac{1}{4}v_c - C\frac{dv_c}{dt}$$

Lo anterior se reemplaza en la ecuación (*) y se reduce:

$$-4 \cdot (2cos(wt) - \frac{1}{4}v_c - C\frac{dv_c}{dt}) - L \cdot (-2wsin(wt) - \frac{1}{4}\frac{dv_c}{dt} - C\frac{d^2v_c}{dt^2}) + v_c = 0$$

$$-8cos(wt) + v_c + 4C\frac{dv_c}{dt} + 2Lwsin(wt) + \frac{L}{4}\frac{dv_c}{dt} + LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + v_c = 0$$

$$-8cos(wt) + v_c + 8\frac{dv_c}{dt} + 4wsin(wt) + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + 4\frac{d^2v_c}{dt^2} + v_c = 0$$

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + 2{,}125\frac{dv_c}{dt} + 0{,}5v_c = 2cos(wt) - wsin(wt)$$

c) Luego, a partir de la ecuación diferencial:

$$2{,}125 = 2\zeta\omega_0$$

$$0{,}5 = \omega_0^2$$

De esta forma,

$$\omega_0 = 0{,}707$$

$$\zeta = 1{,}502$$

Por lo que, al ser $\zeta > 1$, la respuesta es sobreamortiguada.

- **1 punto** Cada condición inicial. (2 en total).
- **2 puntos** Encuentra la edo correcta. Se descuenta uno si sólo se equivoca en escalares.
- **1 punto** Por ω_0.
- **1 punto** Si encuentra z correcto o menciona que es sobreamortiguado.
- **Error de arrastre**: Descuento depende de la magnitud del error.

Problema 4

En el circuito de la Figura 4, la fuente de voltaje es una sinusoide (función seno) de amplitud $1V$, mientras que la fuente de corriente es una sinusoide (función seno) de amplitud $2A$. Ambas fuentes están en fase y operan a una frecuencia de $100Hz$. Considerando que las condiciones iniciales del inductor y capacitor son nulas:

a) Encuentre la ecuación diferencial que describe el voltaje del capacitor $V_c(t)$ a lo largo del tiempo $t > 0$.

b) Obtenga la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguación asociados.

c) Suponiendo $R1 = 2\Omega$, $L = 2mH$ y $C = 5mF$, encuentre las raíces del polinomio característico del sistema y determine el tipo de respuesta (sobreamortiguada, críticamente amortiguada o subamortiguada).

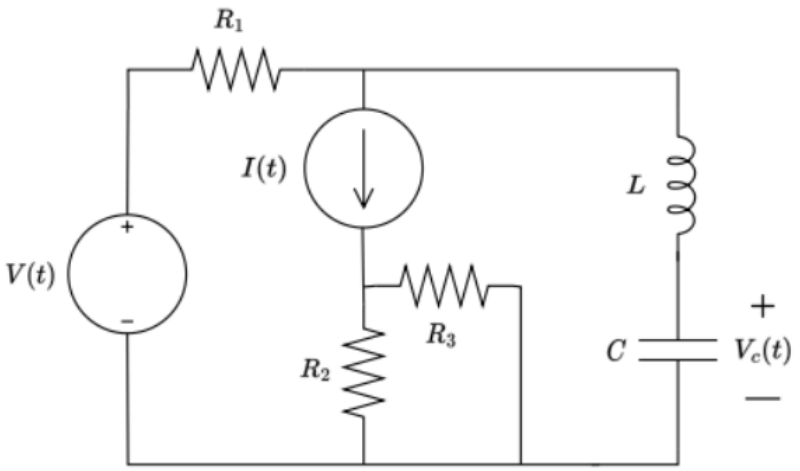


Figura 6: Circuito

Solución:

a) Para obtener la ecuación diferencial se utiliza el método de mallas en el dominio de Laplace, definiendo las corrientes i_1 e i_2, respectivamente, en sentido horario, y considerando que $V_c = i_2 \cdot \frac{1}{Cs}$.

Supermalla 1-2:

$$-V(t) + R_1 \cdot i_1 + Ls \cdot i_2 + \frac{1}{Cs} \cdot i_2 = 0$$
$$i_1 - i_2 = I(t)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$i_2 = \frac{C \cdot s \cdot (-I(t) \cdot R_1 + V(t))}{s^2 \cdot C \cdot L + s \cdot C \cdot R_1 + 1}$$

Luego, $V_c(t)$ es:

$$V_c(t) = \frac{-I(t) \cdot R_1 + V(t)}{1 + s \cdot C \cdot R_1 + s^2 \cdot C \cdot L}$$

Luego,

$$V_c(t) \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_1 + s^2 \cdot C \cdot L) = -I(t) \cdot R_1 + V(t)$$

Y la EDO es:

$$\frac{1}{CL} \cdot V_c(t) + \frac{dV_c(t)}{dt}\frac{R_1}{L} + \frac{d^2V_c(t)}{dt^2} = \frac{-I(t) \cdot R_1 + V(t)}{C \cdot L}$$

b) A partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{R_1}{L} = 2\zeta\omega_0$$

$$\frac{1}{CL} = \omega_0^2$$

De esta forma,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}} = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\zeta = \frac{R_1}{2L} / \frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R_1\sqrt{CL}}{2L}$$

c) Se tiene el siguiente polinomio característico:

$$\frac{1}{CL} + \frac{R_1}{L}r + r^2 = 0$$

Resolviendo:

$$r_1 = -887{,}298$$

$$r_2 = -112{,}702$$

Las raíces son reales y distintas, por lo que la respuesta es sobreamortiguada.

Criterios de corrección:

- **1 punto** Plantea las ecuaciones del circuito con algún método.
- **1 punto** Encuentra la ecuación diferencial para $V_c(t)$
- **2 puntos** Obtiene la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguación.
- **1 punto** Plantea el polinomio característico.
- **1 punto** Encuentra las raíces del polinomio y determina que la respuesta es sobreamortiguada.
- **Error de arrastre**: Descuento depende de la magnitud del error.