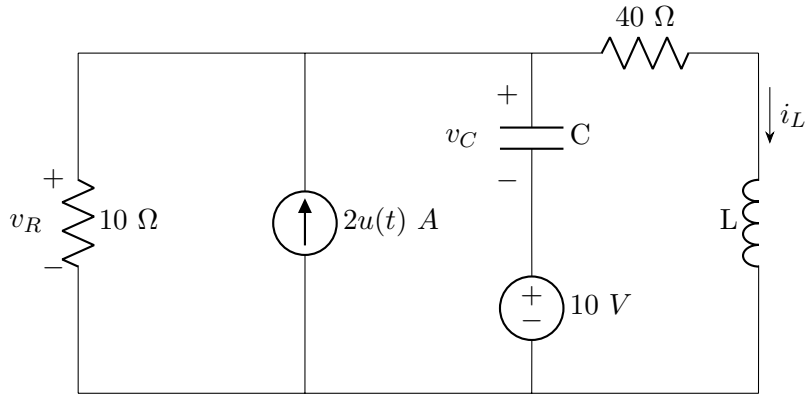
Prueba 2 SOLUCIÓN

- Escriba la respuesta a cada problema en la hoja que corresponda. No olvide colocar su número de lista y nombre.
- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.

---

1. [15 ptos] En el circuito de la figura, la fuente de corriente se enciende en $t = 0$, momento en que cambia de 0 a 2 A.



   (a) [6 ptos] Encuentre la ecuación diferencial que describe $i_L(t)$ para $t > 0$.

   (b) Si $L = 1/8$ H y $C = 1/4$ F,

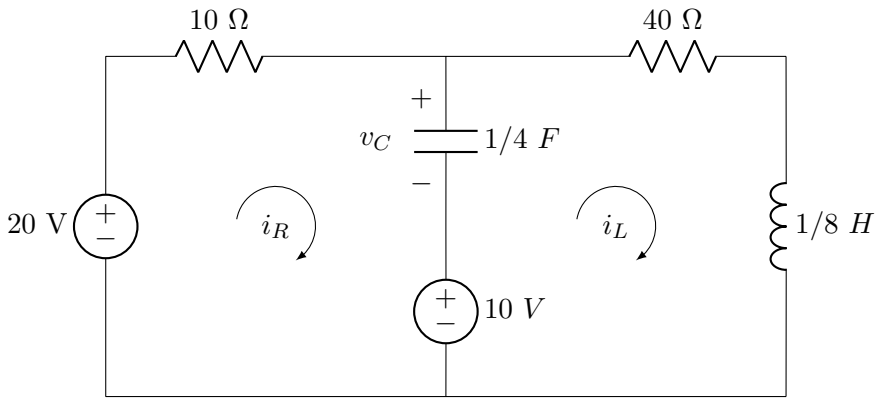
      i. [3 ptos] Encuentre $i_L(0+)$, $v_C(0+)$ y $v_R(0+)$

      ii. [3 ptos] Encuentre $\frac{d}{dt}i_L(0+)$, $\frac{d}{dt}v_C(0+)$ y $\frac{d}{dt}v_R(0+)$

      iii. [3 ptos] Encuentre $i_L(\infty)$, $v_C(\infty)$ y $v_R(\infty)$

Solución:

(a) Resolveremos usando el método de corrientes de malla y usando el equivalente Thevenin para la fuente de corriente



$$\begin{aligned} 10 - 10i_R - v_C &= 0 \\ 10 + v_C - 40i_L - Li'_L &= 0 \end{aligned}$$

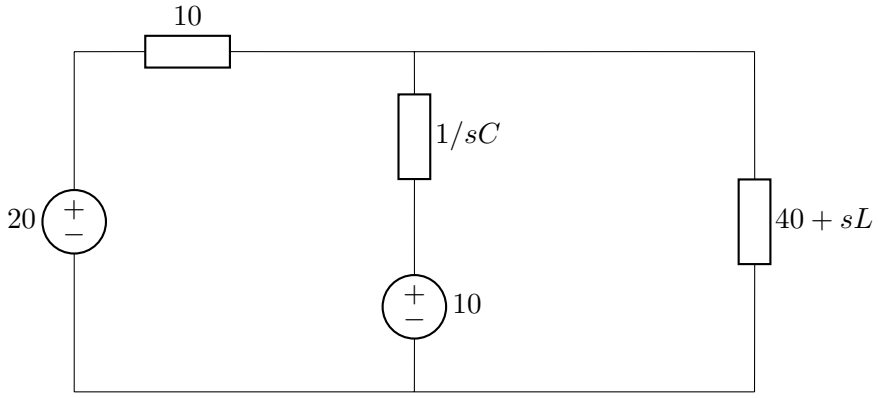
Pero $i_R - i_L = Cv'_C$,

$$\begin{aligned} 10 - 10(Cv'_C + i_L) - v_C &= 0 \\ 10 + v_C - 40i_L - Li'_L &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_C &= 40i_L + Li'_L - 10 \\ v'_C &= 40i'_L + Li''_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 - 10(Cv'_C + i_L) - v_C &= 0 \\ 10 - 400Ci'_L - 10CLi''_L - 10i_L - 40i_L - Li'_L + 10 &= 0 \\ i''_L + \left(\frac{40}{L} + \frac{1}{10C}\right) i'_L + \frac{5}{LC} i_L &= \frac{2}{LC} \end{aligned}$$

Resolviendo en el dominio de Laplace y por el método de nodos

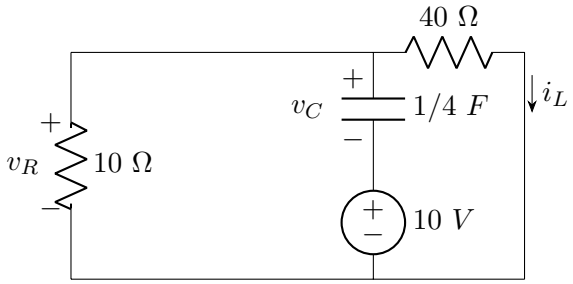


$$\begin{aligned}
\frac{V-20}{10} + (V-10)sC + I &= 0 \\
V/10 - 2 + sCV - 10sC + I &= 0 \\
(1/10 + sC)V - 2 + I &= 0 \\
(1/10 + sC)(40 + sL)I - 2 + I &= 0 \\
(4 + 40Cs + sL/10 + s^2LC + 1)I &= 2 \\
(s^2 + \left(\frac{40}{L} + \frac{1}{10C}\right)s + \frac{5}{LC})I &= \frac{2}{LC}
\end{aligned}$$

Que en el dominio del tiempo es

$$i'' + \left(\frac{40}{L} + \frac{1}{10C}\right)i' + \frac{5}{LC}i = \frac{2}{LC}$$

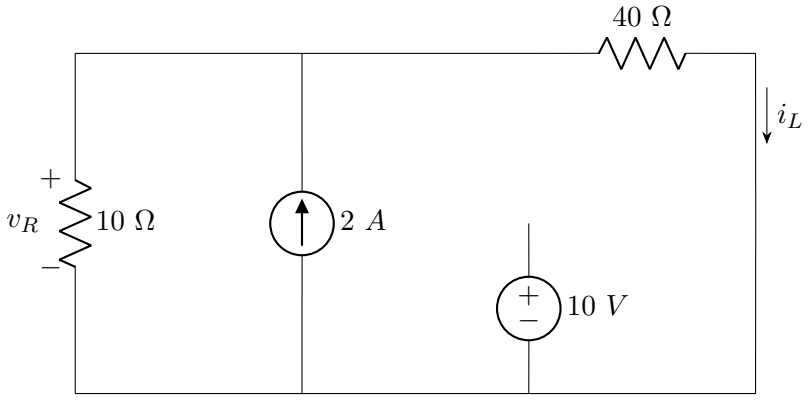
(b) i. En $t < 0$ se tiene



De donde $v_C(0-) = -10$ V, $i_L(0-) = 0$ y $v_R(0-) = 0$, mismos valores para $t = 0+$.

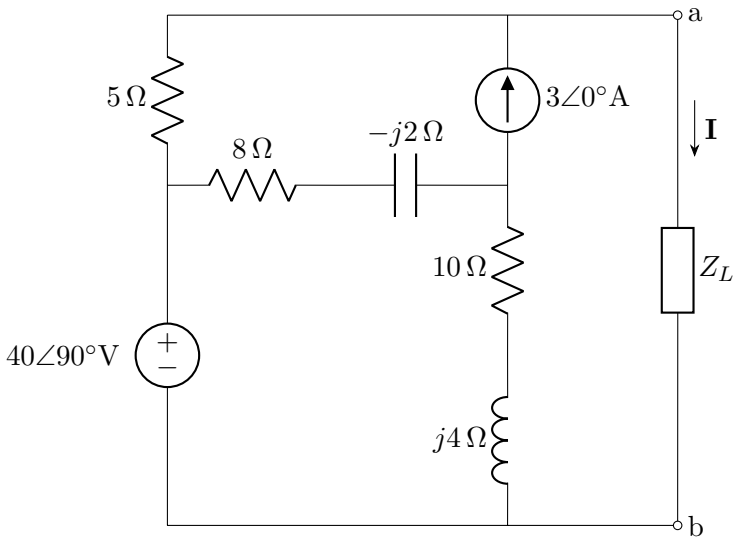
ii. Como $v_L(0+) = L\frac{d}{dt}i_L(0+)$ y $v_L(0+) = 0$, se tiene $\frac{d}{dt}i_L(0+) = 0$ A/s
Como $i_C(0+) = C\frac{d}{dt}v_C(0+)$ e $i_C(0+) = 2$ (porque toda la corriente de la fuente se va hacia el capacitor ya que el voltaje de esa rama es cero al principio), se tiene $\frac{d}{dt}v_C(0+) = 8$ V/s
Finalmente, como $v_R(0+) = 10 + v_C(0+)$, su derivada será $\frac{d}{dt}v_R(0+) = \frac{d}{dt}v_C(0+) = 8$ V/s.

iii. En $t = \infty$ se tiene

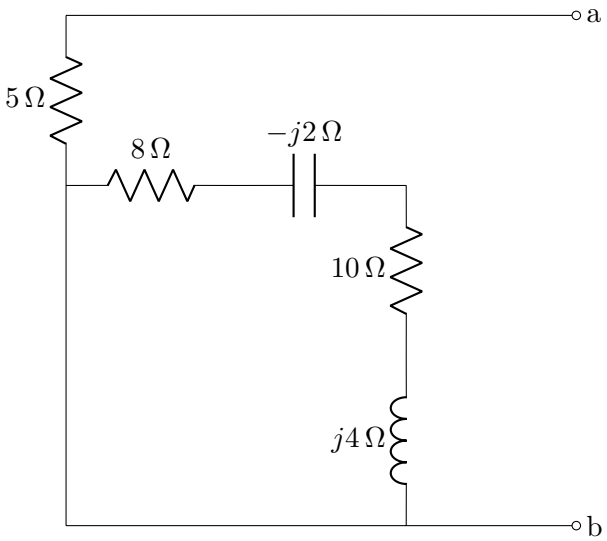


De donde $i_L(\infty) = \frac{10}{10+40}2 = 2/5\ A = 400\ mA$, $i_R(\infty) = 1600\ mA$ y $v_R(\infty) = 16$ V y $v_C(\infty) = v_R(\infty) - 10 = 6$ V.

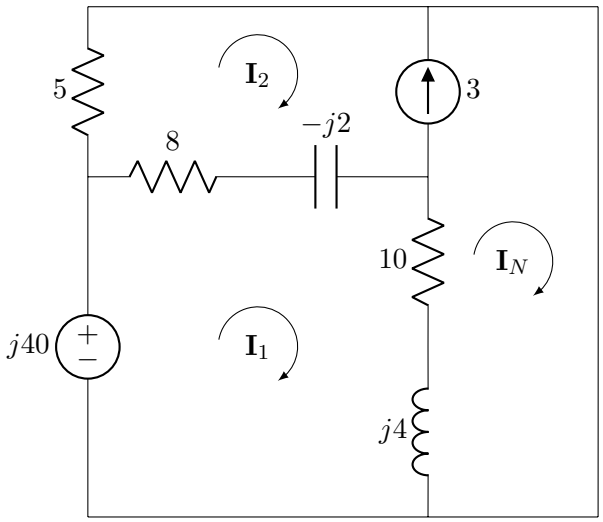
2. [15 ptos] Encuentre la corriente **I** usando el teorema de Norton entre los terminales a y b



Solución: La impedancia de Norton se obtiene haciendo las fuentes cero:



Ignorando las impedancias que están en corto circuito, la impedancia de Norton es $\mathbf{Z}_N = 5\,\Omega$. La corriente de Norton es la corriente entre a y b cuando está cerrado el circuito, es decir,



Resolviendo por mallas. KVL en la super-malla (2-N) es

$$-5\mathbf{I}_2 - (10+j4)(\mathbf{I}_N - \mathbf{I}_1) - (8-j2)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

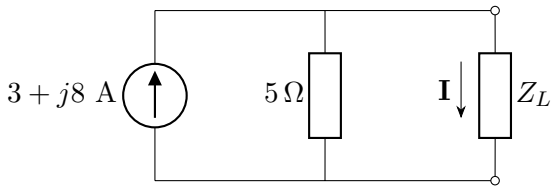
$$(-13+j2)\mathbf{I}_2 - (10+j4)\mathbf{I}_N + (18+j2)\mathbf{I}_1 = 0 \tag{1}$$

KVL en la malla 1 es

$$j40 - (8-j2)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) - (10+j4)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_N) = 0$$

$$j40 - (18+j2)\mathbf{I}_1 + (8-j2)\mathbf{I}_2 + (10+j4)\mathbf{I}_N = 0 \tag{2}$$

(1)+(2) da $\mathbf{I}_2 = j8$, pero $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_N - 3$ de donde $\mathbf{I}_N = 3 + j8$. El equivalente de Norton es



Por divisor de corriente

$$\mathbf{I} = \frac{15+j40}{Z_L + 5}$$

3. [15 ptos] Se tiene una carga que absorbe 4 kW con un factor de potencia 0.8 en retraso. Encuentre el valor de la capacitancia en paralelo necesaria para elevar el factor de potencia a 0.95.

   (a) Suponga que la carga está conectada a la red en Chile, de 220 V (rms) y 50 Hz.

   (b) Repita el mismo problema, ahora suponiendo que la carga está conectada a la red en Estados Unidos, de 120 V (rms) y 60 Hz.

Solución: La potencia aparente es

$$|S| = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{4000}{0.8} = 5000 \text{ VA}$$

La potencia reactiva es

$$Q = |S| \operatorname{sen} \theta$$

Se tiene $\cos\theta = 0.8 \implies \theta = 36.87^\circ$ por lo que

$$Q = |S| \operatorname{sen} \theta = 5000 \operatorname{sen} 36.87^\circ = 3000 \text{ VAr}$$

Para un factor de potencia de 0.95 necesitamos

$$\cos\theta' = 0.95 \implies \theta' = 18.19^\circ$$

El nuevo valor para la potencia aparente es

$$|S'| = \frac{P}{\cos\theta'} = \frac{4000}{0.95} = 4210.5 \text{ VA}$$

Y la nueva potencia reactiva es

$$Q' = |S'| \operatorname{sen} \theta' = 4210.5 \operatorname{sen} 18.19^\circ = 1314.4 \text{ VAr}$$

De donde la potencia reactiva provista por la capacitancia debe ser

$$Q_C = Q - Q' = 3000 - 1314.4 = 1685.6 \text{ VAr}$$

La potencia en un capacitor es

$$Q_C = \omega C V_{rms}^2$$

de donde

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{rms}^2}$$

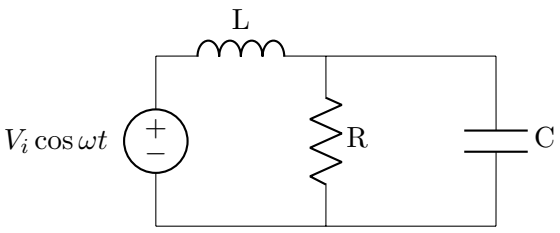
(a) Si $V_{rms} = 220$ y $\omega = 2\pi \times 50$, tenemos

$$C = \frac{1685.6}{2\pi \times 50 \times 220^2} = 110.9 \ \mu\text{F}$$

(b) Si $V_{rms} = 120$ y $\omega = 2\pi \times 60$, tenemos

$$C = \frac{1685.6}{2\pi \times 60 \times 120^2} = 310.5 \ \mu\text{F}$$

4. [15 ptos]



Para el circuito de la figura,

(a) [4 ptos] Encuentre la potencia disipada (en la resistencia) en función de la frecuencia ω.

(b) [5 ptos] Encuentre la frecuencia ω_1 para la cual el circuito disipa el máximo de potencia.

(c) [2 ptos] Si $V_i = 1$ V, $L = 50$ mH, $C = 0.5$ mF y $R = 20\ \Omega$, evalúe ω_1 y encuentre la potencia disipada a esa frecuencia.

(d) [4 ptos] Usando los mismos valores de (c), encuentre ω_2 tal que el circuito disipe la mitad de la potencia máxima.

Solución:

(a) Sea V_o el voltaje en la resistencia. La potencia disipada será

$$P(\omega) = \frac{|V_o|^2}{2R}$$

Nótese el factor 2, dado que V_o es el valor peak.
Encontramos V_o por división de voltaje:

$$V_o = \frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{j\omega L + \frac{R}{1+j\omega RC}} V_i = \frac{R}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} V_i$$

Es decir

$$P(\omega) = \frac{R/2}{(R-\omega^2 RLC)^2 + \omega^2 L^2} V_i^2$$

(b) La potencia máxima se obtendrá cuando el denominador sea mínimo:

$$\omega_1 = \text{argmin}_\omega A = (R - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 L^2$$

$$\begin{aligned}
A' = 0 &= 2(R-\omega^2 RLC)(-2\omega RLC) + 2\omega L^2 \\
0 &= (R-\omega^2 RLC)(-2RC) + L \\
2R^2C - L &= 2\omega^2 R^2 C^2 L \\
2\omega^2 R^2 C^2 L &= 2R^2 C - L \\
\omega^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2} \\
\omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}}
\end{aligned}$$

(c) Reemplazando $L = 50$ mH, $C = 0.5$ mF y $R = 20\ \Omega$ en la expresión para ω_1 se tiene

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{50\times10^{-3}\times0.5\times10^{-3}} - \frac{1}{2\times400\times0.25\times10^{-6}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{25\times10^{-6}} - \frac{1}{200\times10^{-6}}} \\
&= \sqrt{40000-5000} = \sqrt{35000} \\
&= 187.08 \text{ rad/s}
\end{aligned}$$

La potencia disipada es

$$P(\omega_1) = \frac{R/2}{(R-\omega_1^2RLC)^2+\omega_1^2L^2}V_i^2$$

$$\begin{aligned}
P(187.08) &= \frac{10}{(20-187.08^2\times20\times50\times10^{-3}\times0.5\times10^{-3})^2+187.08^2\times2500\times10^{-6}} \\
&= 0.1067 \text{ W}
\end{aligned}$$

(d)

$$P(\omega_2) = 0.1067/2 = 0.533$$

$$\begin{aligned}
\frac{R/2}{(R-\omega_2^2RLC)^2+\omega_2^2L^2}V_i^2 &= 0.533 \\
\frac{10}{(20-\omega_2^2\times20\times50\times10^{-3}\times0.5\times10^{-3})^2+\omega_2^2\times2500\times10^{-6}} &= 0.533 \\
(20-500\times10^{-6}\omega_2^2)^2+2500\times10^{-6}\omega_2^2 &= 187.5 \\
400-40\times500\times10^{-6}\omega^2+250000\times10^{-12}\omega^4+2500\times10^{-6}\omega^2 &= 187.5 \\
400-17.5\times10^{-3}\omega^2+250\times10^{-9}\omega^4 &= 187.5 \\
0.250\times10^{-6}\omega^4-17.5\times10^{-3}\omega^2+212.5 = 0
\end{aligned}$$

De donde $\omega^2 = 1.564\times10^4$ u $\omega^2 = 5.437\times10^4$, es decir

$$\omega_2 = 125.04 \ \text{ o } \ 233.163 \ \text{ rad/s}$$