

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Capacitores e Inductores

Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Ángel Abusleme, Enrique Álvarez, Daniel Olivares

Introducción

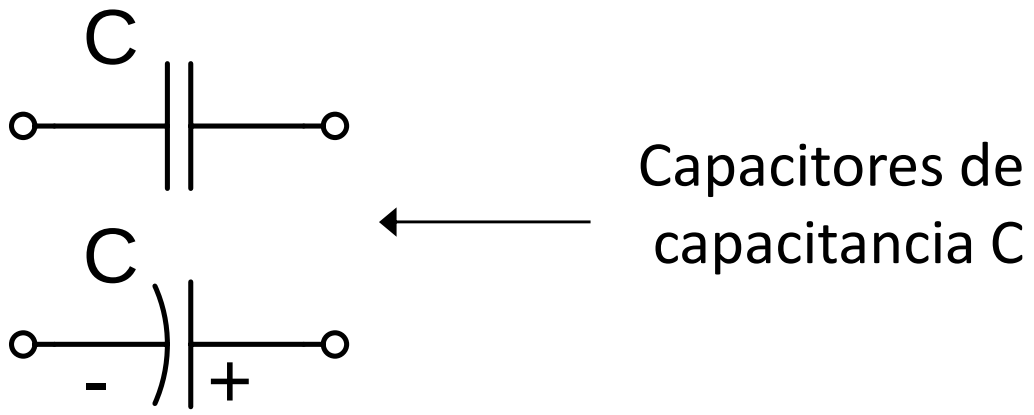
- En esta clase introduciremos dos componentes pasivos no disipativos duales muy importantes: el *capacitor* y el *inductor*.

- En conjunto con los resistores y los transformadores (dispositivos que todavía no hemos visto), todos estos elementos forman un conjunto completo de elementos pasivos.

- Estudiaremos las características voltaje-corriente de estos nuevos componentes y adelantaremos un par de ideas sobre el concepto de *impedancia*.

Capacitor

- Un *capacitor (*o *condensador)* es un componente circuital *pasivo* de dos terminales que almacena energía en forma de carga eléctrica. Un capacitor ideal **no disipa energía**.
  - La principal característica de un capacitor es su *capacitancia*, la que cuantifica la habilidad del capacitor de almacenar carga eléctrica.
  - El componente se llama ***capacitor***, no ***capacitancia***. La capacitancia es su característica.

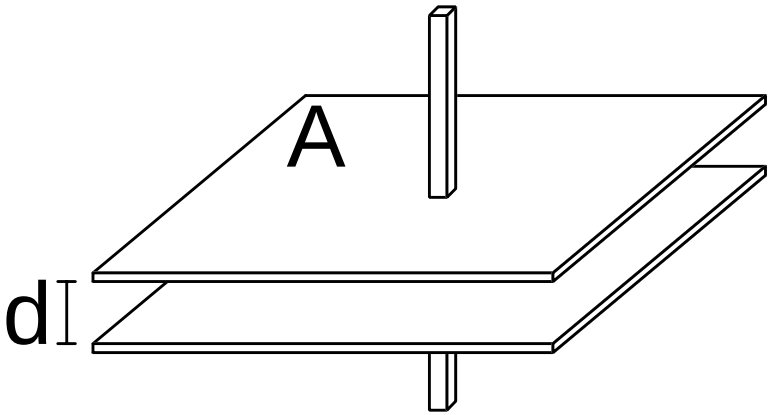


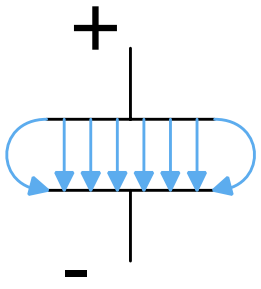
Capacitor

- La capacitancia se mide en Farad [F]:

$$1\ [\mathrm{F}] = 1\ \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}\right]$$

- La capacitancia depende de la geometría del componente y de la permitividad (ε) del dieléctrico. En un capacitor de placas paralelas:





$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

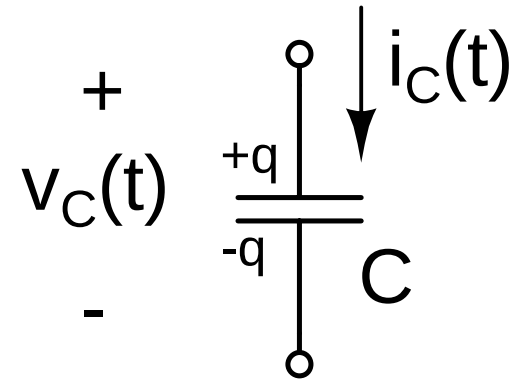
$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

Capacitor

- Relación voltaje-corriente (lo que realmente nos importa en teoría de circuitos):

$$C = \frac{q(t)}{v_C(t)}$$

$$i_C(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$



  - Luego, el voltaje en función de la corriente está dado por:

$$C = \frac{q(t)}{v_C(t)}$$

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i_C(x)\mathrm{d}x \rightarrow v_C(t) = \underbrace{v_C(0)}_{\frac{q(0)}{C}} + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(x)\mathrm{d}x$$

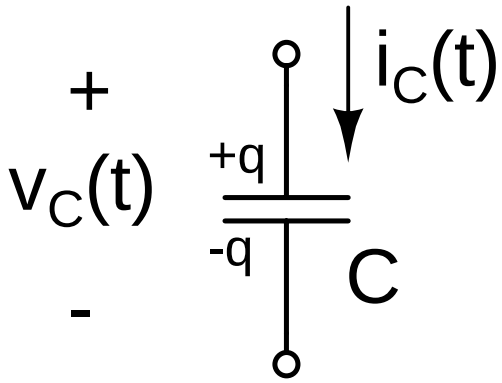
Capacitor

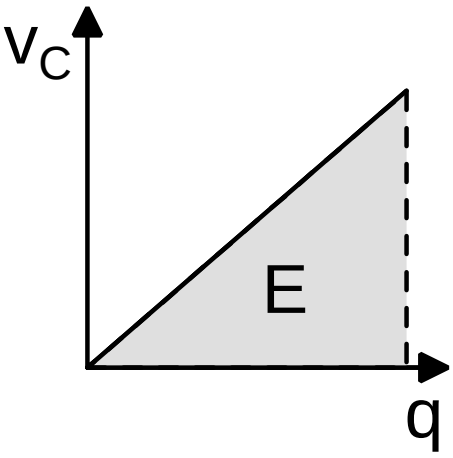
- La energía almacenada (en forma de carga) de un capacitor se calcula como:

$$E_C = \int_0^q v_C(x)\mathrm{d}x$$

$$v_C(x) = \frac{x}{C}$$

$$\rightarrow E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cv_C^2$$

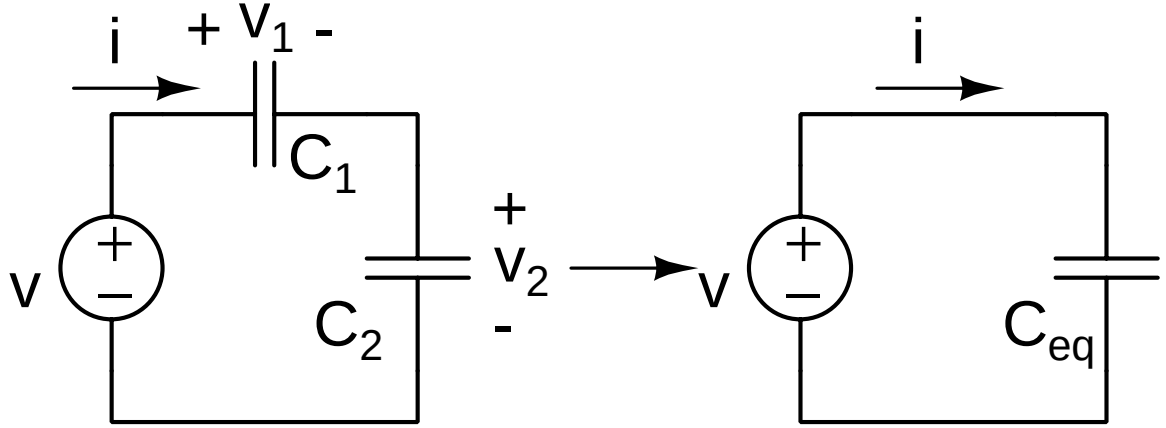




- Es un buen ejercicio preguntarse por qué la energía no es simplemente q•V.

Capacitor

- Conexión serie:



$$i_1 = i_2 = i \rightarrow \frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C_n}$$

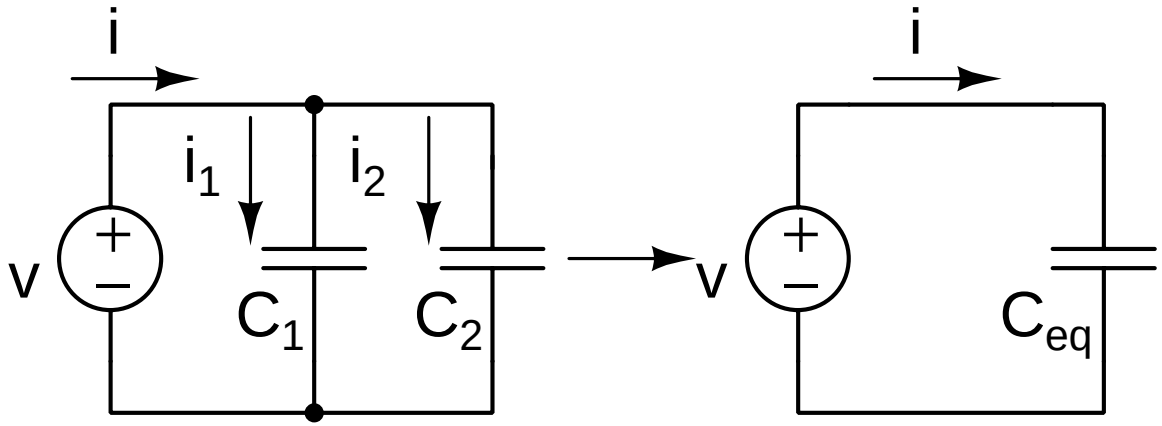
$$v = v_1 + v_2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C_1||C_2}$$

$$C_{eq} = C_1||C_2$$

Capacitor

- Conexión paralelo:



$$v_1 = v_2 = v \rightarrow i_n = C_n \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

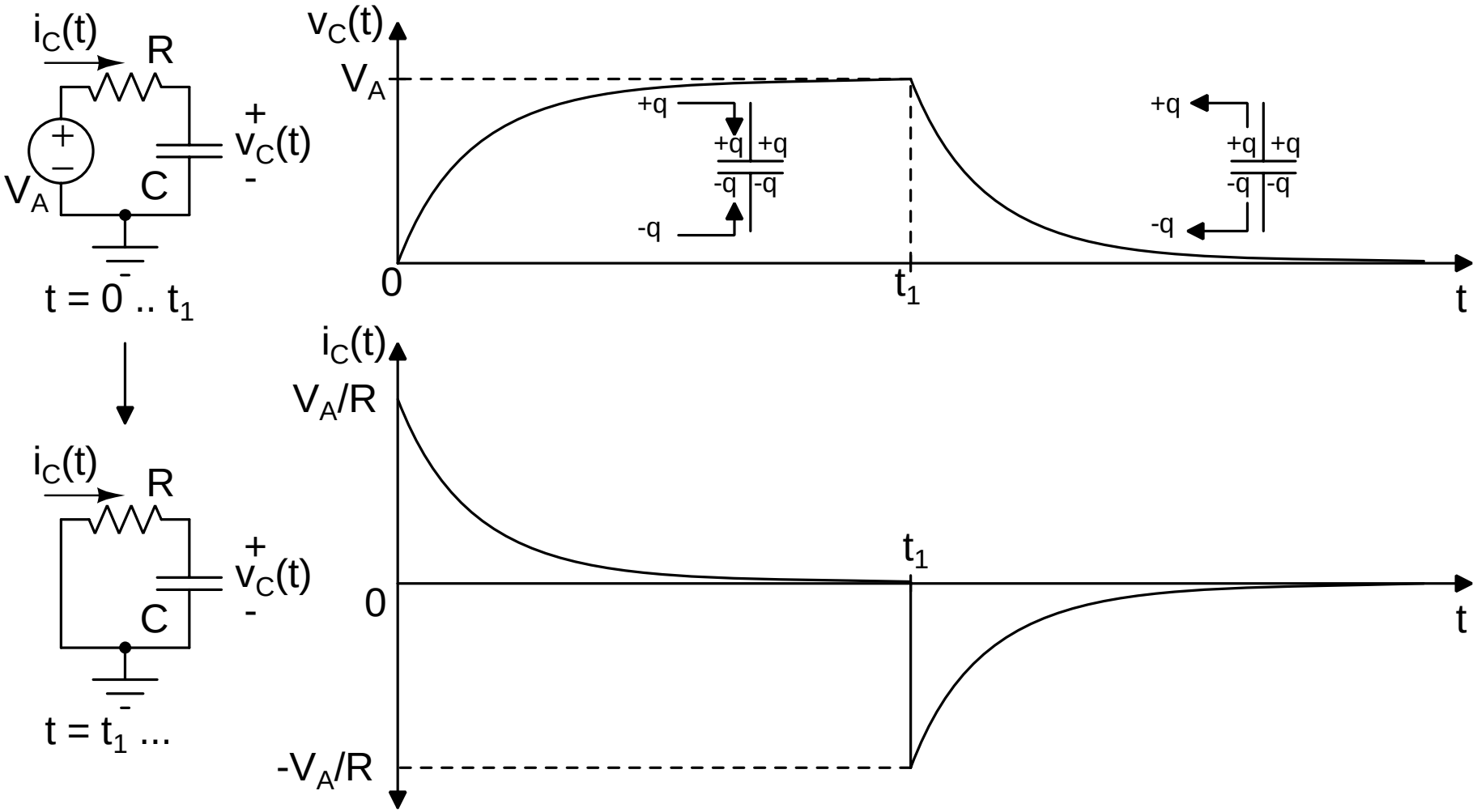
$$i = i_1 + i_2$$

$$i = C_1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \rightarrow i = (C_1 + C_2) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

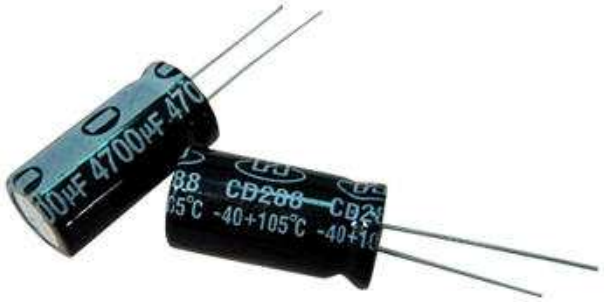
Capacitor

- Un capacitor se opone a los cambios bruscos de voltaje:



Capacitor

- Algunos tipos de capacitores discretos:



Capacitores electrolíticos *through-hole*

[geoffg.net/Measuring_ESR.html]



Capacitores cerámicos *through-hole*

[capacitorguide.com/ceramic-capacitor/]



Súper capacitor

[tme.eu/en/pages/Product_of_the_week:samwha-dh5u308w60138th-supercapacitor.html]

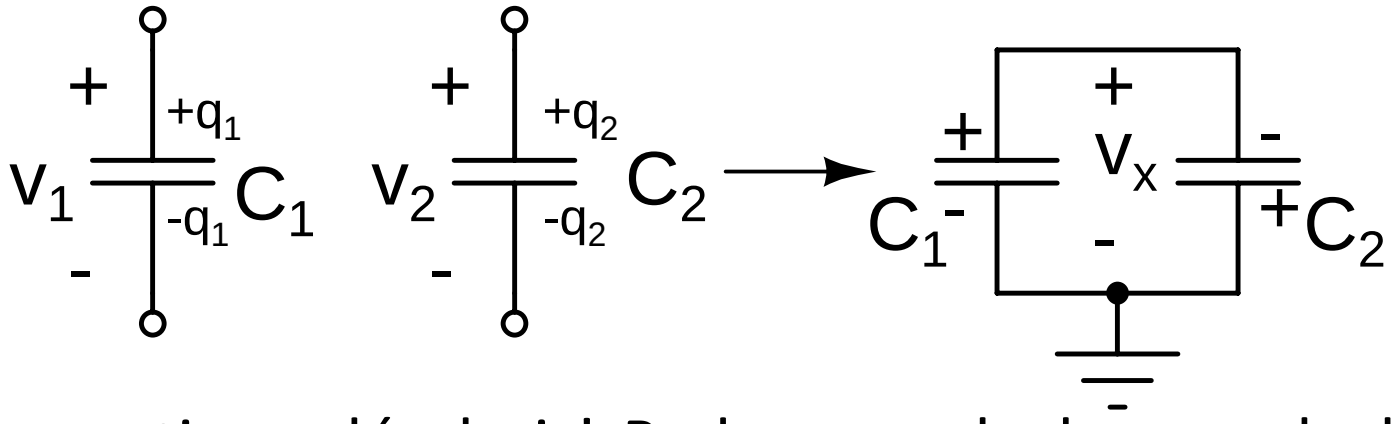
Capacitores electrolíticos SMD



[eurotronix.com/noticias/condensadores-electroliticos-smd-gv-teapo]

Capacitor

- **Ejemplo**: Considere dos capacitores con cierta carga inicial. Calcule v_x al conectar los capacitores como se indica en la figura.



- La carga no tiene dónde ir! Podemos calcular v_x calculando las cargas que hay en los nodos:

$$q_1 = C_1 v_1$$
$$q_2 = C_2 v_2$$
$$\rightarrow q_x = q_1 + -q_2 = C_1 v_1 - C_2 v_2$$

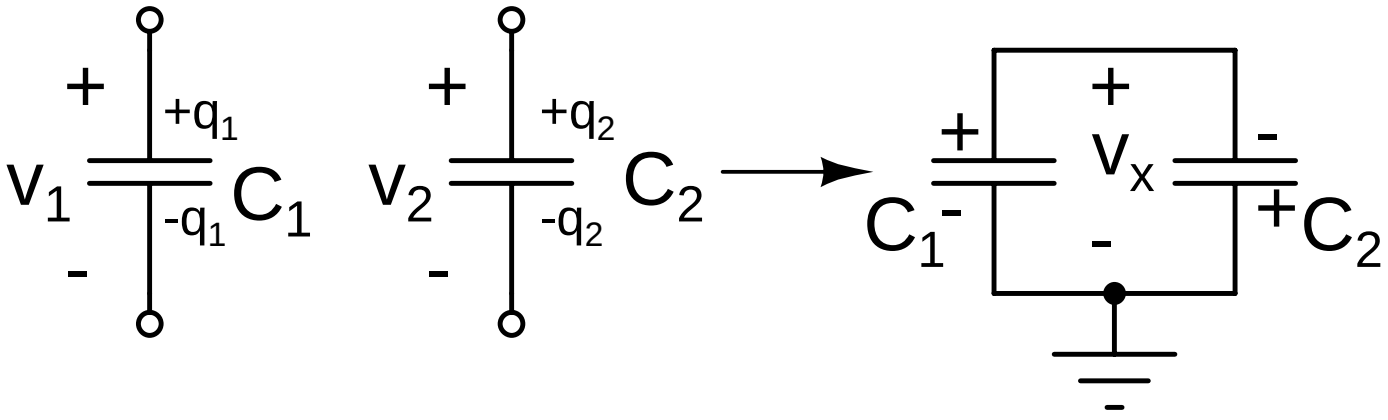
Capacitor

- Por lo tanto:

$$v_x = \frac{q_x}{C_{eq}}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

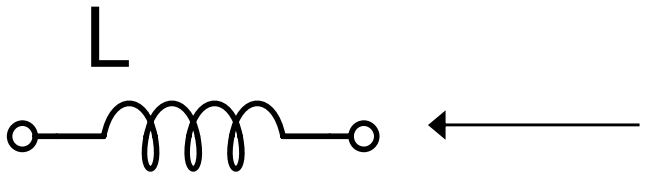
$$\rightarrow v_x = \frac{C_1}{C_1+C_2} v_1 - \frac{C_2}{C_1+C_2} v_2$$



Fin ej.

Inductor

- Un *inductor* (o *bobina*) es un componente circuital *pasivo* de dos terminales que almacena energía en forma de campo magnético. Un inductor ideal *no disipa energía*.
  - La principal característica de un inductor es su *inductancia*, la que cuantifica la habilidad del inductor de almacenar campo magnético.
  - El componente se llama ***inductor***, no ***inductancia***. La inductancia es su característica.



Inductor de inductancia L

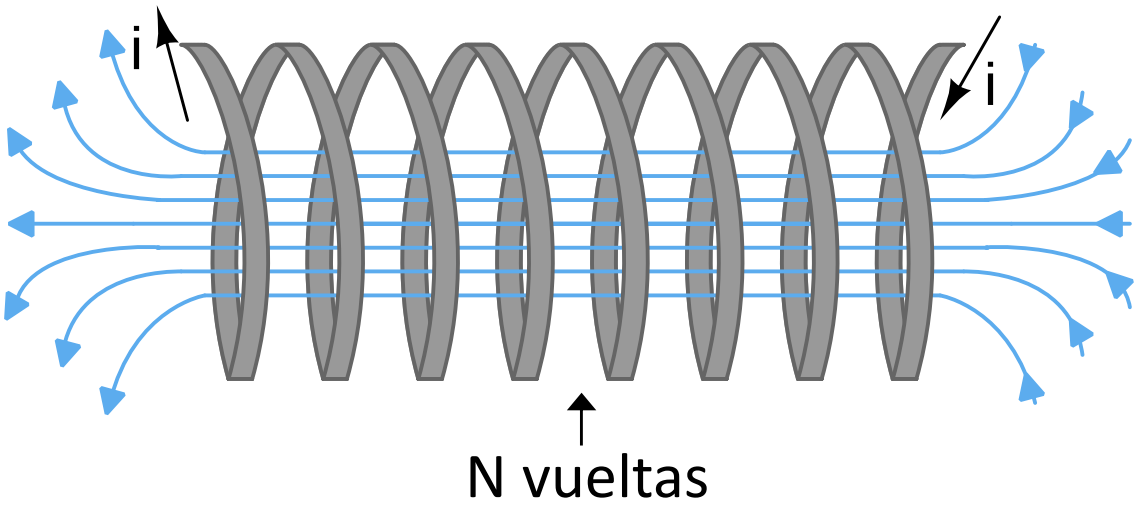
Inductor

- La inductancia se mide en Henry [H]:

$$1\ [\mathrm{H}] = 1\ \left[\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}}\right]$$

Flujo magnético

- Un inductor se obtiene con un cable enrollado alrededor de algún material. La inductancia depende de su geometría y del material del núcleo.



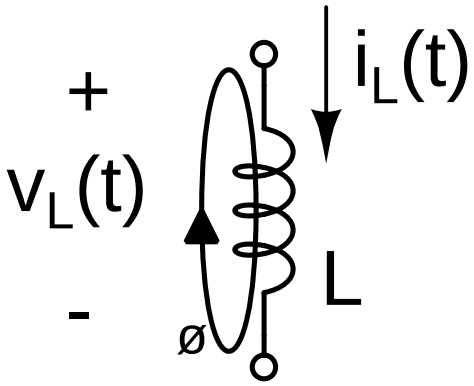
$$L \propto N^2$$

Inductor

- Relación voltaje-corriente:

$$L = \frac{\phi(t)}{i_L(t)}$$

$$v_L(t) = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$



  - Luego, la corriente en función del voltaje está dado por:

$$L = \frac{\phi(t)}{i_L(t)}$$

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t v_L(x)\mathrm{d}x \quad \rightarrow i_L(t) = \underbrace{i_L(0)}_{\frac{\phi(0)}{L}} + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(x)\mathrm{d}x$$

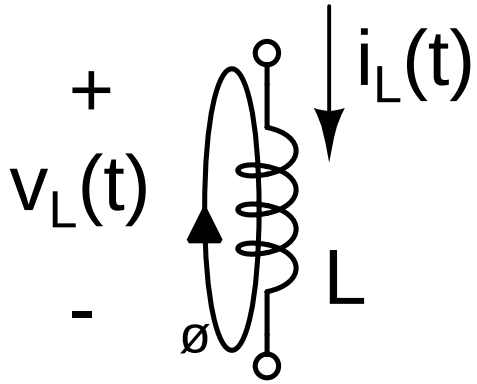
Inductor

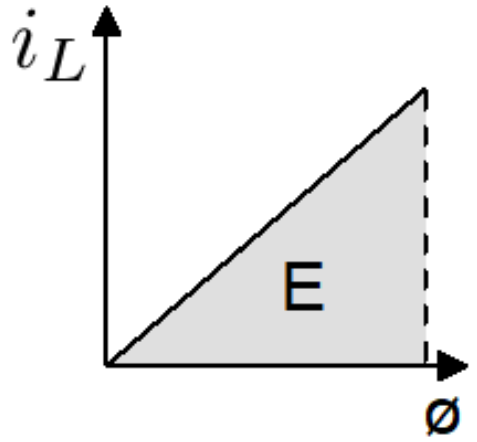
- La energía almacenada (en forma de campo magnético) de un inductor se calcula como:

$$E_L = \int_0^{\phi} i_L(x)\mathrm{d}x$$

$$i_L(x) = \frac{x}{L}$$

$$\rightarrow E_L = \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{L} = \frac{1}{2}Li_L^2$$

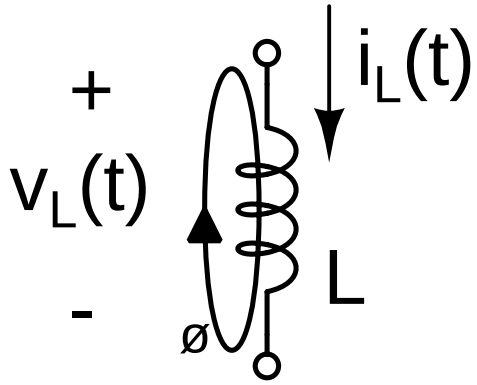




Inductor

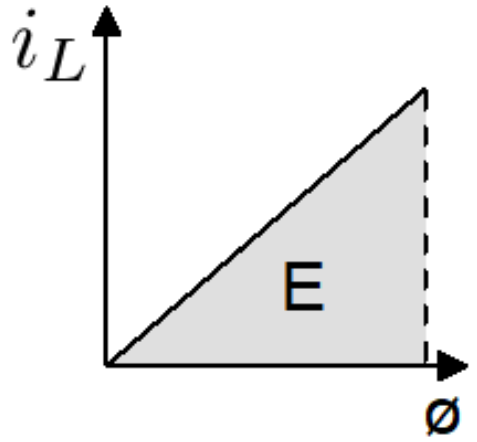
- De forma más explícita, para calcular la energía almacenada:

Potencia transmitida: $p(t) = v_L(t) i_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} i_L(t)$



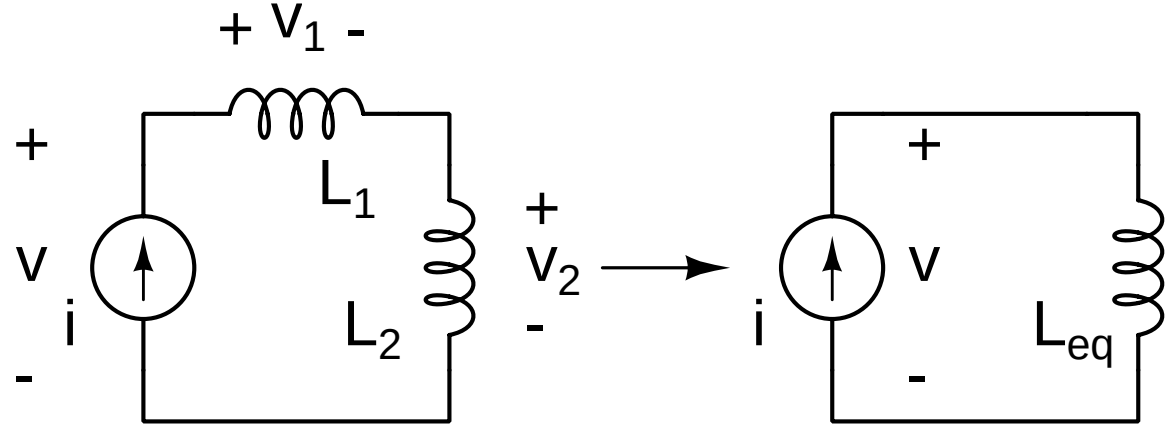
Entonces:

$$E_L = \int_{-\infty}^{t} p(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{t} L \frac{di_L(u)}{du} i_L(u)\, du$$
$$= \int_{0}^{i_L(t)} L\, i_L\, di_L$$
$$= \frac{1}{2} L\, i_L(t)^2$$



Inductor

- Conexión serie:



$$i_1 = i_2 = i \rightarrow v_n = L_n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

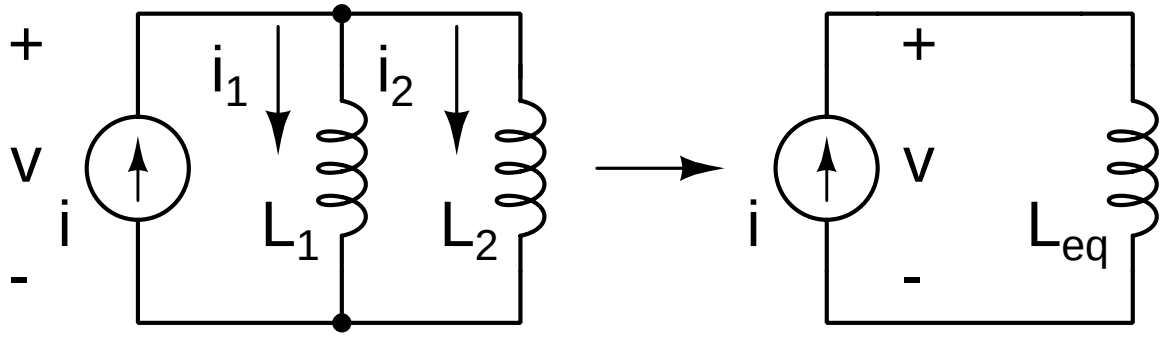
$$v = v_1 + v_2$$

$$v = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \rightarrow v = (L_1 + L_2) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

Inductor

- Conexión paralelo:



$$v_1 = v_2 = v \rightarrow \frac{\mathrm{d}i_n}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{L_n}$$

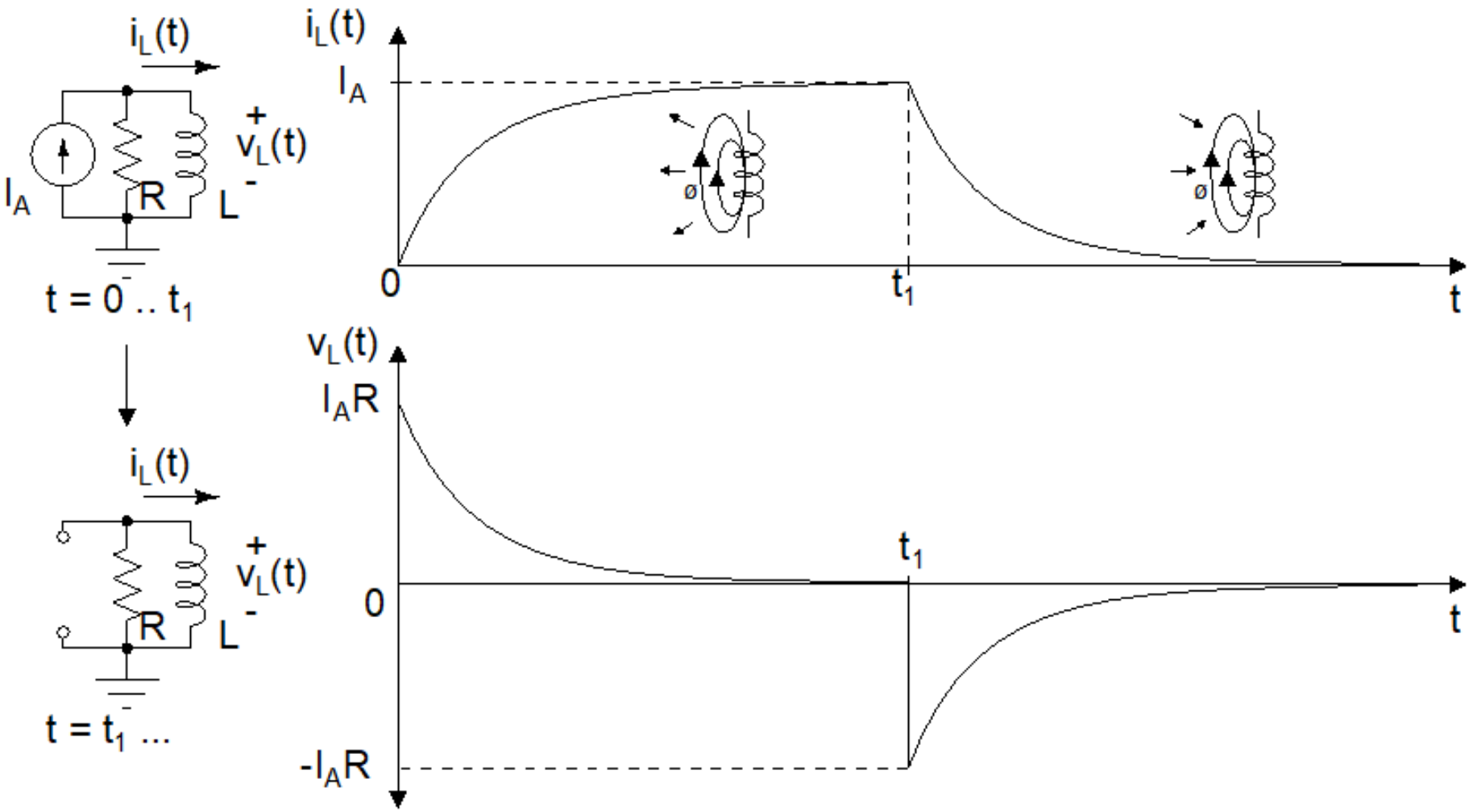
$$i = i_1 + i_2$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{L_1||L_2}$$

$$L_{eq} = L_1||L_2$$

Inductor

- Un inductor se opone a los cambios bruscos de corriente:



Inductor

- Algunos tipos de inductores discretos:



[en.wikipedia.org/wiki/File:Resistor_shaped_Inductors.png]

Inductores con forma de resistores *through-hole*



[matrixtsl.com/courses/ecc/index.php?n=Inductors.VariableInductors]

Inductor variable

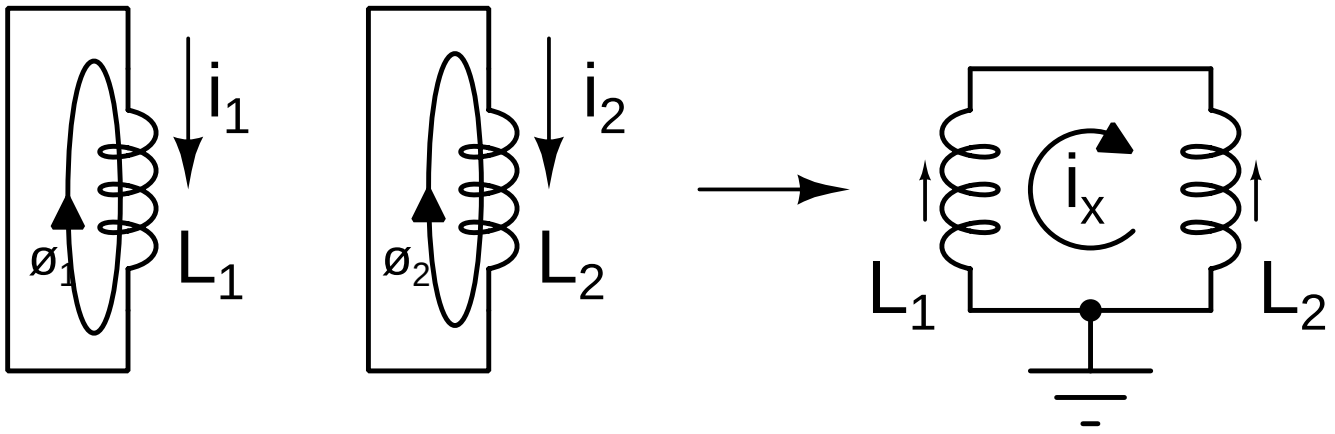
Inductor con núcleo ferromagnético



[wonderfulengineering.com/what-is-an-inductor/]

Inductor

- **Ejemplo**: Considere dos inductores con cierto flujo inicial. Calcular i_x al conectar los inductores como se indica en la figura.



- El flujo total del segundo circuito corresponde a la superposición de los flujos iniciales:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= L_1 i_1 \\ \phi_2 &= L_2 i_2\end{aligned} \quad \rightarrow \phi_x = \phi_1 + -\phi_2 = L_1 i_1 - L_2 i_2$$

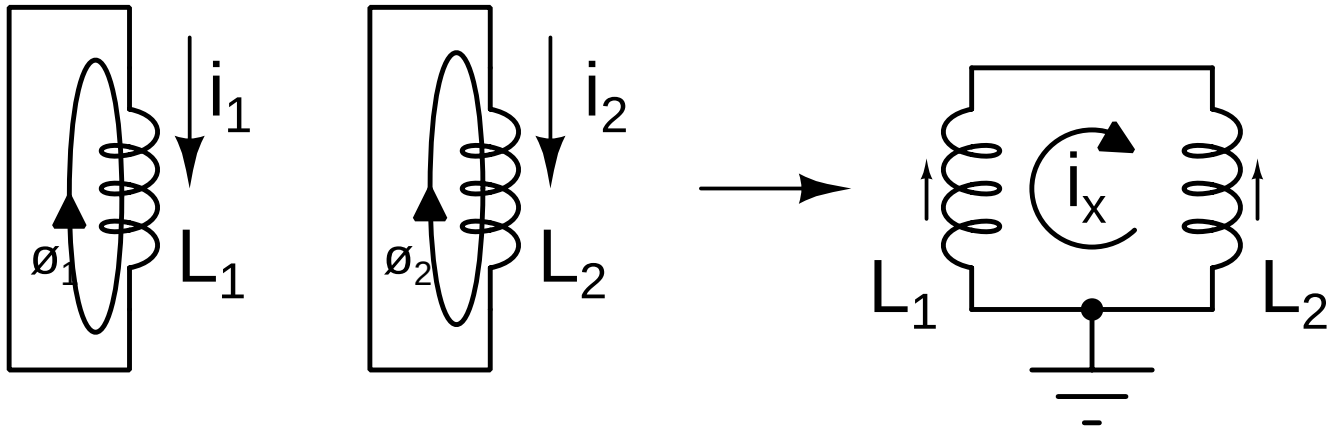
Inductor

- Por lo tanto:

$$i_x = \frac{\phi_x}{L_{eq}}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

$$\rightarrow i_x = \frac{L_1}{L_1+L_2} i_1 - \frac{L_2}{L_1+L_2} i_2$$



Fin ej.

Impedancia

- Tanto el capacitor como el inductor corresponden a componentes de un puerto (dos terminales) que establecen una relación entre voltaje y corriente:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

  - *Noten la relación con la Ley de Ohm en estas expresiones.*

- A continuación definiremos y estudiaremos de forma prematura el concepto de *impedancia.*

Impedancia

- La impedancia Z se puede definir como la resistencia aparente de un circuito al flujo de corriente.
  - Si bien un capacitor o un inductor no se comportan exactamente como un resistor, éstos pueden ser vistos como resistores cuya resistencia varía con la *frecuencia* y que además desfasan la corriente con respecto al voltaje.
  - Más adelante, cuando estudiemos circuitos en el dominio de la frecuencia, estudiaremos bien este tema. Por ahora sólo lo revisaremos de forma intuitiva.

Impedancia de un capacitor

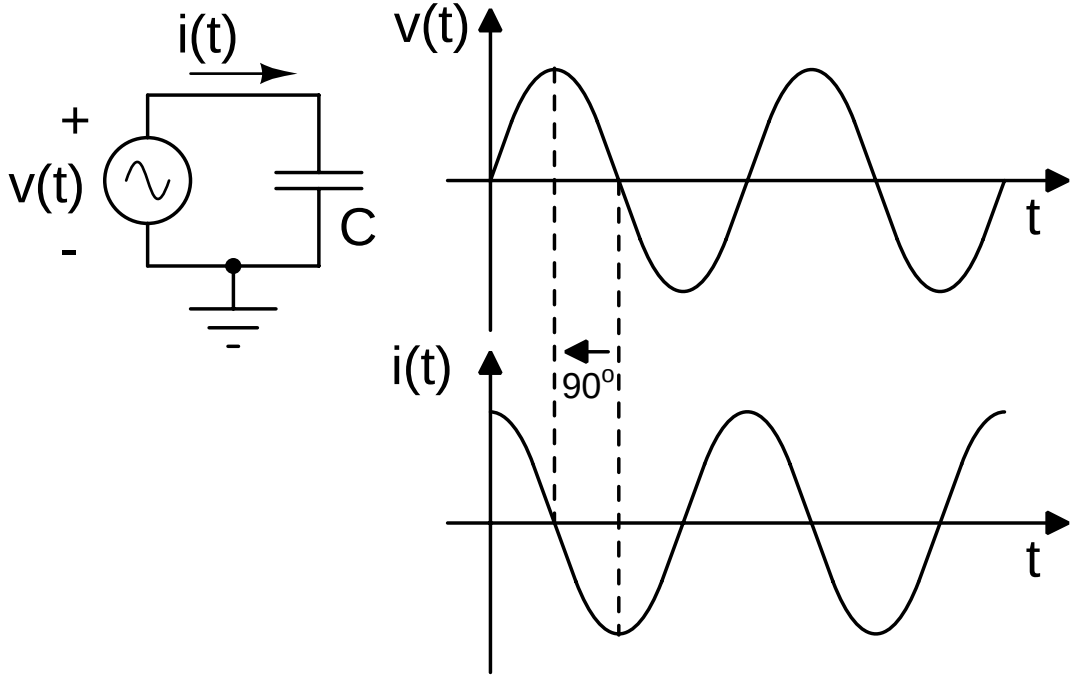
- La relación voltaje-corriente de un capacitor está dada por:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

- Si v_C varía de forma brusca su derivada es grande, lo que implica una mayor corriente por el capacitor. Así mismo, la derivada de una señal de voltaje que varía lentamente es pequeña, lo que se traduce en una corriente menor:
  - Baja frecuencia: el capacitor se opone al flujo de corriente (similar a un circuito abierto).
  - Alta frecuencia: el capacitor no se opone al flujo de corriente (similar a un corto circuito).

Impedancia de un capacitor

- **Ejemplo**:



$$v(t) = \sin(\omega t)$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \omega C\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow i(t) = \omega C\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{“}\frac{v(t)}{i(t)}\text{”} \rightarrow Z_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}\angle -90^{\circ} \leftarrow$$

La corriente adelanta en 90º al voltaje

Fin ej.

Impedancia de un inductor

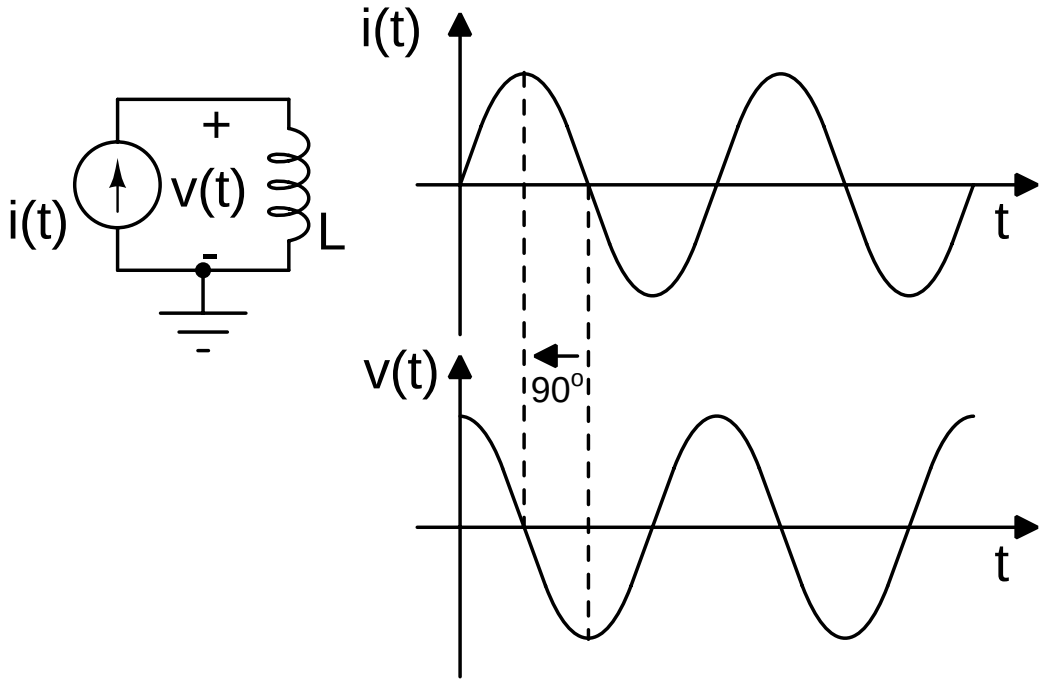
- La relación voltaje-corriente de un inductor está dada por:

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

- Si i_L varía de forma brusca su derivada es grande, lo que implica una mayor diferencia de potencial en el inductor. Así mismo, la derivada de una señal de corriente que varía lentamente es pequeña, lo que se traduce en una diferencia de potencial menor:
  - Baja frecuencia: el inductor no se opone al flujo de corriente (similar a un corto circuito).
  - Alta frecuencia: el inductor se opone al flujo de corriente (similar a un circuito abierto).

Impedancia de un inductor

- **Ejemplo**:



$$i(t) = \sin(\omega t)$$

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \omega L\cos(\omega t)$$

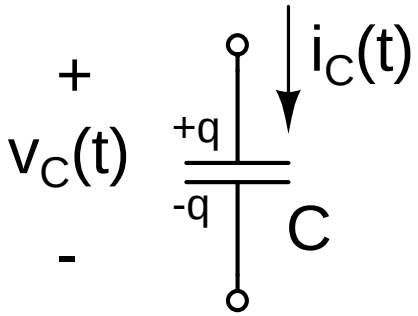
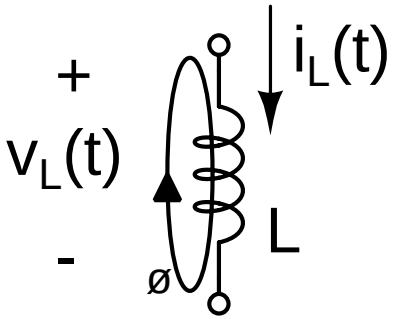
$$\rightarrow v(t) = \omega L\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{“}\frac{v(t)}{i(t)}\text{”} \rightarrow Z_L(\omega) = \omega L\angle 90^{\circ}$$

La corriente retrasa en 90º al voltaje

Fin ej.

Dualidad

	Capacitor	**Inductor**
Símbolo		
Almacena	Carga eléctrica	Flujo magnético
Característica voltaje-corriente	$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$	$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$
Se opone a cambios bruscos de	Voltaje	Corriente
@ baja freq.	c.a.	c.c.
@ alta freq.	c.c.	c.a.