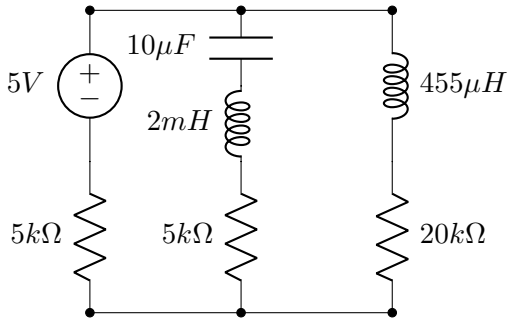
IEE2123 Circuitos Eléctricos
Profesor: David Watts

Tarea 9

Circuitos de Segundo Orden

Problema 1

Asuma que el siguiente circuito se encuentra en un punto de operación estable en $t = 0$. Si en $t = 0^+$ se remueve el inductor de $455\mu H$ del circuito, determine:



- La corriente que pasa por el inductor de $455mH$ en $t = 0$ (antes de ser removido).
- La ecuación diferencial para la corriente que circula por el capacitor para $t \in]0, \infty]$
- Resuelva la ecuación diferencial para la corriente que circula por el inductor de $2mH$ para $t \in]0, \infty]$
- Finalmente, utilizando la ecuación del capacitor $Q_C = CV_C$ compruebe su resultado integrando la expresión de la corriente que circula por el capacitor I_C obtenida anteriormente. **Hint:** La integral de la corriente es la carga acomulada $\int_0^\infty I_C = \Delta_0^\infty Q_C$

Solución:

- Dado que no circula corriente por el el capacitor y que el inductor se puede considerar como un corto-circuito la corriente que circula por el circuito es $\boxed{0.2\text{mA}(2p)}$.
- Haciendo mallas se puede ver fácilmente que:

$$5V = V_C + V_L + 2I_C R$$

Reemplazando V_L:

$$5V = V_C + L\frac{dI_C}{dt} + 2I_C R$$

Derivando la expresión anterior:

$$0 = \frac{dV_C}{dt} + L\frac{d^2 I_C}{dt^2} + 2R\frac{dI_C}{dt}$$

Reemplazando $\frac{dV_C}{dt}$:

$$0 = \frac{I_C}{C} + L\frac{d^2 I_C}{dt^2} + 2R\frac{dI_C}{dt}$$

Reemplazando por los valores correspondientes:

$\boxed{0 = \frac{I_C}{10\mu F} + 2mH\frac{d^2 I_C}{dt^2} + 10k\Omega\frac{dI_C}{dt} \text{ (6p)}}$

- Sea I_C de la forma $e^{r\cdot t}$:

$$e^{r\cdot t}(\frac{1}{10\mu F} + 2mHr^2 + 10k\Omega r) = 0$$

Con esto tenemos:

$$I_C = c_1 e^{-5M\cdot t} + c_2 e^{-10\cdot t}$$

Sabemos que:

$$I_C(0^+) = c_1 + c_2 = 0$$

Además:

$$\frac{dI_C(0^+)}{dt} = \frac{V_L(0^+)}{2mH} = \frac{1V}{2mH} = -5M\cdot c_1 - 10\cdot c_2$$

Resolviendo:

$\boxed{I_C = -10^{-4}e^{-5M\cdot t} + 10^{-4}e^{-10\cdot t} \text{ (4p)}}$

- Desde $t = 0^+$ al ∞ el capacitor debe cargarse $1V$ más para llegar a un equilibrio. Luego:

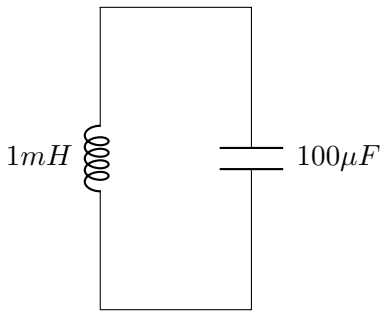
$$\int_{0^+}^{\infty} I_C dt = 10^{-5}C$$

Entonces se comprueba que:

$\boxed{Q = 10^{-5}C = 10^{-5}C = 10\mu F\cdot 1V = CV \text{ (3p)}}$

Problema 2

En el instante $t = 0$ el voltaje del riel superior es de $10V$ con respecto al del riel inferior en el circuito de la figura y la corriente que circula por el capacitor es 0. Determine:



- La ecuación diferencial para el voltaje del riel superior con respecto al riel inferior.
- Resuelva la ecuación diferencial
- Grafique su resultado con $t \in [0, 1ms]$ usando algún programa como MATLAB, OCTAVE, MATHEMATICA, etc.
- Comente si este comportamiento es posible en la realidad.

Solución:

- $\boxed{V = -LC\frac{d^2V}{dt^2} = -1n\frac{d^2V}{dt^2}\ \text{(3p)}}$
- Sea $v(t)$ de la forma e^{rt}:

$$r^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

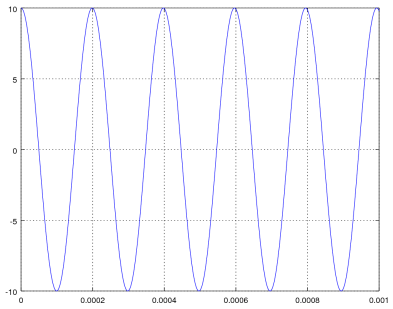
Las raices de r son $0 \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}$, por lo tanto la solución es:

$$v(t) = c_1 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + c_2 \sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Luego como $v(0) = 10V$ y $i(t) = 0$:

$\boxed{v(t) = 10V\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} = 10V\cos t \cdot 3{,}16 \cdot 10^{-}5\ \text{(3p)}}$

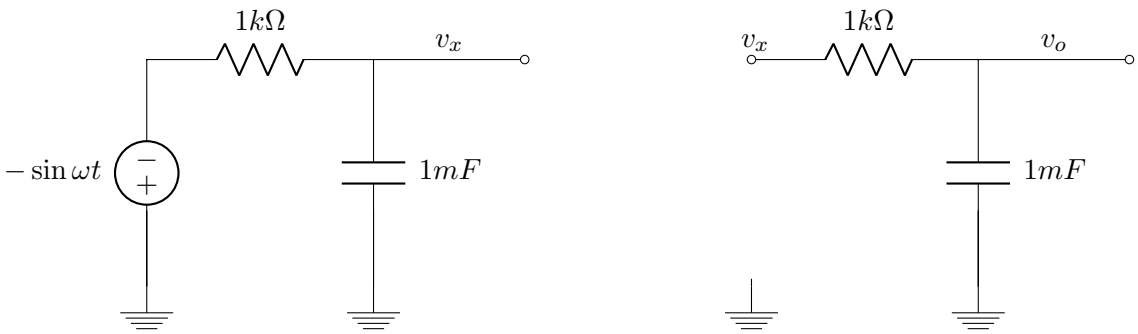
- Usando Octave $\boxed{(3p)}$:



- Este comportamiento solo podría ser posible si no existiera resistencia en el circuito. Algo altamente improbable en un circuito "común y corriente". $\boxed{(3p)}$

Problema 3

El siguiente circuito se conoce como pasabajos de segundo orden:



- Obtenga la ecuación diferencial para v_x en función de la fuente de potencia y obtenga la ecuación diferencial para v_o en función de v_x. Luego combine ambas ecuaciones de primer orden para obtener v_o en función del voltaje de la fuente de potencia. (no resuelva la ecuación diferencial)
- Grafique la solución a la ecuación diferencial de segundo orden usando un programa de computación cientifica con $\omega = 50 \cdot 2\pi$ (0,1 segundos) y para $\omega = 5 \cdot 2\pi$ (1 segundo) asumiendo que el circuito se encuentra un un régimen permanente (t muy grande). Calcule el los decibeles de los máximos de v_o para ambos casos, es decir $20 \log \frac{max(v_{o_{50}}(t))}{max(v_{o_5}(t))}$.
- Explique cual es la principal diferencia entre un filtro de primer orden versus uno de segundo orden.

Solución:

- Las ecuaciones de primer orden son:

$$V_x' + V_x = \sin\omega t$$
$$V_o' + V_o = V_x$$

  Combinando ambas expresiones obtenemos:

  $\boxed{V_o'' + 2V_o' + V_o = \sin\omega t \text{ (5p)}}$

- Resolviendo la ecuación diferncial de primer orden para v_x obtenemos (con t muy grande):

$$v_x = \frac{1}{1+\omega^2}\sin\omega t - \frac{\omega}{1+\omega^2}\cos\omega t$$

  Luego usamos Octave para resolver la siguiente ecuación diferencial y obtenemos $\boxed{(5p)}$:

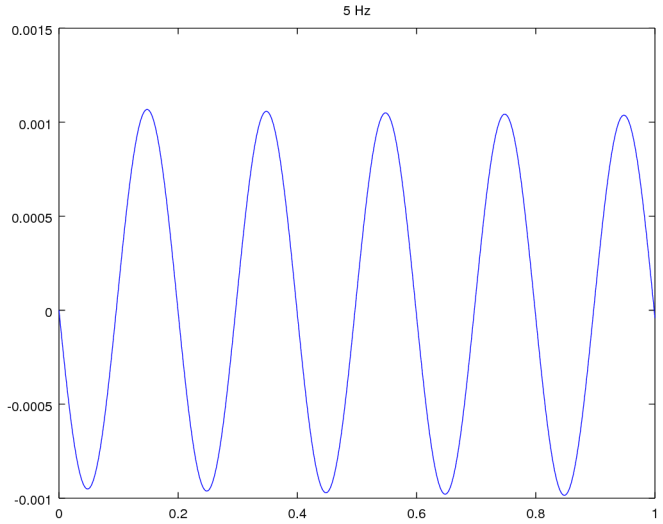


Figura 1: 5 Hz

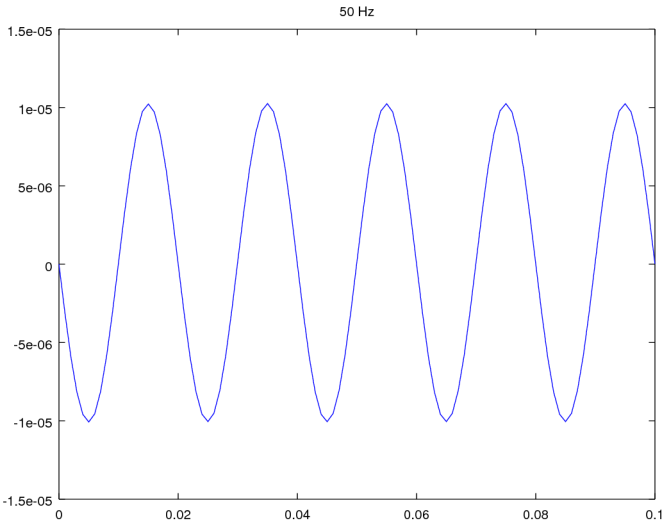


Figura 2: 50 Hz

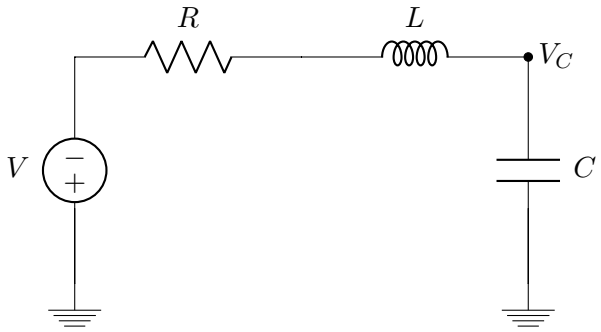
Además tenemos que:

$$\boxed{20\log\frac{max(v_{o_{50}}(t))}{max(v_{o_5}(t))} = 20\log\frac{1{,}025e{-}5}{1{,}06e{-}3} = -40{,}351dB \text{ (bonus 1p)}}$$

- La principal diferencia es que un filtro de primer orden tiene una sola frecuencia de corte, mientras que el filtro de segundo orden tiene dos. En el caso de un filtro pasabajos de segundo orden el decaimiento de amplitud por cada década es de $40dB$ después de alcanzar ambos polos, mientras que uno de segundo orden es de $20dB$ por década después de la frecuencia de corte. $\boxed{\text{(bonus } 1p)}$

Problema 4

Sea $R = 1\Omega$, $L = 100mH$ y $C = 1mF$ y con condiciones iniciales $V_C(0) = 0$, $I_L(0) = 0$. Si la fuente de poder tiene la siguiente función de voltaje $V(0) = 0$ y $V(t > 0) = -10V$:



- Encuentre $v_c(t)$
- Usando software de computación matemática grafique $v_c(t)$ con $t \in [0, 1s]$.

Solución:

- La ecuacion diferencial es:

$$10 = 1mv_c' + 100\mu v_c'' + v_c$$

Luego las raices son:

$$5 \pm 5i\sqrt{399} = 5 \pm 99{,}85$$

Por lo cual la solución homogénea es de la forma:

$$v_c = c_1 e^{-5t} \sin 99{,}85t + c_2 e^{-5t} \cos 99{,}85t$$

La solución particular por el otro lado:

$$v_c = 10$$

Ahora con las condiciones iniciales nos queda que:

$$\boxed{v_c = 0{,}1e^{-5t} \sin 99{,}85t - 10e^{-5t} \cos 99{,}85t + 10 \text{ (5p)}}$$

- Usando Octave $\boxed{(5p)}$:

