IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC
Clase 3 y 4: Métodos de Nodos y Mallas

Contenidos:

1. Introducción
2. Método de nodos
   - 2.1. Ejemplos
   - 2.2. Supernodo
3. Método de mallas
   - 3.1. Ejemplos
   - 3.2. Supermalla
4. Método de nodos versus método de mallas

Capítulo 4 Dorf 6ª Edición
Capítulo 3 Irwin 6ª Edición

1. Introducción

- Dada la complejidad de muchos circuitos, se hace necesario el desarrollo de técnicas de análisis que utilicen métodos sistemáticos rigurosos.

- Los métodos de los nodos y de las mallas se usan para:

  - **Analizar circuitos grandes y complejos** en sistemas eléctricos

  - **Sistematizar un procedimiento** que ayuda a ordenar el planteamiento de ecuaciones útiles.

1. Introducción

- Procedimiento:
  - No pensar, sólo ejecutar, una receta de cocina, fácil de programar
  - No parece muy inteligente, pero ayuda a evitar errores y por sobre todo a ordenarse para resolver
  - Ya (casi) no me pregunto que variables uso y que ecuaciones hago
  - Mas ecuaciones, mas largo, pero al final mas rápido
  - Uso las variables del método, las ecuaciones del método y saco los resultados del método y finalmente respondo relacionando lo que se pide con estos resultados.

1. Introducción:
De leyes a métodos.

- Tanto la ley de voltajes de Kirchhoff como la ley de corrientes derivan en los métodos de mallas y nodos, respectivamente.

- Ambas metodologías transforman el problema de circuitos en un problema matricial del estilo **A x = b**

  A: Matriz NxN

  x: Vector columna de incógnitas, de N elementos

  b: Vector columna de fuentes, de N elementos

  donde:

  Método de nodos → x es vector voltajes (de nodos)

  Método de mallas → x es vector corrientes (de mallas)

2. Método de nodos

1.- Escoger un **nodo de referencia** (tierra).

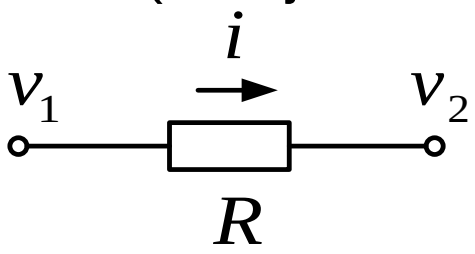
- Buscar el nodo con más conexiones.

2.- **Definir en cada nodo un voltaje v_i** que será la incógnita a despejar.

- Podrían existir nodos cuyo voltaje sería conocido dada la presencia de fuentes de voltaje.

3.- Escribir **LKC en cada nodo** (menos en el de referencia), en función de los voltajes a determinar (voltajes de nodo), utilizando:

$$i = (v_1 - v_2) / R$$



4.- **Resolver** el sistema de ecuaciones

2.1. Ejemplos

Al aplicar el método de nodos se pueden distinguir básicamente 3 casos:

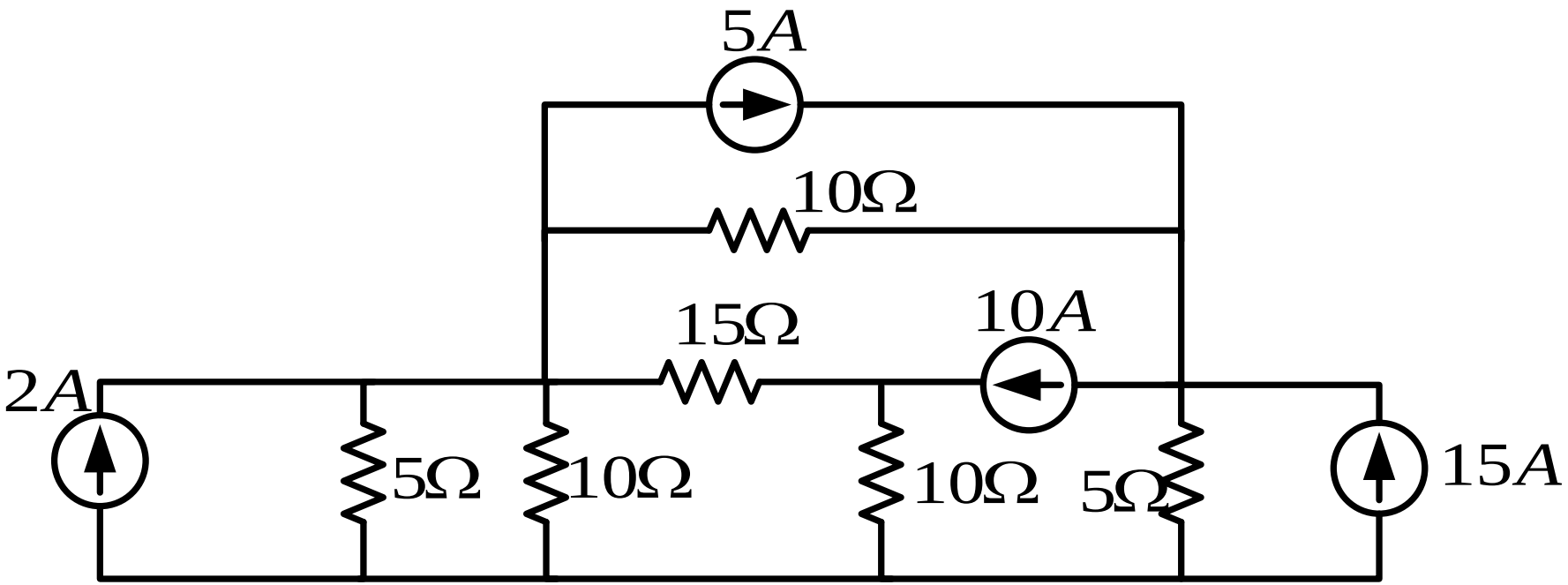
- Circuitos con sólo fuentes independientes de corriente.
- Circuitos con fuentes independientes de corriente y de voltaje.
- Circuitos con fuentes independientes y dependientes.

Otros casos son fácilmente deducibles mediante el conocimiento de los casos anteriores.

2.1. Ejemplos:

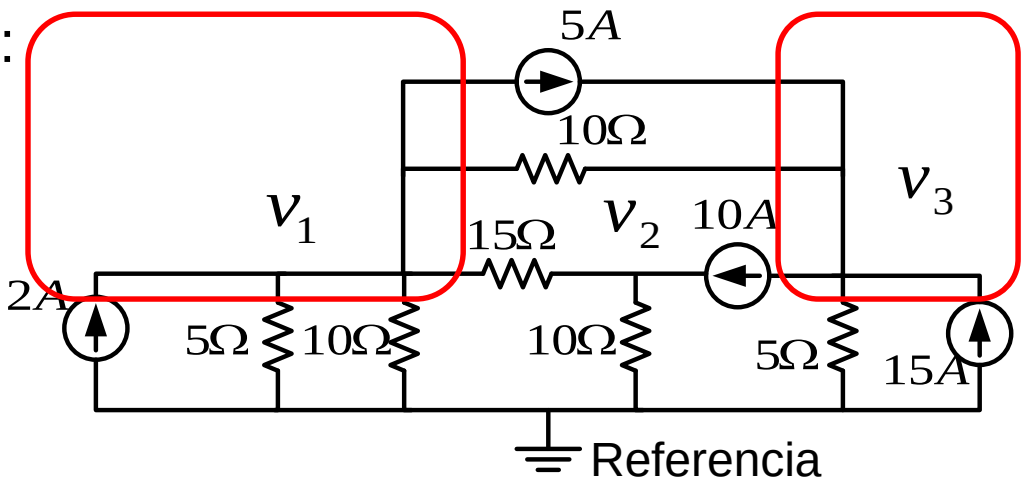
Sólo fuentes independientes de corriente.

Obtener todos los voltajes asociados al circuito de la figura:



2.1. Ejemplos:
Sólo fuentes independientes de corriente.

- Aplicando los pasos 1 y 2:



- Aplicando el paso 3:

Nodo 1: $$2-\frac{v_1}{5}-\frac{v_1}{10}+\frac{v_2-v_1}{15}+\frac{v_3-v_1}{10}-5=0$$

Nodo 2: $$\frac{v_1-v_2}{15}-\frac{v_2}{10}+10=0$$

Nodo 3: $$-10-\frac{v_3}{5}+15+\frac{v_1-v_3}{10}+5=0$$

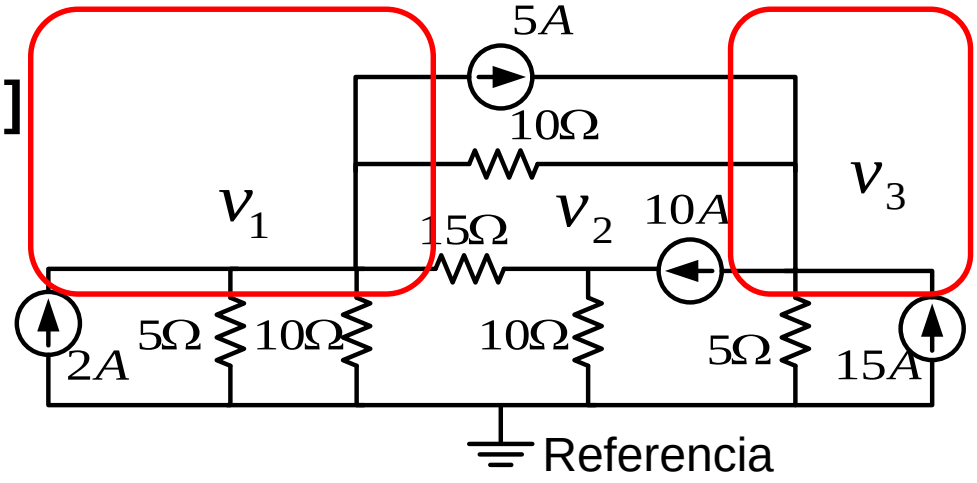
2.1. Ejemplos:
Sólo fuentes independientes de corriente.

- Acomodando matricialmente (ordenando en v_1, v_2 y v_3):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15}+\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5}+\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

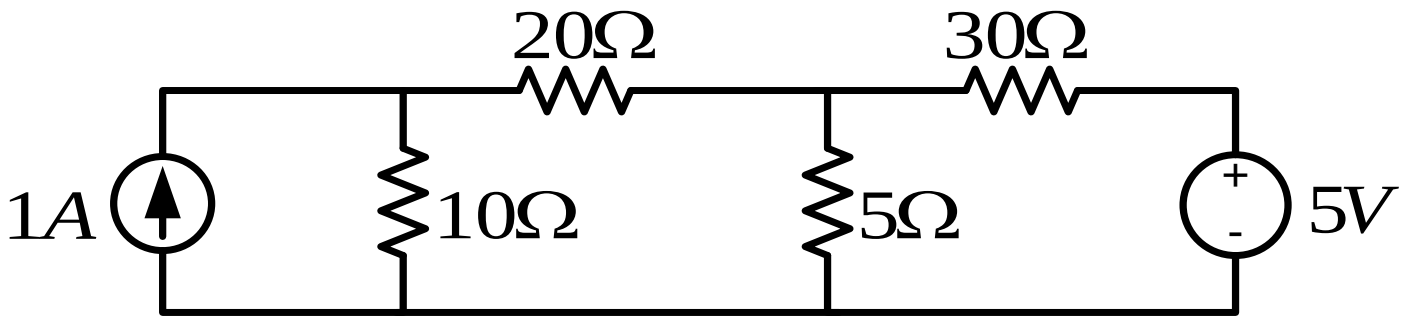
Esta matriz es conocida como **matriz de conductancia [G]**

- Matriz **simétrica**!!
- Muy **fácil de construir mediante inspección**!!

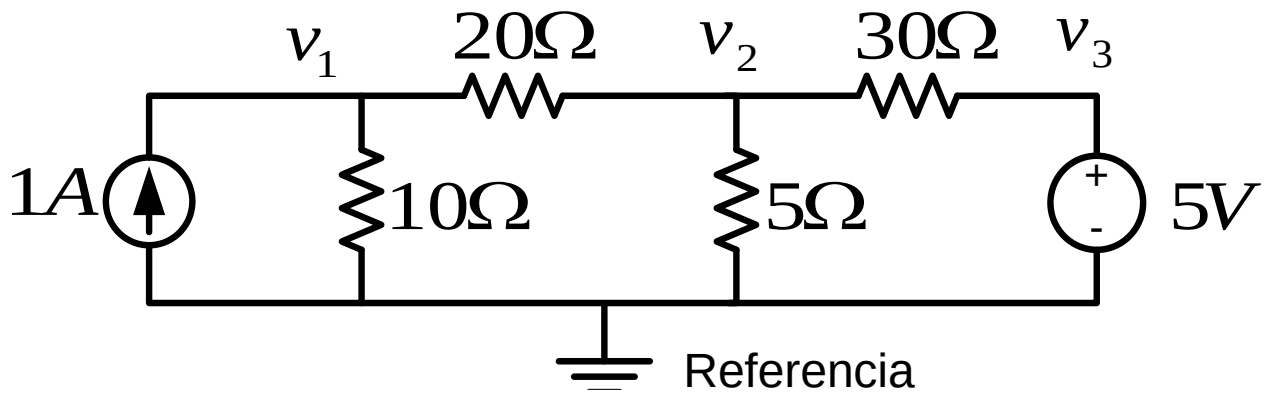


2.1. Ejemplos:
Fuentes independientes de corriente y voltaje.

Obtener todos los voltajes asociados al circuito de la figura:



- Aplicando los pasos 1 y 2:



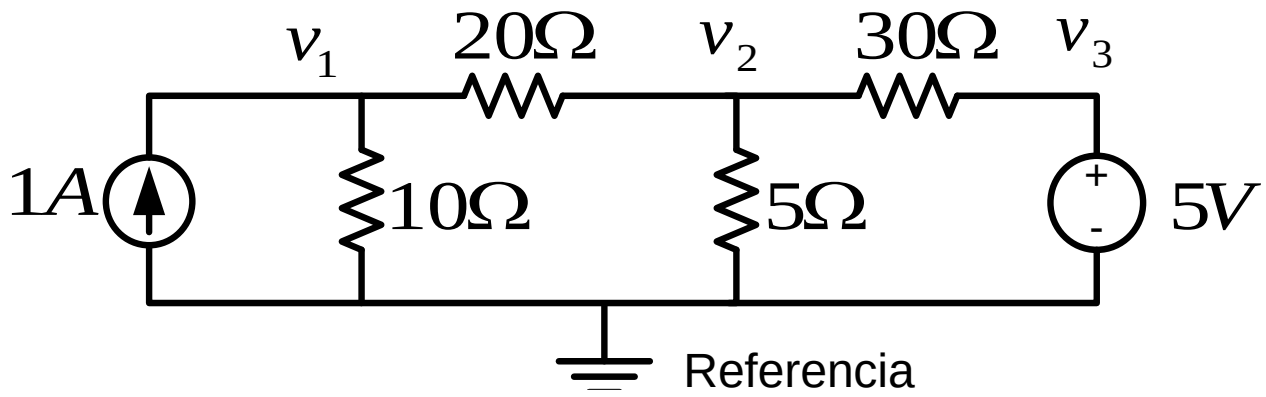
2.1. Ejemplos:
Fuentes independientes de corriente y voltaje.

- Aplicando el paso 3:

Nodo 1: $-1+\frac{v_1}{10}+\frac{v_1-v_2}{20}=0$

Nodo 2: $\frac{v_2-v_1}{20}+\frac{v_2}{5}+\frac{v_2-v_3}{30}=0$

Nodo 3: $v_3=5$



2.1. Ejemplos:
Fuentes independientes de corriente y voltaje.

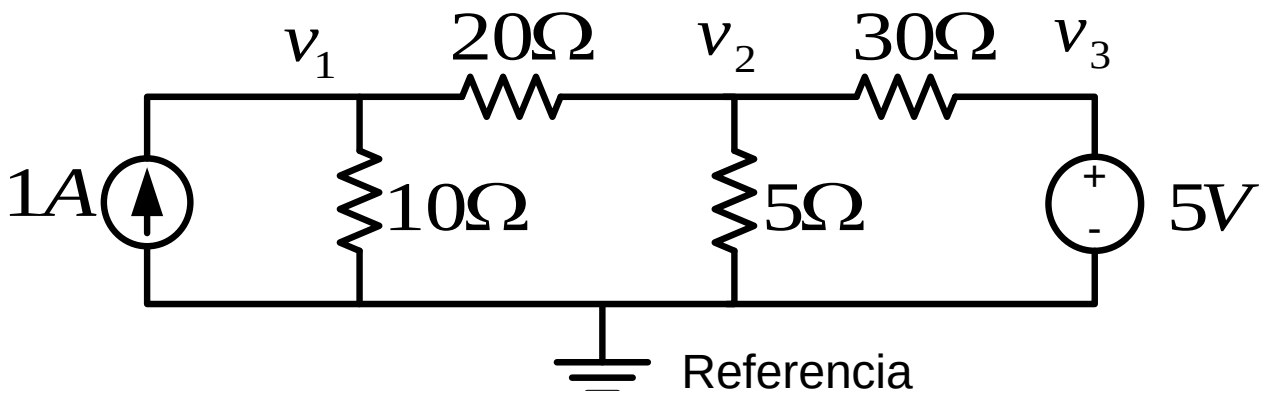
- Aplicando el paso 4:

Solución del sistema:

$v_1 = 7{,}29V$

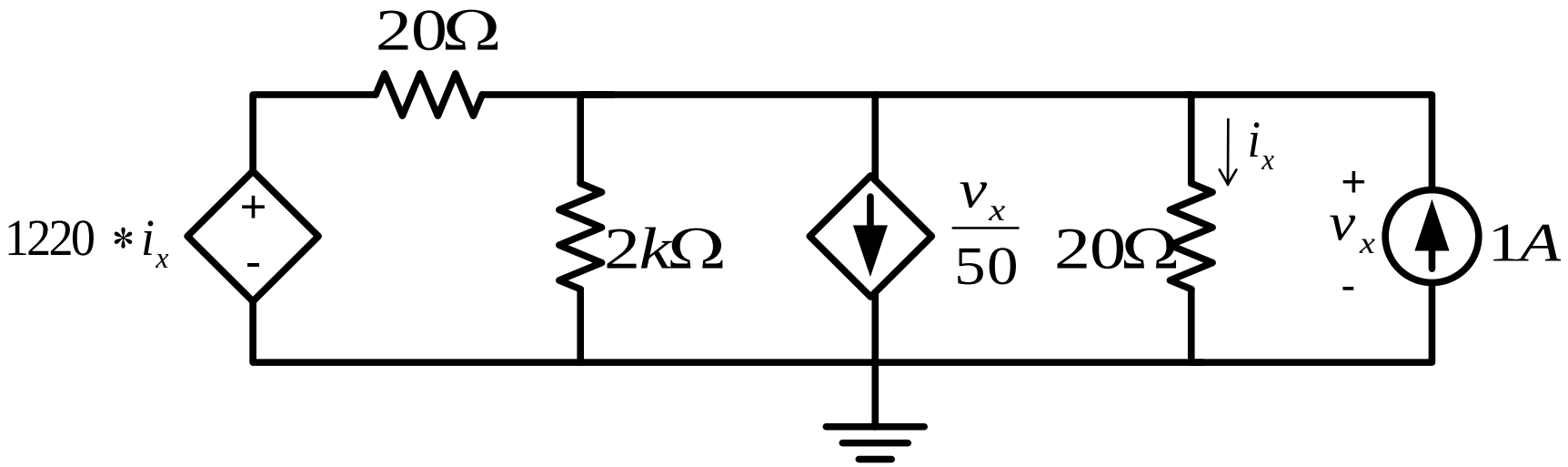
$v_2 = 1{,}88V$

$v_3 = 5V$



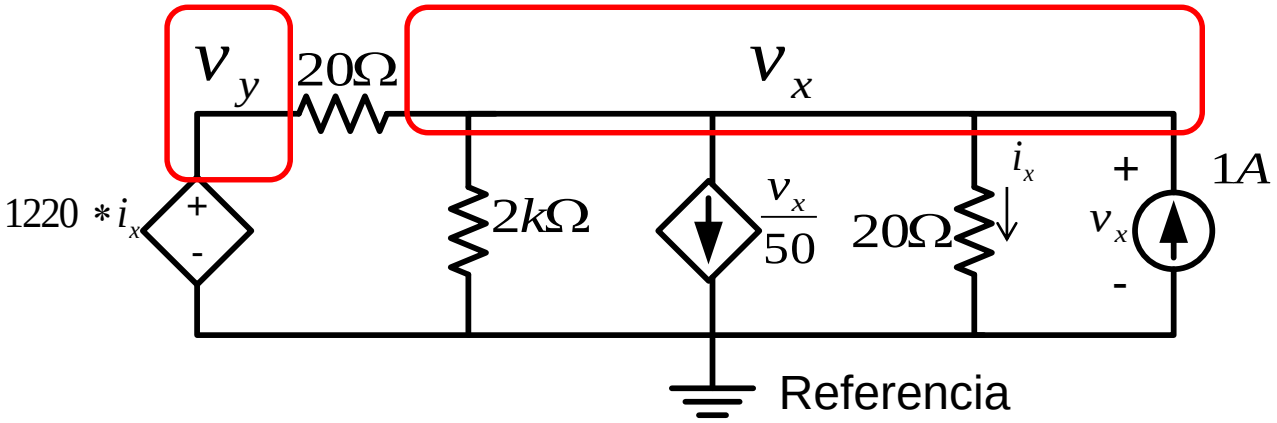
2.1. Ejemplos:
Fuentes dependientes e independientes.

Obtener el potencial de todos los nodos de la siguiente figura:



2.1. Ejemplos:
Fuentes dependientes e independientes.

- Aplicando los pasos 1 y 2:



- Aplicando el paso 3:

$$\frac{(1220*i_x)-v_x}{20}-\frac{v_x}{2000}-\frac{v_x}{50}-i_x+1=0$$

$$i_x=\frac{v_x}{20}$$

v_x=24,7 V

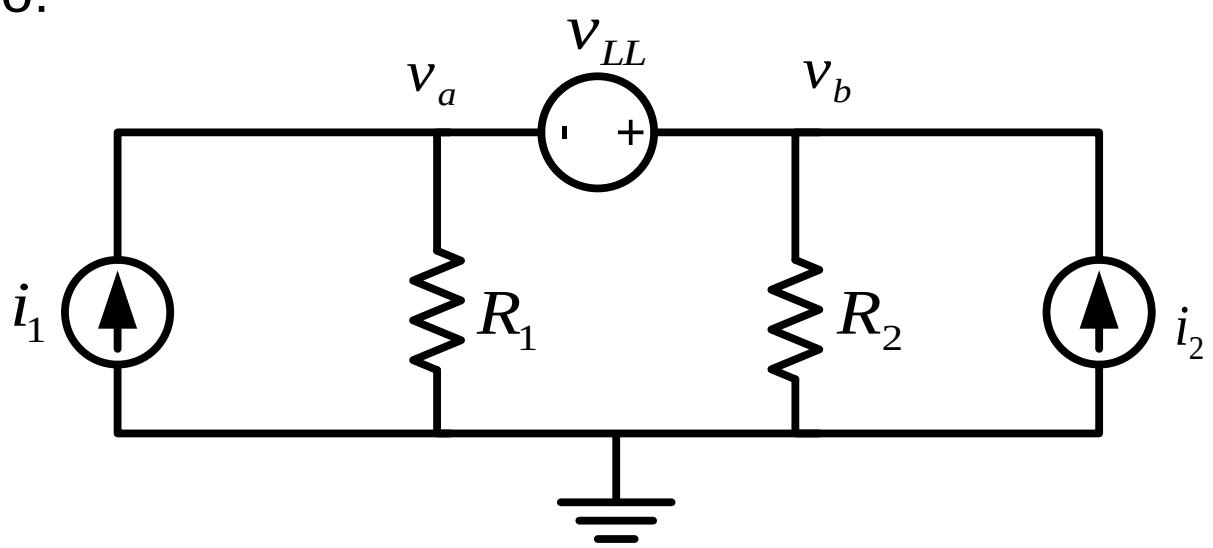
v_y= 15 V

Método de nodos - Ejemplos

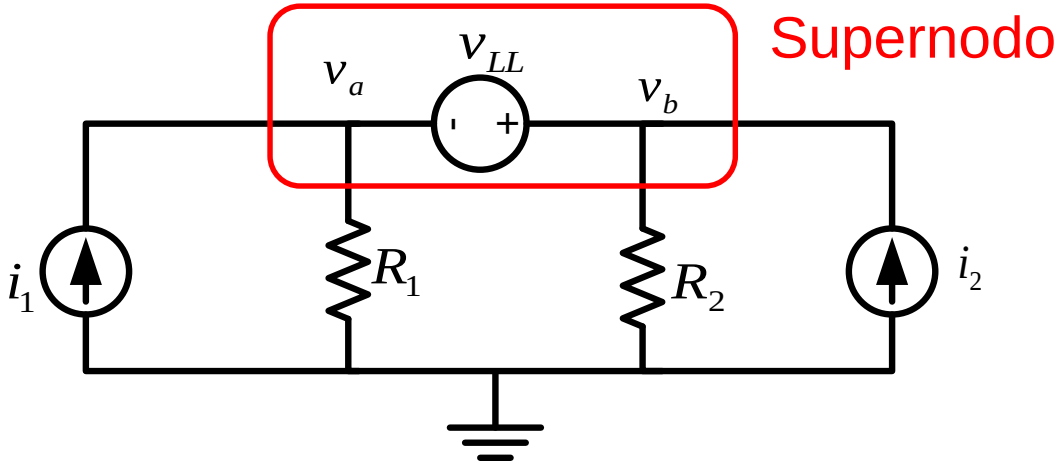
2.2. Supernodo

- Cuando hay una **fuente de voltaje en que ninguno de sus bornes está conectado al nodo de referencia**, no se puede expresar la corriente que pasa a través de ésta en términos de voltaje (de nodos) →técnica del **supernodo**.

- Ejemplo:



2.2. Supernodo



- Ecuación Supernodo:

$$i_1 + i_2 - \frac{v_a}{R_1} - \frac{v_b}{R_2} = 0$$

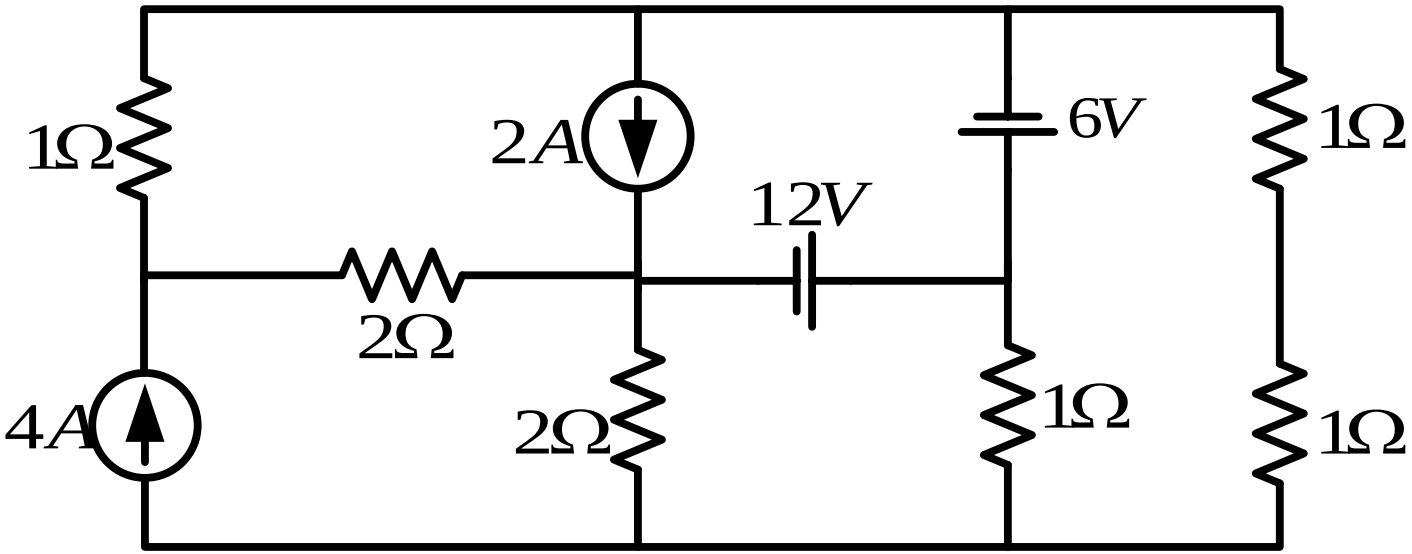
- Ecuación fuente voltaje:

$$v_b - v_a = v_{LL}$$ (al interior del supernodo)

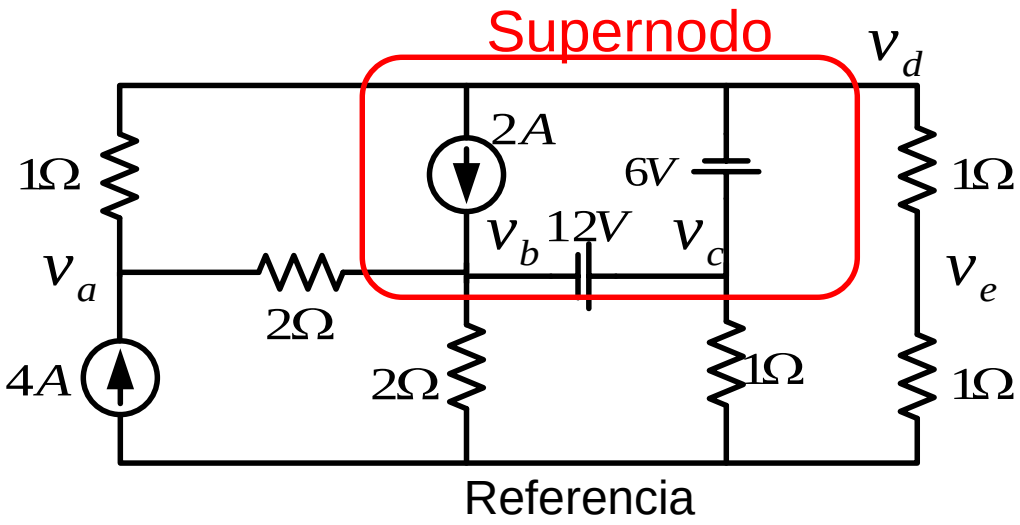
¡2 ecuaciones y 2 incógnitas!

2.2. Supernodo:
Ejemplo.

Escribir el sistema de ecuaciones que permite encontrar los voltajes en cada nodo del siguiente circuito:



2.2. Supernodo:
Ejemplo.



- Ec. Nodo a: $$4+\frac{v_b-v_a}{2}+\frac{v_d-v_a}{1}=0$$
- Ec. Supernodo: $$\frac{v_a-v_b}{2}+\frac{0-v_b}{2}+\frac{0-v_c}{1}+\frac{0-v_d}{2}+\frac{v_a-v_d}{1}=0$$
- Ec. Fuente 12 [V]: $$v_c=v_b+12$$
- Ec. Fuente 6 [V]: $$v_c=v_d+6$$

4 Ec. y 4 incógnitas!

2. Método de nodos:
Algo más…

- Si la red eléctrica tiene N nodos independientes➔ N -1 ecuaciones independientes (en voltajes de nodos)

  - **Nodo independiente:** nodo cuyo voltaje no puede ser determinado a partir del voltaje de otro nodo

Regla para contar nodos independientes:

1. Reemplazar fuentes de voltaje cortocircuitos.

2. Reemplazar fuentes de corriente por circuito abierto.

3. Contar los nodos que quedan separados por resistencias: N

3. Método de mallas

Recordemos:

- **Lazo = bucle = circuito** : trayectoria (camino) cerrada.
- **Malla**: lazo que no contiene otro lazo (ventana).
- El método de las mallas es el dual del método de los nodos.
- El análisis de mallas sólo se aplica a **redes planas**.
  - Una red (o circuito) plana es la que se puede dibujar en un plano, sin cruces.

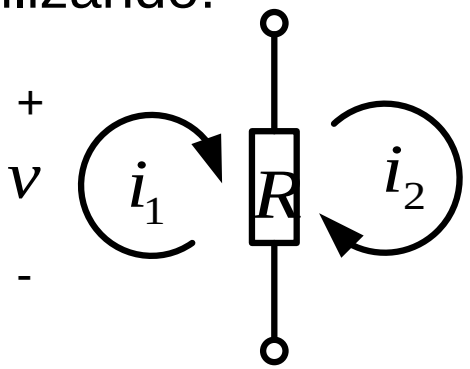
3. Método de mallas

1.- Seleccionar M corrientes de mallas (i_j) tales que al menos una de éstas pase por cada rama.

M = # Ramas - # Nodos + 1

2.- **Aplicar LKV a cada malla**, expresando los voltajes en término de las corrientes (de malla), utilizando:

$v = R(i_1 - i_2)$



M ecuaciones para M corrientes de malla desconocidas

3.- **Resolver** el sistema de ecuaciones.

3.1. Ejemplos

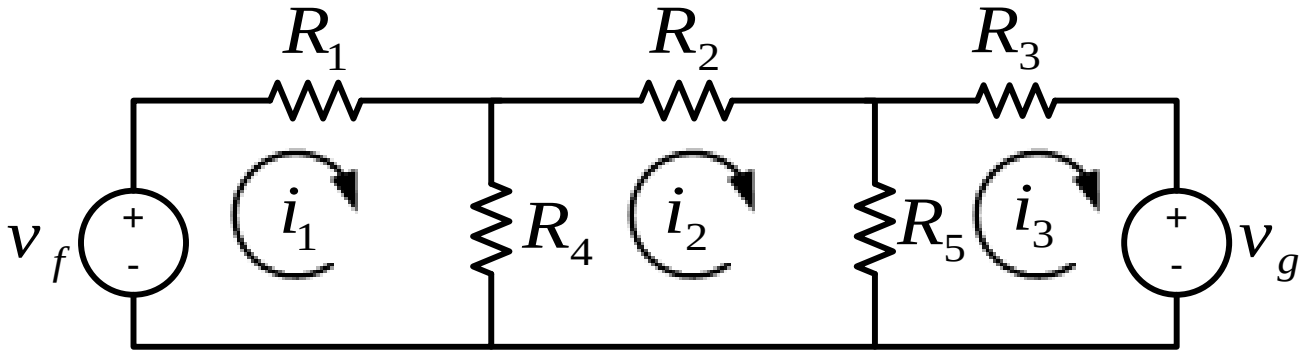
Al aplicar el método de mallas se pueden distinguir básicamente 3 casos:

- Circuitos con sólo fuentes independientes de voltaje.
- Circuitos con fuentes independientes de corriente y de voltaje.
- Circuitos con fuentes independientes y dependientes.

Otros casos son fácilmente deducibles mediante el conocimiento de los casos anteriores.

3.1. Ejemplos:
Sólo fuentes independientes de voltaje.

Aplicar el método de las mallas en el circuito de la figura:



Malla 1 :

$$R_1 i_1 + R_4 (i_1 - i_2) = v_f$$

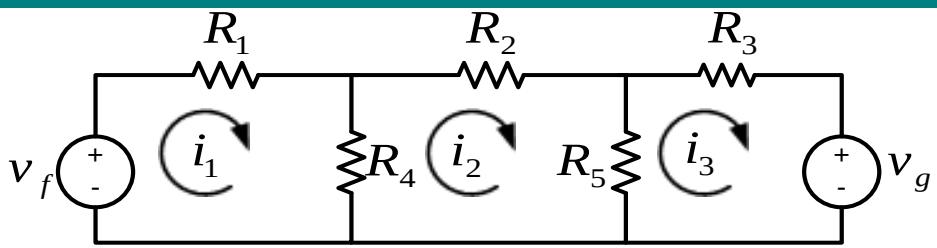
$$(R_1 + R_4) i_1 - R_4 i_2 = v_f$$

Malla 2:

$$R_4 (i_2 - i_1) + R_2 i_2 + R_5 (i_2 - i_3) = 0$$

$$-R_4 i_1 + (R_2 + R_4 + R_5) i_2 - R_5 i_3 = 0$$

3.1. Ejemplos:
Sólo fuentes independientes de voltaje.



Malla 3:

$$R_5(i_3 - i_2) + R_3 i_3 = -v_g$$

$$-R_5 i_2 + (R_3 + R_5) i_3 = -v_g$$

Acomodando matricialmente (ordenando en i_1, i_2 y i_3):

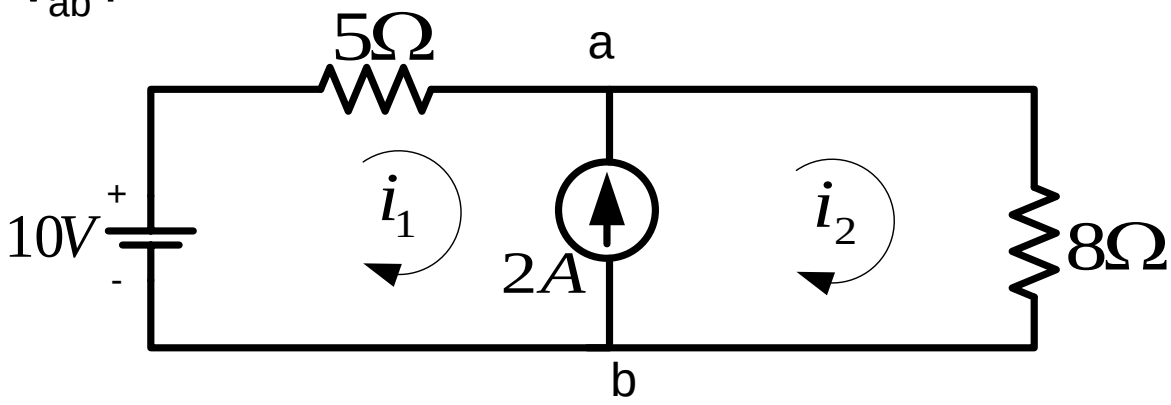
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_3 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_f \\ 0 \\ -v_g \end{bmatrix}$$

Esta matriz es conocida como **matriz de resistencia [R]**

- Matriz **simétrica**!!
- Muy **fácil de construir mediante inspección**!!

3.1. Ejemplos:
Fuentes independientes de corriente y de voltaje.

Calcular v_{ab} :



Malla 1: $5i_1 + v_{ab} = 10$

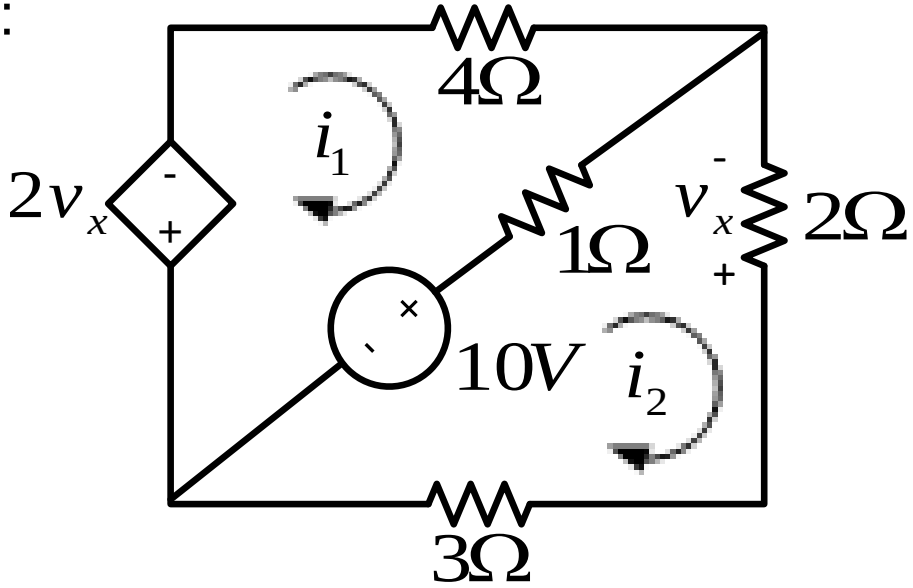
Malla 2: $8i_2 = v_{ab}$

De la fuente de corriente: $2 = i_2 - i_1$

$$i_1 = -6/13\,A$$
$$i_2 = 20/13\,A$$
$$v_{ab} = 160/13\,V$$

3.1. Ejemplos:
Fuentes dependientes e independientes.

Calcular v_x :



Malla 1: $4i_1 + 1(i_1 - i_2) + 10 + 2v_x = 0$

Malla 2: $2i_2 + 3i_2 + 1(i_2 - i_1) = 10$

Fuente dependiente: $v_x = -2i_2$

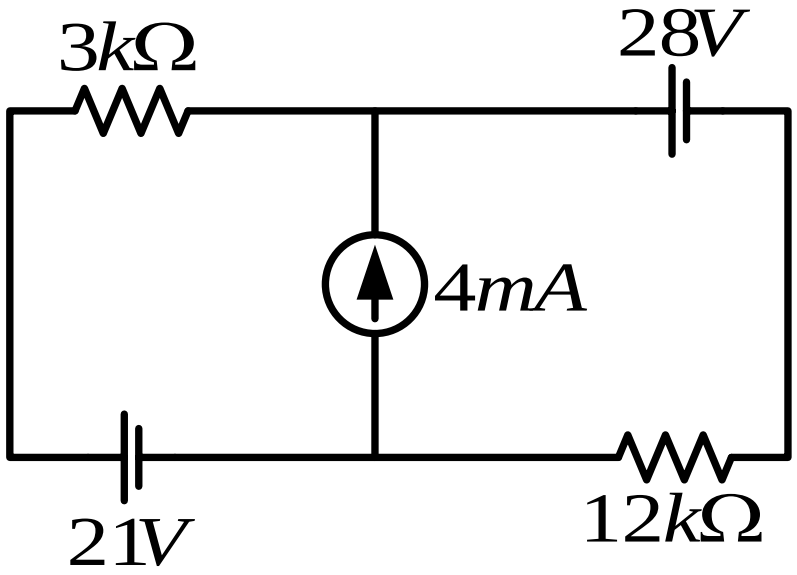
$$i_1 = -2/5\,A$$
$$i_2 = 8/5\,A$$
$$v_x = -16/5\,V$$

Método de mallas - Ejemplos

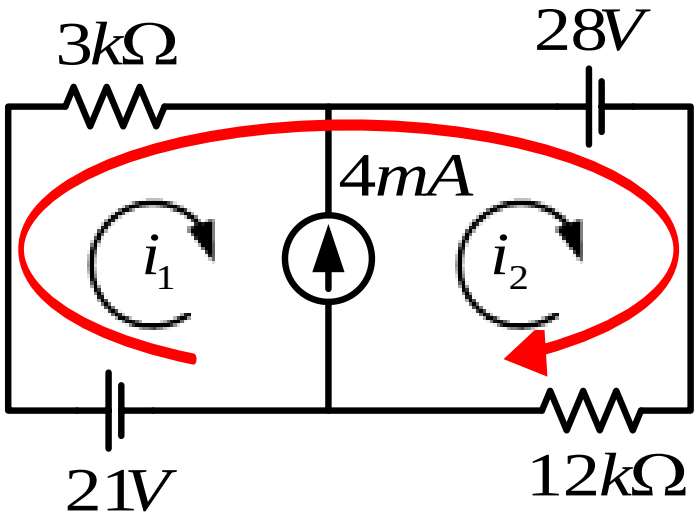
2.2. Supermalla

- Cuando hay **fuentes de corriente cuya rama pertenece a más de una malla**, entonces no se puede expresar la diferencia de potencial de dicha fuente en base a corriente (de malla) que la atraviesa →técnica de la **supermalla.**

- Ejemplo:



2.2. Supermalla

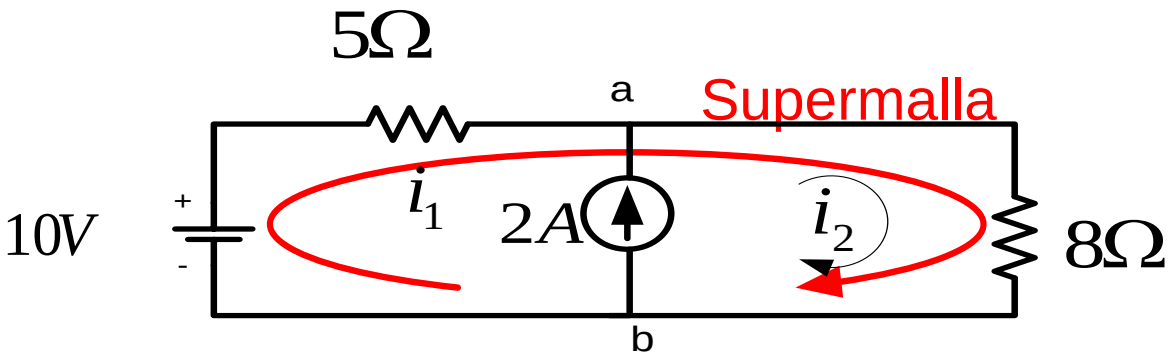


- Ecuación Supermalla: $3000\,i_1 + 28 + 12000\,i_2 - 21 = 0$
- Ecuación fuente corriente: $i_2 - i_1 = 0{,}004$

2 ecuaciones y 2 incógnitas → I_1= -3,6mA, I_2= 0,3mA

2.2. Supermalla:
Ejemplo.

Escribir el sistema de ecuaciones que permite encontrar v_{ab} :



- Ecuación Supermalla: $5i_1 + 8(i_1 + i_2) = 10$
- Ecuación malla: $i_2 = 2$
- Por último: $v_{ab} = 8(i_1 + i_2)$

3 ecuaciones y 3 incógnitas

4. Método de nodos vs método de mallas

- Un circuito complejo se puede analizar utilizando tanto la metodología de nodos como la de mallas.

- Existen casos donde **un método es preferible a otro**, dado que mediante el uso de uno de éstos el análisis será notablemente más sencillo que por el otro.

- **El método más apropiado** para el análisis de un circuito es el que **tiene asociado menos trabajo (menor número de ecuaciones).**

  - Método de los Nodos:

$$N_n = N_{nodos} - 1 - N_{fuentes\ de\ voltaje}$$

  - Método de las Mallas:

$$N_m = N_{mallas} - N_{fuentes\ de\ corriente}$$

4. Método de nodos vs método de mallas

- Los casos más sencillos de discriminación de métodos se describen en la siguiente tabla:

	Nodos	Mallas
Circuito con sólo fuentes de voltaje		✓
Circuito con sólo fuentes de corriente	✓	
Circuito con mayor # de mallas que nodos*	✓	
Circuito con mayor # de nodos* que mallas		✓
Resultados requeridos: Un conjunto de voltajes	✓	
Resultados requeridos: Un conjunto de corrientes		✓

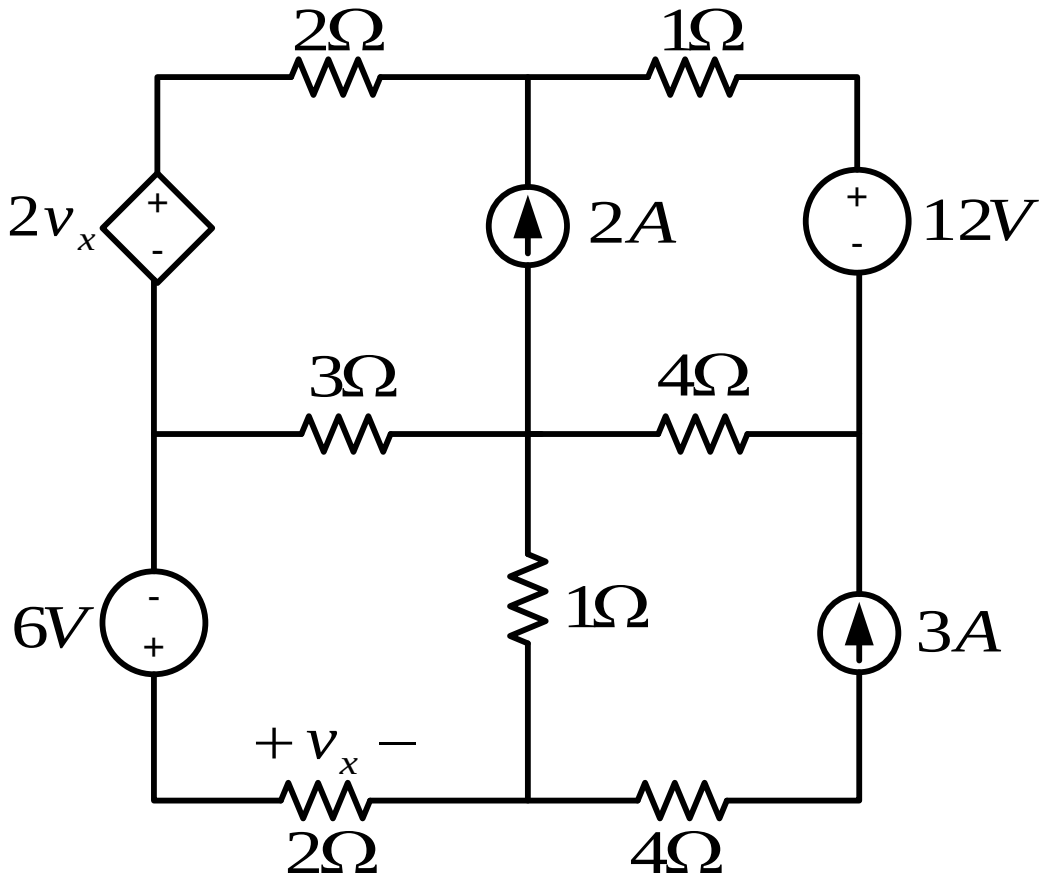
* Sin considerar nodo tierra

4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

En la figura, calcule la potencia entregada por la fuente de 12 V.

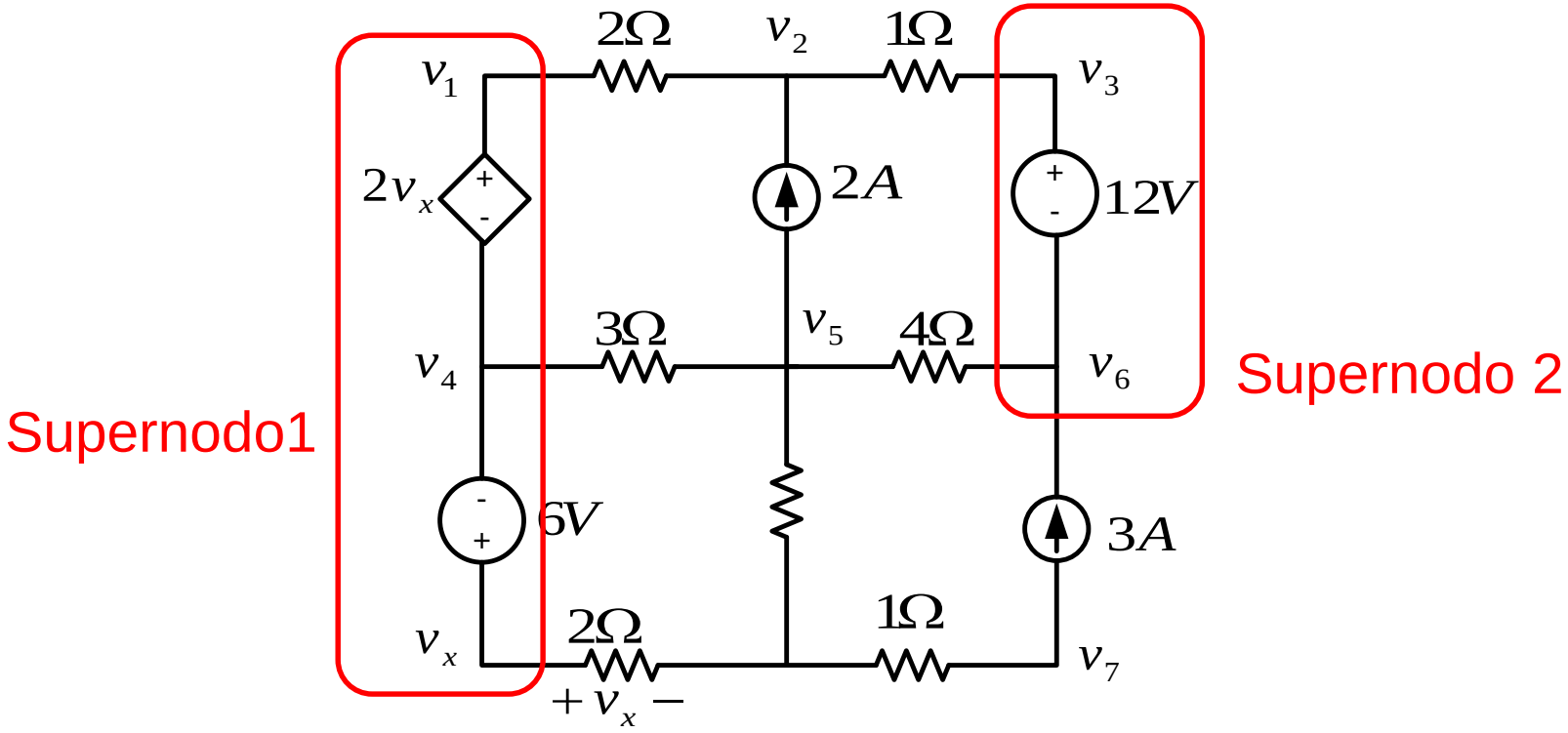
¿Nodos o mallas?



4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

- Si se aplicara el método de nodos quedaría:



- 2 ecuaciones de supernodo, 3 ecuaciones de nodos y 3 relaciones de las fuentes de voltaje → 8 ecuaciones para 8 incógnitas (v_1..v_7 y v_X)

4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

- Una vez obtenido el vector voltaje, se tendría que realizar:

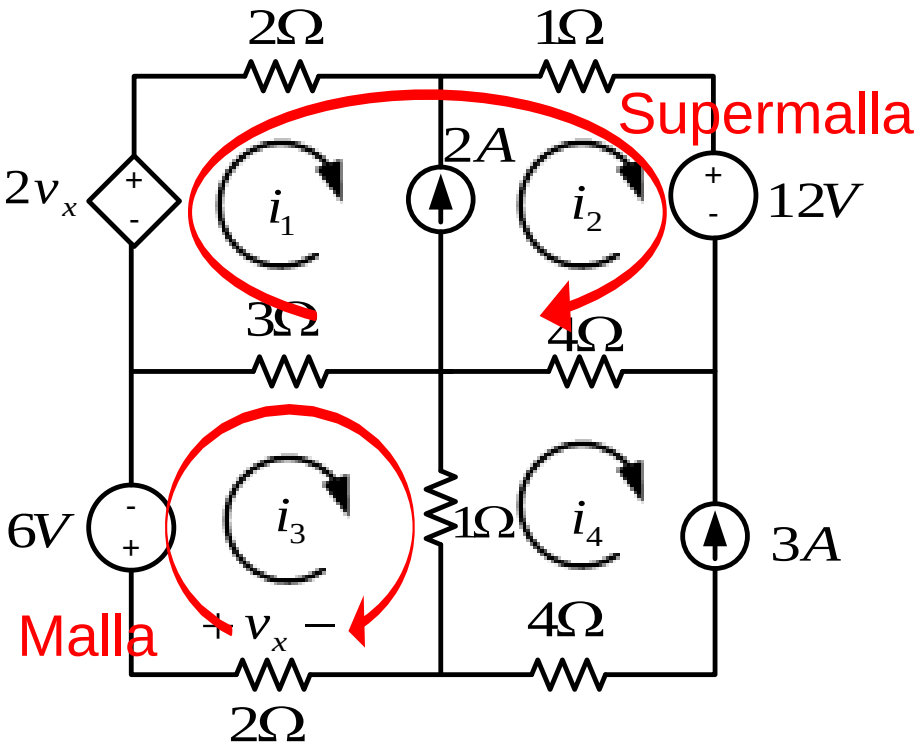
$$i_{1\Omega} = v_2 - v_3 \rightarrow P = 12 i_{1\Omega}$$

Con lo que se obtendría la potencia entregada o absorbida (signo) por la fuente.

4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

- Si se aplicara el método de mallas quedaría:



- 1 ecuación de supermalla, 1 ecuación de malla y 2 relaciones de las fuentes de corriente → 4 ecuaciones para 4 incógnitas (i_1..i_4)

4. Método de nodos vs mallas:

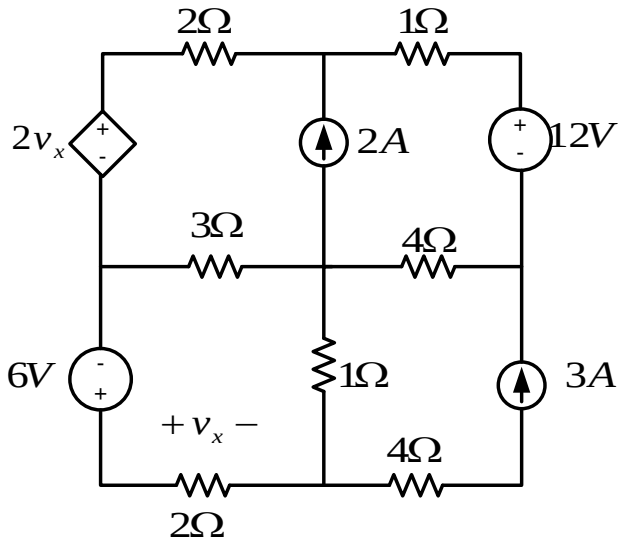
Aplicación.

- Una vez obtenido el vector corriente, se tendría que realizar:

$$P = 12i_2$$

Con lo que se obtendría la potencia entregada o absorbida (signo) por la fuente.

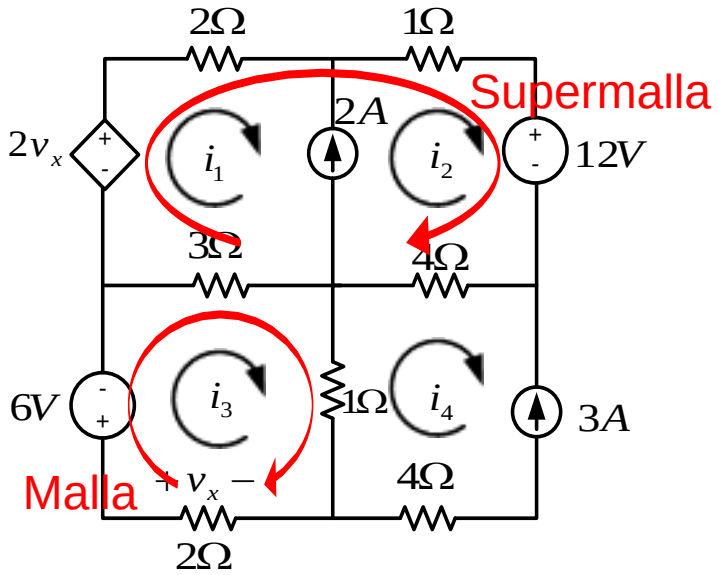
¡Es preferible utilizar mallas!

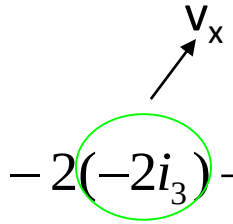


4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

Aplicando el método de mallas





Ec. Supermalla: $-2(-2i_3)+2i_1+i_2+12+4(i_2-i_4)+3(i_1-i_3)=0$

Ec. Malla: $6+3(i_3-i_1)+(i_3-i_4)+2i_3=0$

Ec. Fuente corriente 2A: $2=i_2-i_1$

Ec. Fuente corriente 3A: $i_4=-3$

4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

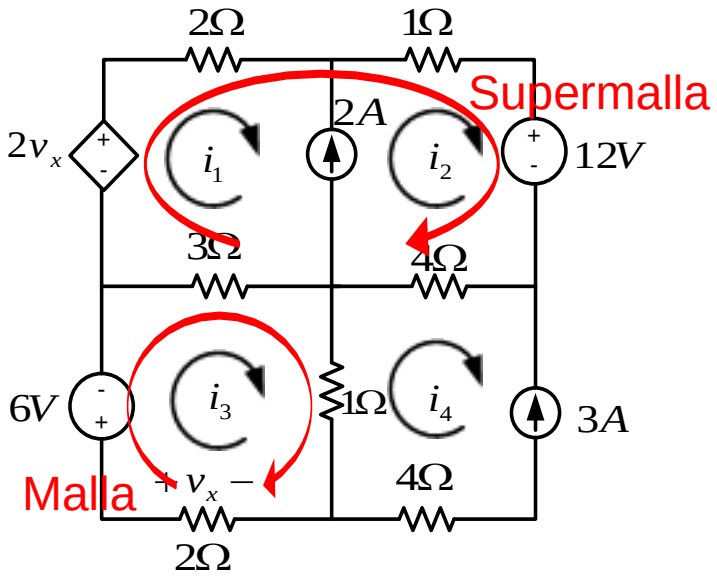
- Resolviendo:

$$-2(-2i_3)+2i_1+i_2+12+4(i_2-i_4)+3(i_1-i_3)=0$$

$$6+3(i_3-i_1)+(i_3-i_4)+2i_3=0$$

$$2=i_2-i_1$$

$$i_4=-3$$



- i_1 = - 65/21A
- i_2 = - 23/21A
- i_3 = - 64/21A
- i_4 = - 3A

P=12(-23/21) = -13,1 W

↓

entrega energía

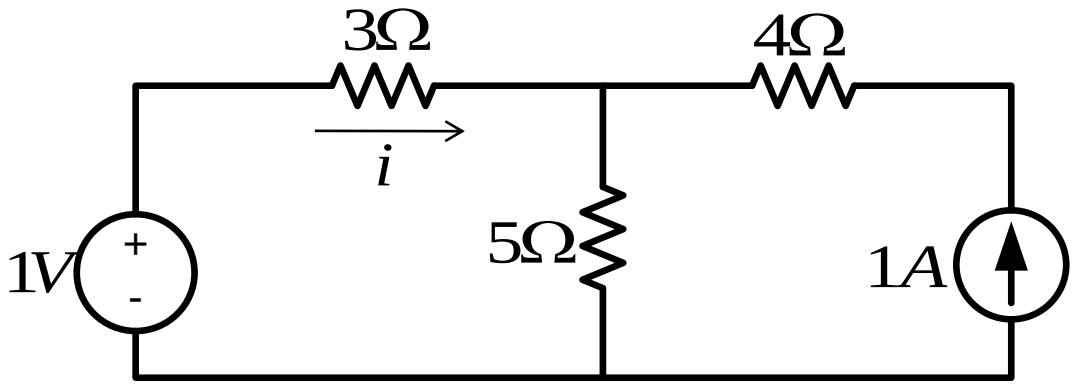
Método de nodos vs método de mallas

4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.

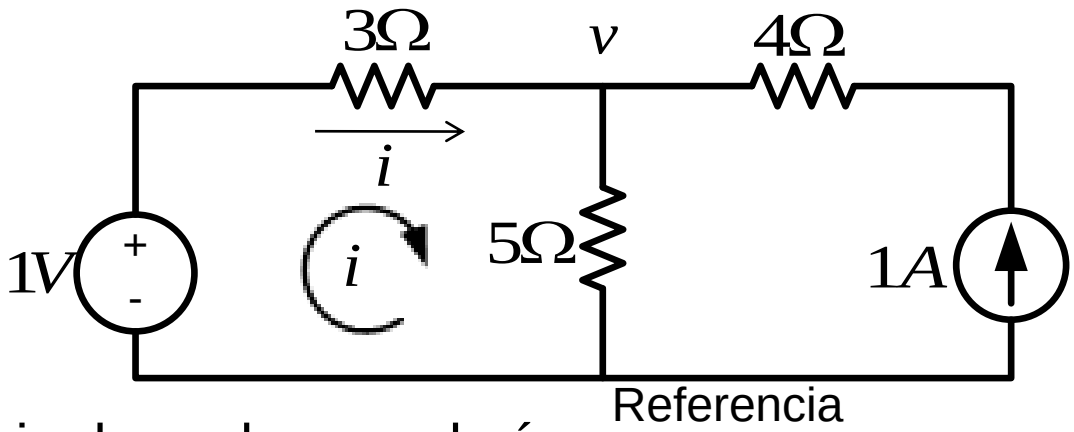
Encontrar la corriente i señalada en la figura:

¿Nodos o mallas?



4. Método de nodos vs mallas:

Aplicación.



- Por análisis de nodos quedaría:

$$\frac{1-v}{3}+1-\frac{v}{5}=0$$

$$i=\frac{1-v}{3}$$

- Por análisis de mallas:

$$1=3i+5(i+1)$$

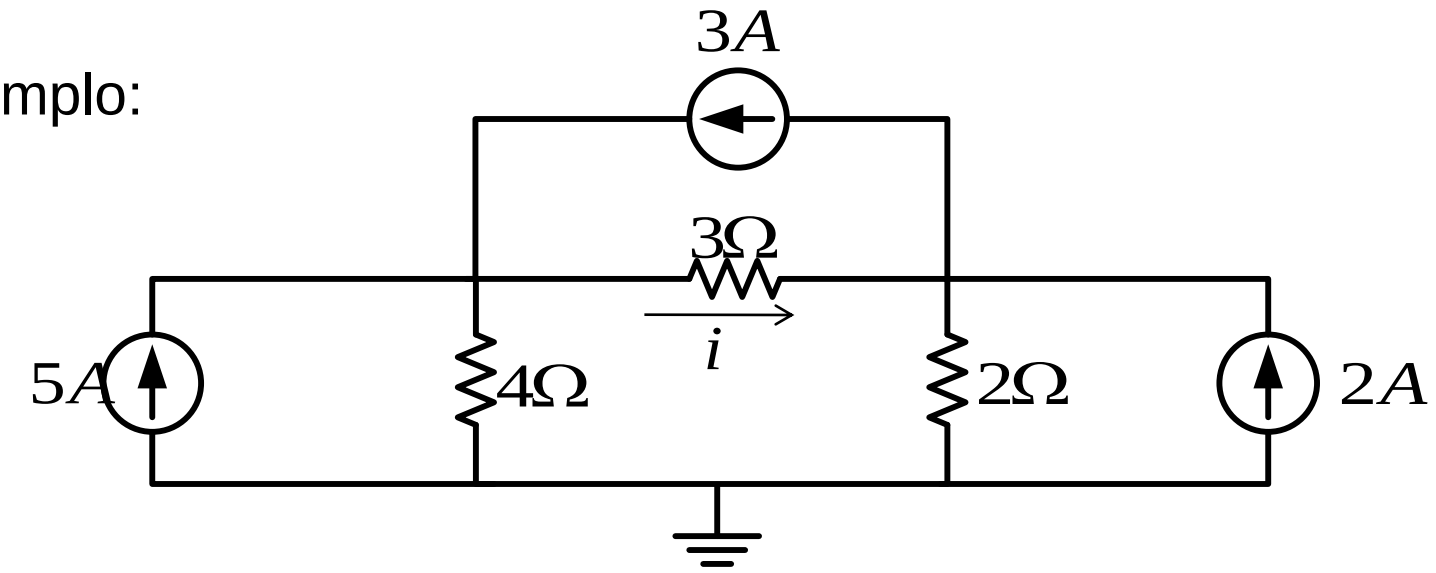
Si bien ambos sistemas tienen sólo una ecuación, es preferible mallas, ya que se obtiene directamente la corriente.

4. Método de nodos vs mallas:

Advertencia.

- Si bien la tabla es útil para discriminar entre las metodologías a utilizar para analizar un circuito, ésta **no se debe asumir como LEY**, sino que sólo como sugerencia.

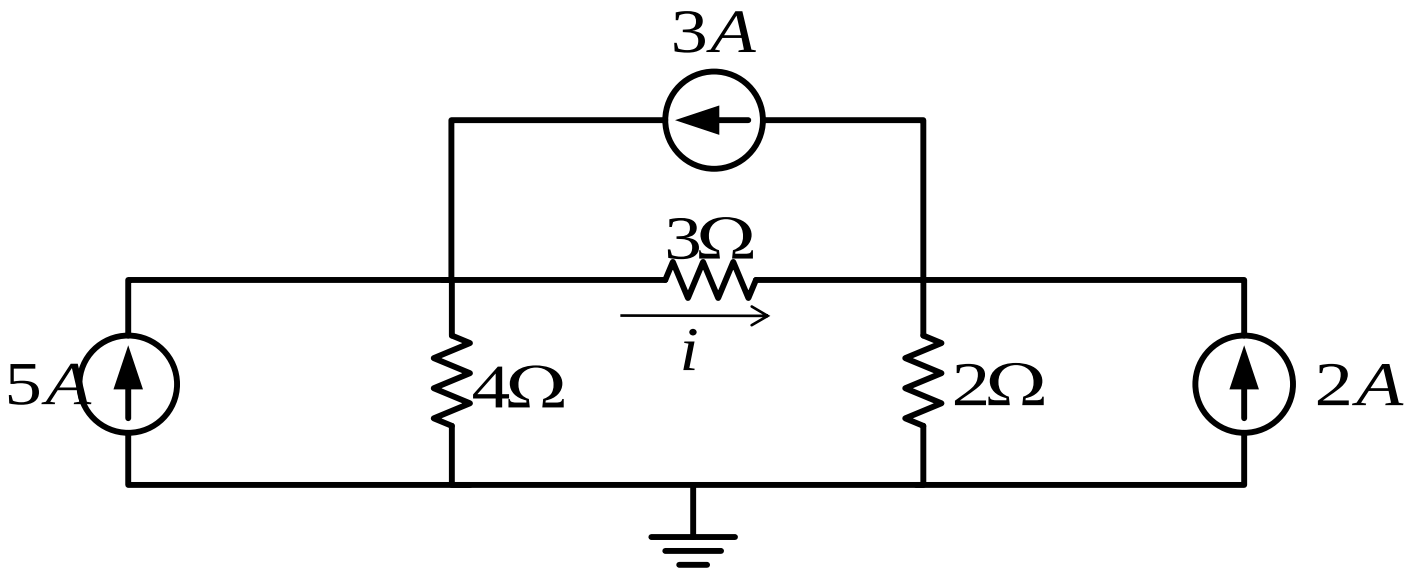
- Ejemplo:



Se quiere calcular la corriente i,¿Nodos o mallas?

4. Método de nodos vs mallas:

Advertencia.



- Al considerar la tabla presentada anteriormente se puede concluir que el método de nodos es el más apropiado, ya que:
  - El circuito posee **sólo fuentes independientes de corriente**.
  - Tiene **sólo dos nodos** (sin contar tierra) y hay cuatro mallas.

4. Método de nodos vs mallas:

Advertencia.

- Nodos es lo más apropiado.

FALSO!

- Si bien el circuito se puede resolver mediante la resolución de un **sistema de 2x2 ecuaciones de nodos**, el método de **mallas sugiere resolver sólo una ecuación**, ya que 3 de las 4 corrientes de mallas están dadas por las fuentes de corriente →el método de mallas es más apropiado.

