Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE2123 — Circuitos Eléctricos

Tarea 4

---

1. Instrucciones

1. Esta tarea puede ser entregada tanto en formato digital (PDF) como hecha a mano, según lo decida el alumno.
2. Su desarrollo debe ser claro y debidamente explicado. Resultados surgidos de la nada y sin la debida justificacion no otorgarán puntaje.

2. Problemas

Problema 1

Dada la siguiente función de transferencia $G(s)$, determine sus polos y ceros, la ganancia, sus asintotas y finalmente haga una gráfica aproximada de su diagrama de Bode.

$$G(s) = 100\frac{s^2 + 0{,}5s + 1}{s(s+1)(s+100)}$$

Respuesta

Para poder trabajar esta función, primero se normaliza para poder separarlas en sus diferentes factores importantes:

$$G\left(j\omega\right) = \frac{100}{1 \cdot 100} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{0{,}25}{1}\right) s + \frac{s^2}{1^2}}{s\left(\frac{s}{1} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)} = 1 \cdot \frac{s^2 + 0{,}5s + 1}{s\left(\frac{s}{1} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

Dado esto podemos concluir lo siguiente:

- Ganancia = 1
- Polos o ceros en el origen: 1 polo en el origen

- Polos o ceros reales: polos en $\omega = 1$ y $\omega = 100$
- Polos o ceros complejos conjugados: ceros en $\omega_n = 1$, con $\rho = 0{,}25$

Se procede a estudiar sus contribuciones particulares, notando que en el gráfico la linea negra punteada son las asintotas, y las lineas negras son su forma correcta :

1. Ganancia Constante

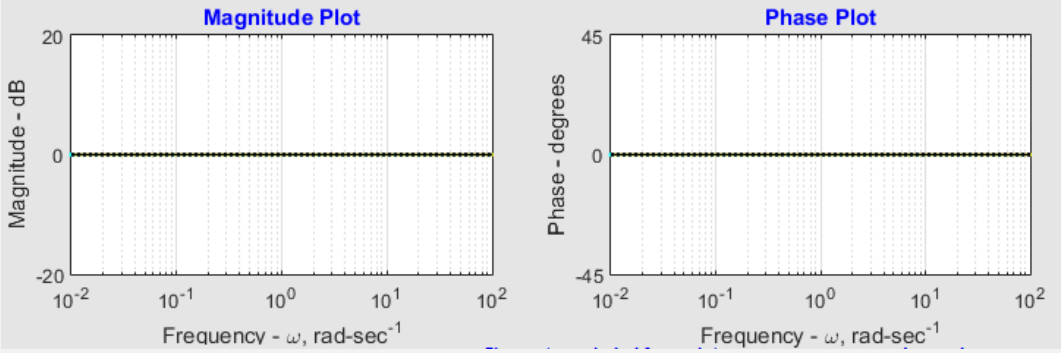


Figura 1: Diagrama de bode de ganancia constante

2. Polo en el origen

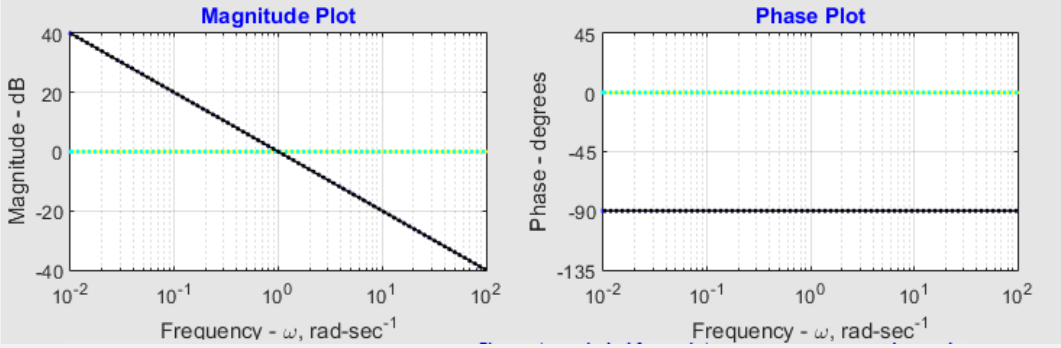
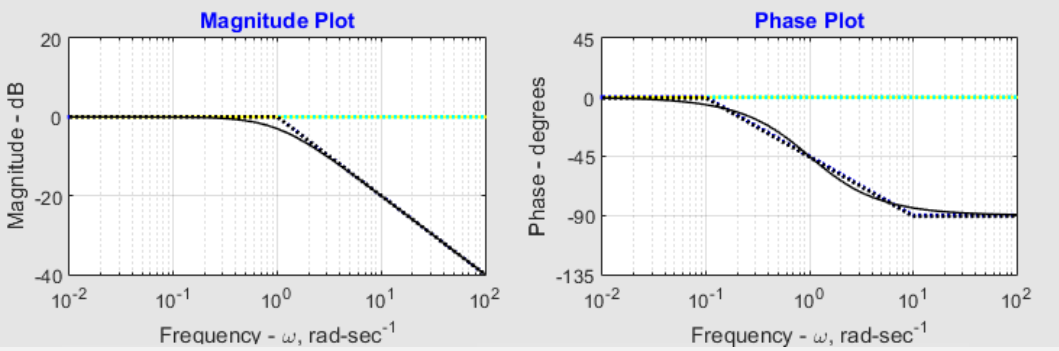
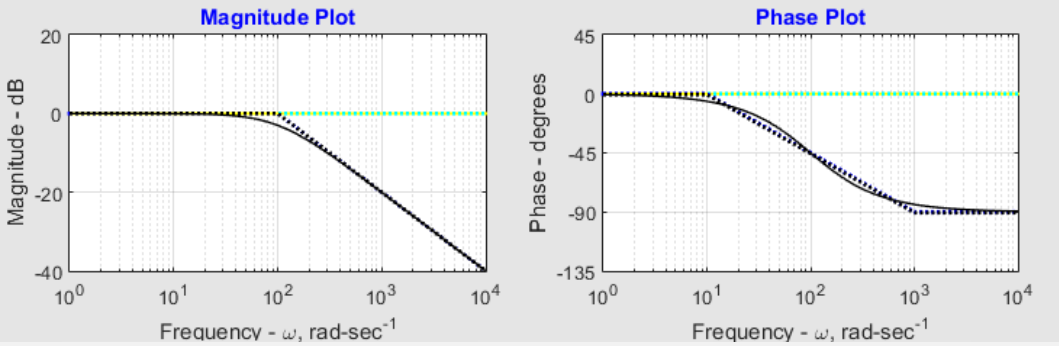


Figura 2: Diagrama de bode de polo en el origen

3. Polos Reales



(a) Diagrama de bode de polo real $\omega = 1$



(b) Diagrama de bode de polo real $\omega = 100$

Figura 3: Diagramas de bode de polos reales

4. Ceros Complejos Conjugados

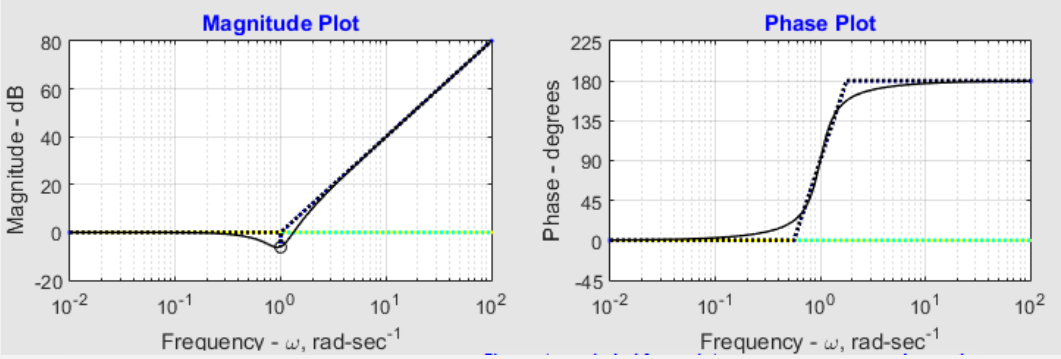


Figura 4: Diagrama de bode de cero complejo conjugado $\omega_n = 1$, con $\rho = 0{,}25$

Con estos gráficos se puede proceder a graficar el diagrama de bode de la función, entendiéndose como la suma de cada uno de los diagrama de bode anteriores:

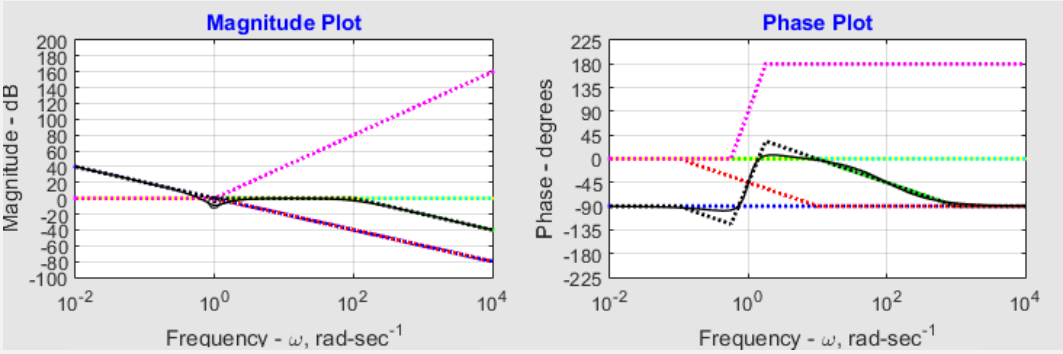


Figura 5: Diagrama de bode de $\frac{V_o}{V_i}$

Problema 2

Dado el siguiente circuito, encuentre la función de transferencia $\frac{V_o}{V_i}$ y posteriormente determine polos, ceros y grafique sus asintotas junto a su diagrama de bode. Los parámetros del sistema son $R = 10k\Omega$; $C = 10nF$. Puede aproximar cuando lo estime necesario y combeniente.

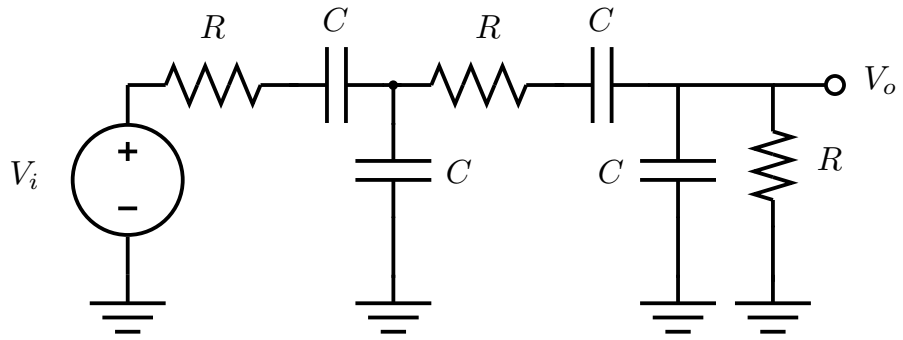


Figure 6: Circuito con distintos tipos de filtros

Respuesta

Se utiliza un voltaje auxiliar V_x para facilitar cálculos. Antes de calcular inmediatamente las impedancias equivalentes las vamos a dejar expresadas de la manera que sale en el dibujo :

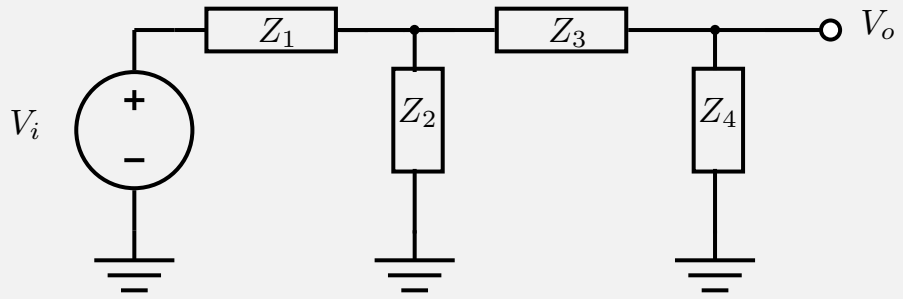


Figura 7: Circuito considerando solo impedancias

Por inspección tenemos:

$$V_o = V_x \cdot \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

$$V_x = V_i \cdot \frac{Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4)}{Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4) + Z_1}$$

$$\implies V_o = V_i \cdot \frac{Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4)}{Z_2 \parallel (Z_3 + Z_4) + Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

Considerando las siguientes impedancias:

- $Z_1 = R + \frac{1}{sC} = \frac{sRC+1}{sC}$
- $Z_2 = \frac{1}{sC}$
- $Z_3 = Z_1 = \frac{sRC+1}{sC}$
- $Z_4 = R \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R}{1+RCs}$

La función de transferencia queda:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{CRs(C(R+4)s+1)}{(C^2R^2s^2+3CRs+1)\left(s^2C^2R(R+4)+4sC(R+2)+3\right)}$$

Reemplazando valores:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{100000000s(2501s+25000000)}{(s^2+30000s+100000000)\left(2501s^2+100020000s+750000000000\right)}$$

Debido a los valores de la función objetivo, podemos aproximar $2501 \sim 2500$, luego:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{100000000s(s+10000)}{(s^2+30000s+100000000)\left(s^2+40008s+300000000\right)}$$

Usando $40000 \sim 40008$,aproximaciones sobre $\sqrt{5}$, y normalizando:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{100000000s(s+10000)}{(s^2+30000s+100000000)\left(s+10000\right)\left(s+30000\right)}$$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{10^8}{3\cdot 10^4\cdot 10^8}\cdot\frac{s}{\left(\frac{s}{26180}+1\right)\cdot\left(\frac{s}{3820}+1\right)\cdot\left(\frac{s}{3\cdot 10^4}+1\right)}}$$

Dado esto podemos concluir lo siguiente:

- Ganancia $= \frac{1}{3\cdot 10^4} = -89{,}5424dB \approx -90dB$
- Polos o ceros en el origen: 1 cero en el origen
- Polos o ceros reales: 3 polos en $\omega = 3\cdot 10^4$, $\omega = 26180$ y $\omega = 3820$
- Polos o ceros complejos conjugados: 2 polos, $\omega_n = 10^4$ con $\rho = 1{,}5$ y $\omega_n = \sqrt{3}\cdot 10^4 = 17320{,}5$ con $\rho = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}1547$

Se procede a estudiar sus contribuciones particulares, notando que en el gráfico la linea negra punteada son las asintotas, y las lineas negras son su forma correcta :

1. Ganancia Constante

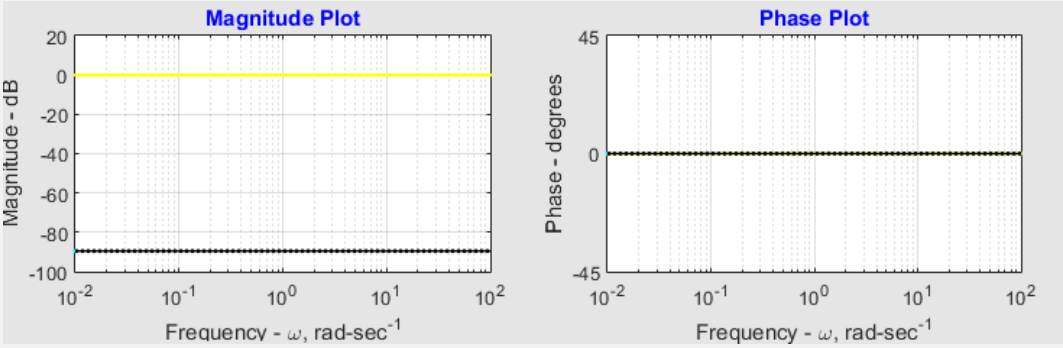


Figura 8: Diagrama de bode de ganancia constante

2. Cero en el origen

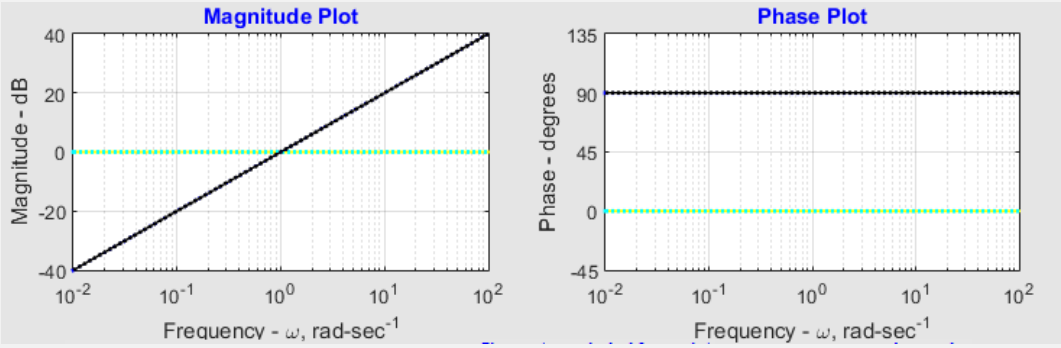
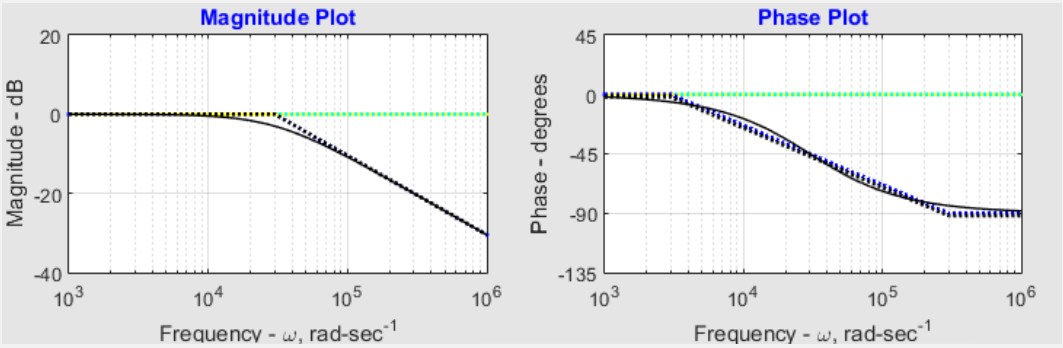
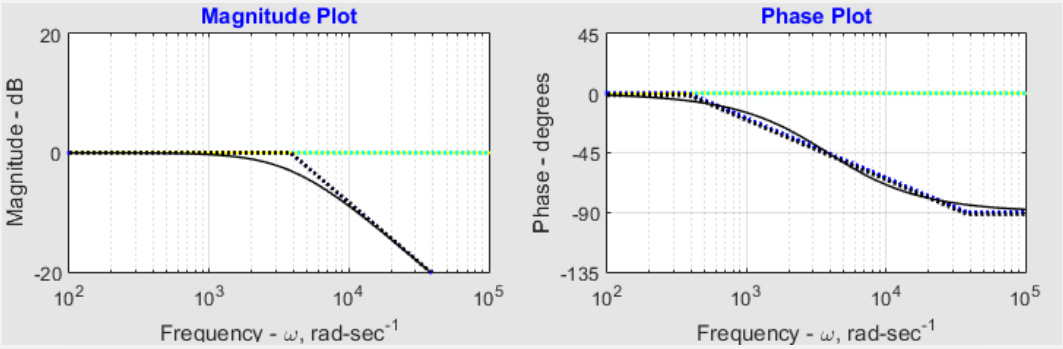


Figura 9: Diagrama de bode con cero en el origen

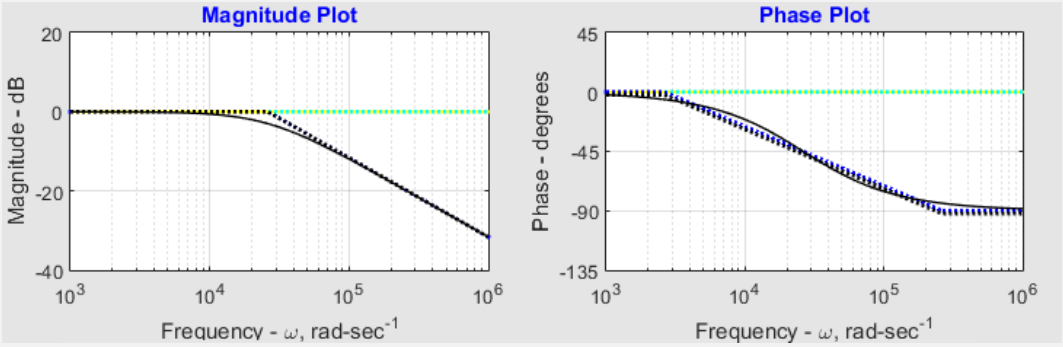
3. Polos Reales:



(a) Diagrama de bode con polo real $\omega = 3 \cdot 10^4$



(b) Diagrama de bode con polo real $\omega = 3820$



(c) Diagrama de bode con polo real $\omega = 26180$

Figura 10: Diagramas de bodes de polos reales

Con estos gráficos se puede proceder a graficar el diagrama de bode de la función, entendiéndose como la suma de cada uno de los diagrama de bode anteriores:

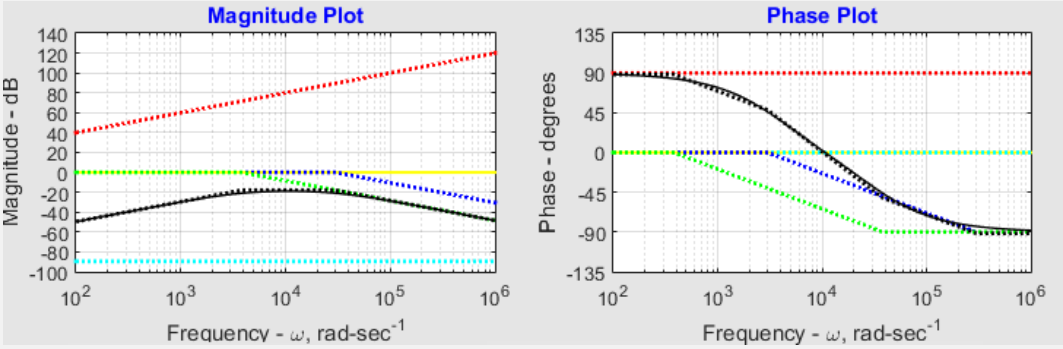


Figura 11: Diagrama de bode de $\frac{V_o}{V_i}$

Problema 3

En el circuito de la figura hay 2 Opams ideales. Encuentre una expresión para el voltaje de salida.

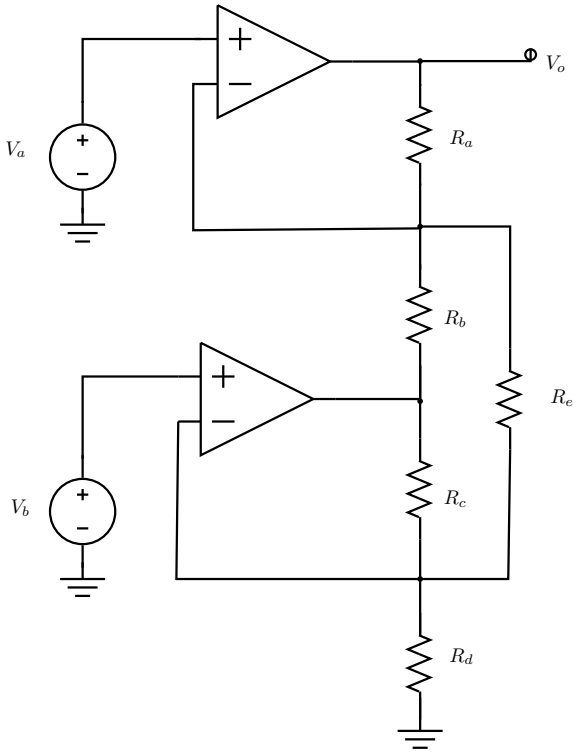


Figura 12: Circuito con Opams ideales

Respuesta

Identificamos dos nodos de interés, los cuales nos permitirán calcular lo pedido; estos son Nodo A y Nodo B. De igual manera nombramos a los voltajes de salida de los Opams, V_0 y V_1. Sabemos por condiciones de Opams ideales $V_+ = V_-$, luego el voltaje en los nodos A y B son V_a y V_b respectivamente, y ademas sabemos que no hay corriente entrando a los opams desde estos nodos (condición de Opams ideales).

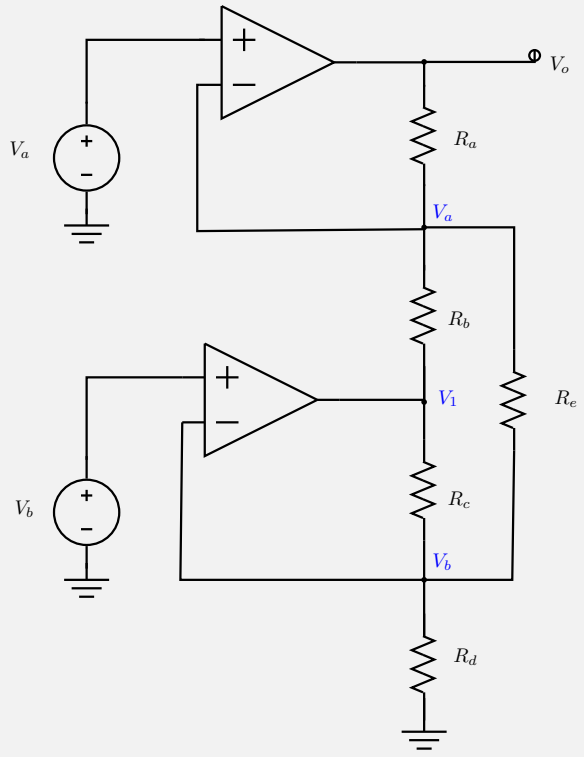


Figura 13: Circuito con Opams ideales

En los nodos seleccionados usamos LKC, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{V_a - V_0}{R_a} + \frac{V_a - V_1}{R_b} + \frac{V_b - V_a}{R_e} = 0$$
$$\frac{V_b}{R_d} + \frac{V_b - V_a}{R_e} + \frac{V_b - V_1}{R_c} = 0$$

Vemos que el único voltaje auxiliar (que no aparece originalmente en el problema) es V_1, luego despejamos la segunda ecuación con respecto a V_1 y luego reemplazamos en la primera ecuación, esto nos queda:

$$V_1 = \frac{-V_b\left(R_cR_e + R_cR_d + R_dR_e\right) + V_aR_cR_d}{R_dR_e}$$

Reemplazando y despejando V_0:

$$\boxed{V_0 = \frac{V_a\left(2R_bR_dR_e + R_c^2R_d + R_cR_dR_e\right) - V_b\left(R_c^2R_d - R_c^2R_e - R_bR_dR_e\right)}{R_bR_dR_e}}$$

Considerando

$$A = \frac{1}{R_b R_e}\left(2R_b R_e + R_c^2 + R_c R_e\right)$$
$$B = \frac{1}{R_b R_d R_e}\left(R_c^2 R_d + R_c^2 R_e + R_b R_d R_e\right)$$

Podemos escribir la expresión anterior de manera más ordenada:

$$V_0 = A \cdot V_a - B \cdot V_b$$

De donde podemos ver:

- Dado que los valores de A y B solo depende de resistencias, estos siempre serán mayores o iguales a cero (cero ssi todas las resistencias valen 0)
- La salida V_0 es una especie de diferenciador (ve la diferencia entre los 2 voltajes ingresados), la cual la compara variando los valores de A y B

Problema 4

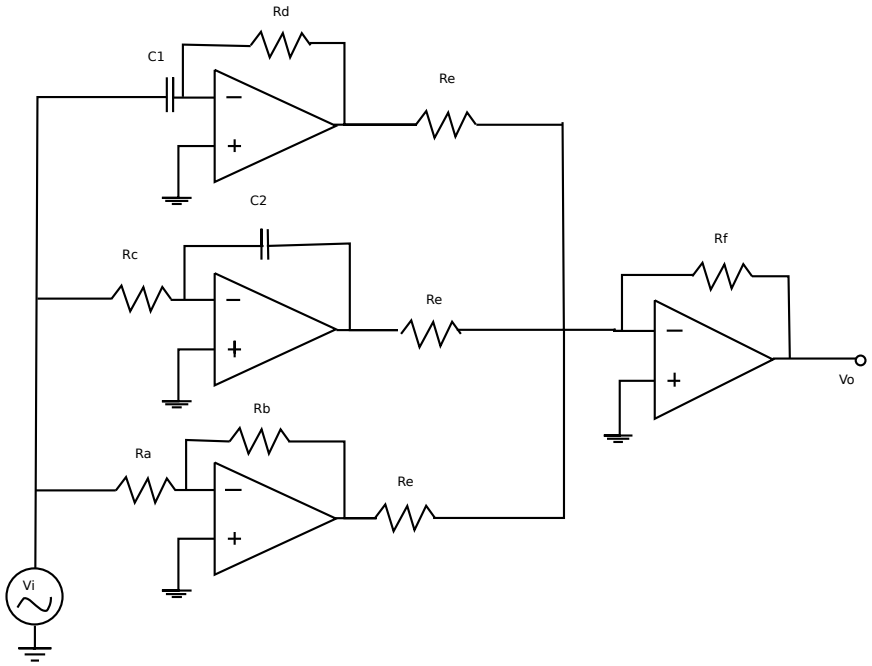


Figura 14: Sistema con control PID

Considerando la figura anterior:

- Nombre las diferentes configuraciones de Opams que es capaz de observar en el esquemático.
- Encuentre la función de transferencia del circuito.

Respuesta

1. Vemos que los Opams de la columna de la izquierda, de arriba hacia abajo, y el amplificador de más a la derecha son:
   a) Derivador (diapositiva N°28 clase Opams)
   b) Integrador (diapositiva N°27 clase Opams)
   c) Amplificador Inversor (diapositiva N°23 clase Opams)
   d) Sumador Inversor (diapositiva N°24 clase Opams)
2. Vemos que al existir Opams, podemos utilizar las funciones de transferencias particulares de cada una de estas configuraciones, de la manera en que aparecen en las diapositivas del curso. Siguiendo el mismo orden que como los nombramos más arriba:
   a) $V_{out1} = -sR_dC_1V_{in}$
   b) $V_{out2} = -\frac{1}{sR_cC_2}V_{in}$

c) $V_{out3} = -\frac{R_b}{R_a} V_{in}$

d) $V_{out} = -R_f \left(\frac{V_{out1}}{R_e} + \frac{V_{out2}}{R_e} + \frac{V_{out3}}{R_e} \right) = \frac{R_f}{R_e} V_{in} \left(sR_d C_1 + \frac{1}{sR_c C_2} + \frac{R_b}{R_a} \right)$

Luego, desarrollando la ultima expresión

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_f}{R_e R_a R_c C_2} \left(\frac{s^2 R_a R_d C_1 C_2 + s R_b R_c C_2 + R_a}{s} \right)$$

Problema 5

En el circuito se pueden observar 2 buffer ideales, y un opam ideal. Encuentra la función de transferencia $\frac{V_o}{V_i}$ del sistema. Trate de hacerlo considerando que el circuito se puede separa por bloques y las funciones de transferencias de estos bloques se pueden interrelacionar.

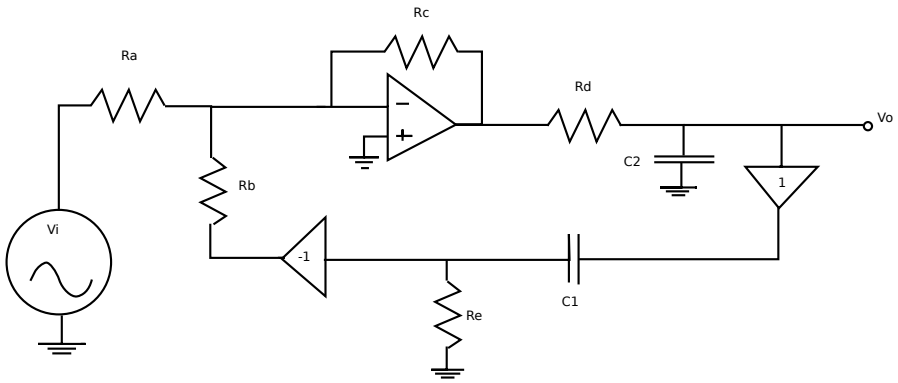


Figura 15: Circuito con retroalimentacion

Nota: Los buffer implementados en la figura son para exponer de manera más sencilla los ejercicios. El buffer ideal en la practica es una configuración de seguidor de voltaje. En el caso del buffer negativo, esta no existe. Una forma de lograr un efecto parecido, seria utilizando una configuración Amplificador Inversor con resistencias iguales. Para efectos del ejercicio, el efecto que se buscaba obtener se podria haber obtenido utilizando configuración de Restador en el nodo de interés.

Respuesta

Debido a que hay buffer ideales en el esquema, podemos separar el circuito en bloques de interés que permitan calcular de manera mas rápida el ejercicio. Localizando los voltajes de interés del circuito (los que permiten separar el circuito por partes) tenemos V_x, V_y, y V_z. Podemos sacar las siguientes identidades del circuito (y utilizando las configuraciones conocidas):

1. $V_z = V_x \cdot H_1$
2. $V_y = V_z \cdot H_2$
3. $V_x = -R_c \left(\frac{V_i}{R_a} - \frac{V_y}{R_b} \right)$

Reemplazando 3. en 1. luego 2. en esta expresión resultante y desarrollando podemos sacar la función de transferencia:

$$
\begin{aligned}
V_z &= V_x \cdot H_1 \\
\implies V_z &= -H_1 R_c \left(\frac{V_i}{R_a} - \frac{V_y}{R_b} \right) \\
\implies V_z &= -H_1 R_c \left(\frac{V_i}{R_a} - \frac{V_z H_2}{R_b} \right) \\
\implies V_z \left(1 - \frac{H_2}{R_b} \right) &= -V_i \cdot \frac{H_1 R_c}{R_a} \\
\implies \frac{V_z}{V_i} &= \frac{\frac{H_1 R_c}{R_a}}{\frac{H_2 - R_b}{R_b}} = \frac{H_1 R_b R_c}{R_a \left(H_2 - R_b \right)} \\
\implies \frac{V_z}{V_i} &= \frac{H_1 R_b R_c}{R_a \left(H_2 - R_b \right)}
\end{aligned}
$$

H_1 y H_2 son las funciones de transferencias de la configuración de filtros conocidos, a saber:

1. $H_1 = \frac{1}{1+sR_dC_2}$ (Configuración filtro Pasa Bajos - diapositiva N°52)
2. $H_2 = \frac{sR_eC_1}{1+sR_eC_1}$ (Configuración filtro Pasa Altos - diapositiva N°55)

Reemplazando estas expresiones en la función de transferencia y desarrollando:

$$
\frac{V_z}{V_i} = \frac{R_b R_c}{R_a R_d C_2 \left(1 - R_b \right)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{R_e C_1} \right)}{\left(s + \frac{1}{R_d C_2} \right) \left(s + \frac{R_b}{ReC_1 (R_b - 1)} \right)}
$$

Problema 6

En circuitos donde se utiliza el sonido como entrada a dispositivos, por lo general se utiliza un filtro para ruido no deseado (un pasa banda entre $20Hz - 20kHz$). Implemente este filtro especificando el valor de los componentes que utilizara en el caso de las resistencias y los capacitores. Considere que puede utilizar buffer ideales en la implementación de este filtro. A continuación, utilizando configuraciones de Opams ideales implemente una ganancia de 40 dB. Nota: Se pide que sea conciso con su diseño.

Bonus: Implemente el filtro que diseño es una simulación .ac de spice. Muestre el diagrama de bode resultante y su .ac.

Respuesta

De la diapositiva 57 de filtros vemos que un filtro pasa banda va a depender de 2 resistencias y 2 capacitores. Tomando arbitrariamente que las capacitancias sean las mismas y de $10nF$, el valor de las resistencias es:

$$20Hz = \frac{1}{10nF \cdot R_1} \Longrightarrow R_1 = 5M\Omega$$
$$20kHz = \frac{1}{10nF \cdot R_2} \Longrightarrow R_2 = 5k\Omega$$

La implementación de buffer ideales nos permite asegurarnos que las frecuencias de corte sean esas. Para sacar la ganancia, vemos que $40dB = 100$. Utilizando una configuración de amplificador inversor (también se puede utilizar configuración no inversora, para el caso del sonido no hay problema si hay ganancia negativa) queremos:

$$\left|\frac{Z_2}{Z_1}\right| = 100$$

Tomando Z_2 arbitrario de $1M\Omega$, $Z_1 = 10k\Omega$. Luego la estructura más fácil para implementar esta configuración es:

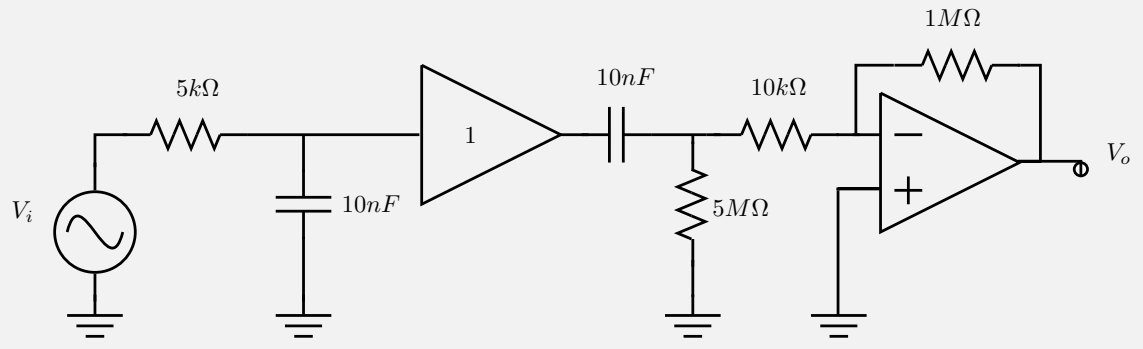


Figura 16: Configuración básica filtro pasa bandas con ganancia

Problema 7

El siguiente filtro se suele implementar en circuitos R/C comerciales. Suponiendo $L_1 = L_2$ y $C_1 = C_2 = C_3$, diga a que tipo de filtro corresponda. Saque la función de transferencia de este filtro, diga sus polos y ceros y dibuje un bode aproximado.

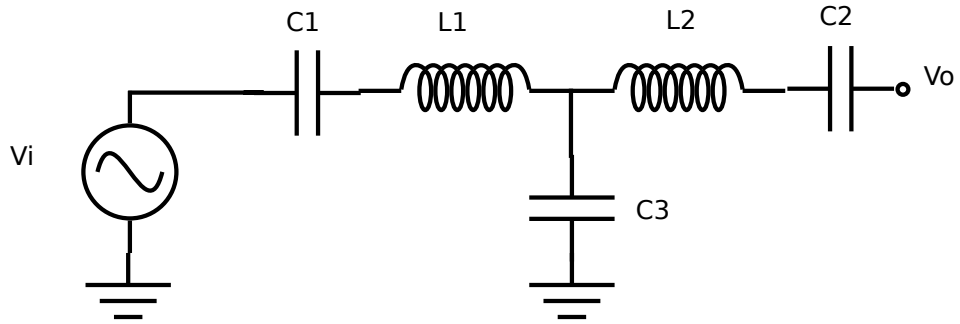


Figura 17: Filtro R/C Comercial

Respuesta

Primero notemos que en la rama de la derecha no hay flujo de corriente por que el nodo es flotante, luego considerando los bloques equivalentes de impedancia $C_1 + L_1 = Z_1$, $C_2 + L_2 = Z_2$ y $C_3 = Z_3$, la función de transferencia es

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{1}{2 + CLs^2}$$

Este es un filtro con dos polos complejos conjugados:

$$s_1 = j\sqrt{\frac{2}{CL}}$$
$$s_2 = -j\sqrt{\frac{2}{CL}}$$

Para graficar el diagrama de bode (y ver el tipo de filtro que es) volvemos a la función original y hacemos $s = \omega j$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2 + CL\left(\omega j\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{CL}{2}\omega^2}\right)$$

Haciendo una transformación $\sqrt{\frac{2}{CL}} = \omega_0$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

Cuando $\omega \ll \omega_0$, $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$, luego $Gain = \left|\frac{V_o}{V_i}(\omega j)\right| = \frac{1}{2} = -6dB$. Esto implica que para valores donde ω es mucho menor a la frecuencia de corte, la ganancia sera fija de $-6dB$. Para la fase: $phase = arg\left(\frac{V_0}{V_i}(\omega j)\right) = atan\left(\frac{0}{\frac{1}{2}}\right) = 0°$. Para valores mucho menores a la frecuencia de corte, la fase sera de 0°.

Cuando $\omega \gg \omega_0$, $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, luego $Gain = \left|\frac{V_o}{V_i}(\omega j)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2} \Longrightarrow$ $20log_{10}(Gain) = -40log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Notemos que esto implica que para ω mucho mayores a la frecuencia de corte, la ganancia disminuye a 40 decibeles por década. Para la fase: $phase = arg\left(\frac{V_0}{V_i}(\omega j)\right) = atan\left(\frac{0}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -180°$. (Notemos aquí que por lo general la calculadora tirara cero, pero pasa por que la calculadora no tiene en cuenta los símbolos de los argumentos. Para arreglar esto se tiene que utilizar la función atan2 que es la función arcotangente de 2 argumentos, que permite considerar los símbolos de ss componentes).

Cuando $\omega = \omega_0$. es inmediato que $Gain = \left|\frac{V_o}{V_i}(\omega j)\right| = \infty$.
La gráfica tiene que ser algo parecida a la figura entregada por matlab:

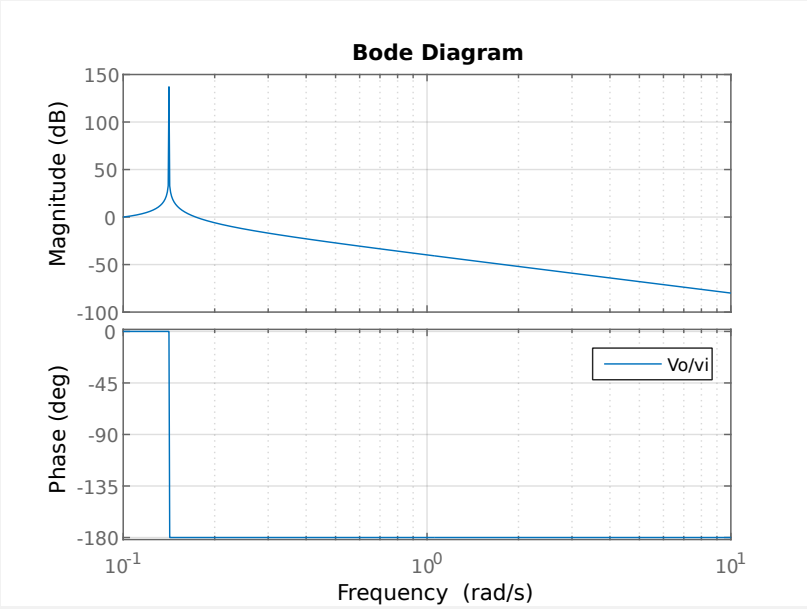


Figura 18: Diagrama de bode con complejos sub-amortiguados

Podemos ver que el filtro se comporta como una especie de pasa banda, con una ganancia infinita en la frecuencia de corte y un decaimiento muy rápido después de ella.

La función de transferencia también se puede sacar haciendo transformación $Y - \Delta$, y el resultado es el mismo.

Problema 8

Para el siguiente circuito se pide encontrar el valor de la magnitud y el ángulo de la corriente I_3. Luego calcule la potencia disipada por la parte real de la impedancia Z. Los parámetros del circuito son; $R_a = 1{,}5\Omega,\ R_b = 300\Omega,\ R_c = 100\Omega,\ L_1 = j4{,}5\Omega,\ Z = 2{,}5 - 0{,}5j\Omega$.

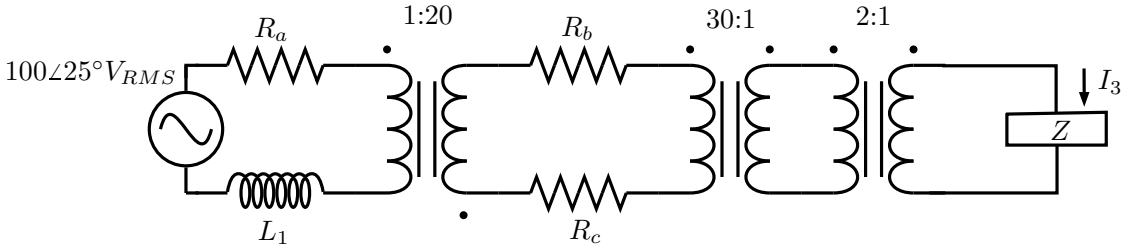


Figura 19: Circuito con transformador ideales

Respuesta

La solución del problema va orientada a reducir el circuito de transformadores por medio de las razones dadas, para que de esta manera se obtenga la resistencia total vista desde la fuente y de esta manera, obtener la corriente I_3 que pasa por la impedancia referenciada a la fuente.
Primero reducimos el transformador del lado de la carga considerando que las razones son n_n incrementando de izquierda a derecha.=

$$Z_3^4 = \left(\frac{n_5}{n_6}\right)^2 \cdot Z = 4 \cdot (2{,}5 - 0{,}5j[\Omega]) =$$

$$\implies Z_2^3 = (R_b + R_c) + \left(\frac{n_3}{n_4}\right)^2 \cdot Z_3^4 = 90 \cdot (10 - 2j\,[\Omega]) + 400\,[\Omega]$$

$$= 1300 - 180j\,[\Omega]$$

$$\implies Z_1^2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot Z_2^3 + (R_a + L_1) = \frac{1}{400} \cdot (1300 - 180j\,[\Omega]) + (1{,}5 + 4{,}5j\,[\Omega])$$

$$= 4{,}75 + 4{,}05\,[\Omega]$$

$$Z_3^4 = 10 - 2j\,[\Omega]$$
$$Z_2^3 = 1300 - 180j\,[\Omega]$$
$$Z_1^2 = 4{,}75 + 4{,}05\,[\Omega]$$

Luego la corriente en la primera rama es:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1^2} = \frac{(100\angle 25°)}{(4{,}75 + 4{,}05\,[\Omega])} = 16{,}02\angle 65{,}452°$$

Refiriendo esta corriente para la rama de la carga:

$$I_3 = -I_1 \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{n_5}{n_6} = -\left(16{,}02\angle 65{,}452^\circ\right) \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{30}{1} \cdot \frac{2}{1} = 48{,}06\angle -114{,}55^\circ$$

Con esto podemos calcular la potencia disipada por Z:

$$P_{Re(Z)} = |I_3|^2 \cdot Re(Z) = 5774{,}41W$$

Problema 9

El siguiente circuito esta compuesto por 2 transformadores ideales, en los cuales se indica la relación de vueltas que existen entre las bobinas que lo componen. Calcule el fasor de corriente $\dot{I}_s$ y la potencia promedio que se disipan en las resistencias $R_1 = 100\Omega$ y $R_2 = \frac{10}{3}\Omega$. Los parámetros del circuito son: $R_a = 5\Omega,\ R_b = 60\Omega,\ R_c = 150\Omega,\ L_a = j5\Omega,\ L_b = j18\Omega,\ C_a = -j2\Omega,\ V_i = 50 < 0°,\ I_i = 10 < 0°$.

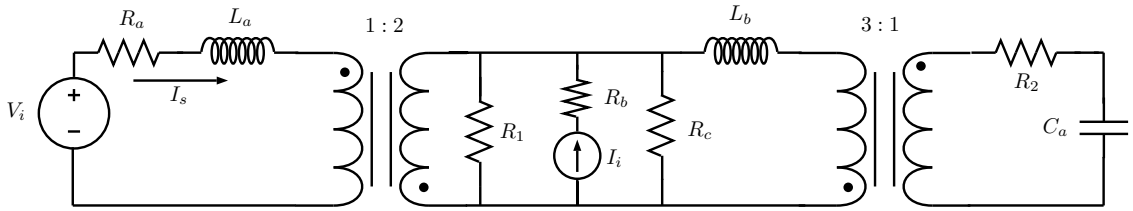


Figura 20: Circuito con transformador ideales

Respuesta

Como la fuente de corriente independiente se encuentra en el circuito central, se pasan todos las otras ramas referidas a la central referida a esta:

$$V_2 = -\frac{n_2}{n_1} \cdot V_1 = 100 < 180°$$

$$Z_2^1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot (R_a + L_a) = 20 + 20j\,[\Omega]$$
$$Z_2^3 = \frac{n_3}{n_4} \cdot (R_2 + C_a) = 30 - 18j\,[\Omega]$$

Del circuito equivalente, las reactancias se anulan y las resistencias se juntan, por lo que queda el siguiente circuito equivalente:

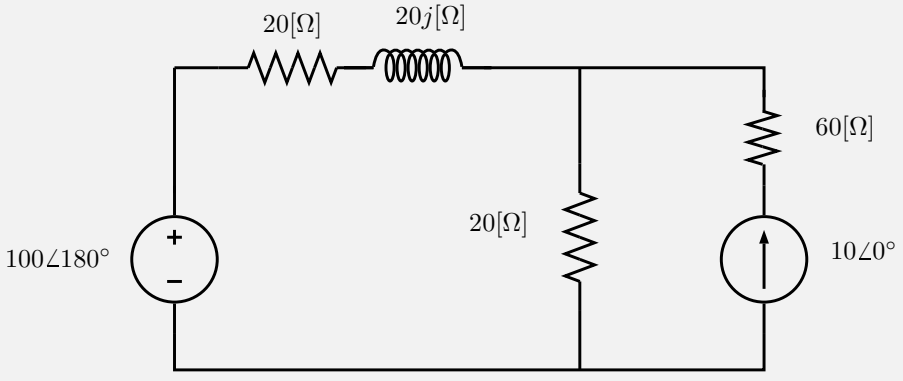


Figura 21: Circuito equivalente

Para determinar el fasor de corriente $\dot{I}_s$ usamos el teorema de superposición, por lo que primero apagamos la fuente de corriente para obtener $\dot{I}_s^v$, y luego apagamos la fuente de voltaje para obtener $\dot{I}_s^i$ con los que nos queda:

$$\dot{I}_s = \dot{I}_s^v + \dot{I}_s^i$$

Recordando que apagar una fuente de corriente es un circuito abierto:

$$\dot{I}_s^v = \frac{100 < 180^\circ}{40 + 20j\,[\Omega]} = 2{,}236 < 153{,}43^\circ$$

Lo mismo para el caso de la fuente de voltaje, recordando que apagar una fuente de voltaje es un corto circuito:

$$I_s^i = -\frac{20\Omega \cdot 10 < 0^\circ A}{40 + 20j\,[\Omega]} = 4{,}42 < 153{,}49^\circ$$

Luego

$$\dot{I}_s = \dot{I}_s^v + \dot{I}_s^i = 6{,}708 < 153{,}43^\circ$$

Habiendo calculado esto podemos calcular el voltaje en R_1(notemos que la resistencia de 20Ω en la resistencia equivalente paralela de otras 3 resistencias las cuales comparten voltaje, por lo que calcular el voltaje en esta resistencia es equivalente a calcular el voltaje en cualquiera de las otras 3 y en particular, R_1):

$$\begin{aligned} V_{R_1} &= V_2 - I_s \cdot R_s = 100 < 180^\circ[V] - (6{,}708 < 153{,}43^\circ[A]) \cdot (20 + 20j\,[\Omega]) \\ &= 99{,}9893 \angle 36{,}862^\circ[V] \end{aligned}$$

Luego la potencia disipada por esta resistencia es

$$P_{R_1} = \frac{|V_{R_1}|^2}{R_1} = 99{,}9786[W]$$

Para el caso de la carga R_2, la potencia se puede calcular directamente como:

$$P_{R_2} = Re\left(\frac{\left|\frac{99{,}9893 < 36{,}862[V]}{30\Omega} \cdot (30 - 18j\,[\Omega])\right|^2}{30 - 18j\,[\Omega]}\right) = 388{,}647[W]$$

Problema 10

- Determinar los parámetros del tetrapolo de admitancia (Y) de la siguiente red de dos puertos. Los parámetros de la red son $R_a = 10\Omega$, $R_b = 100\Omega$, $R_c = 300\Omega$, $R_d = 50\Omega$.

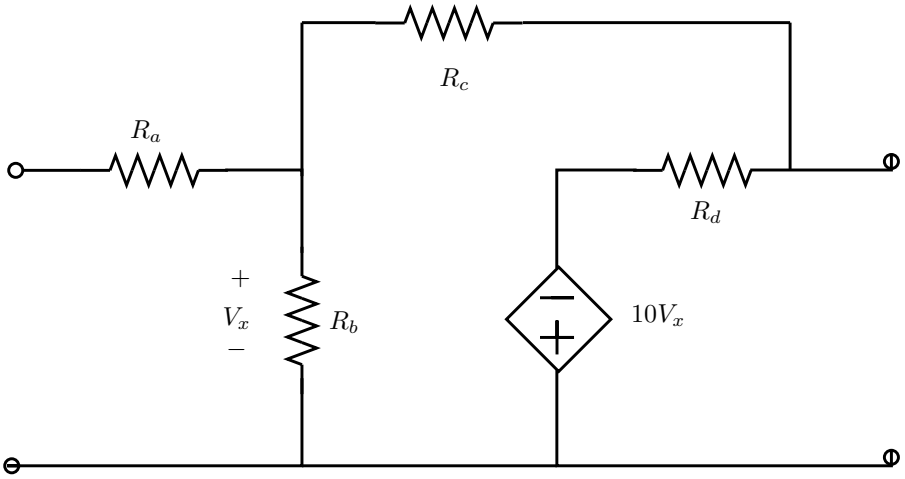


Figura 22: Red de dos puertos (cuadripolo)

- Si cuatro redes de dos puertos idénticas a la anterior se conectaran primero en serie y luego en cascada:
  1. Muestre un dibujo de la interconexion que se establece en cada caso.
  2. Explique breve y claramente cómo obtendría los parámetros impedancias de estas interconexiones.

Respuesta

a. Los parámetros de admitancia corresponden a las ecuaciones:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

Primero se considerará el siguiente circuito para el cálculo de y_{11} y de y_{21}(se aplica una corriente de entrada I_1, y se hace V_2=0):

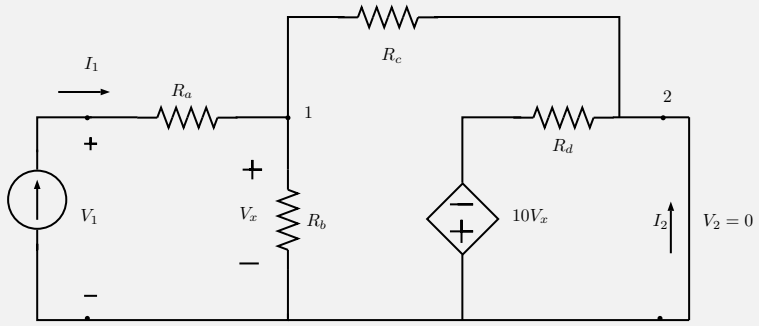


Figura 23: Red de dos puertos (cuadripolo)

De aquí podemos ver

$$I_1 = \frac{V_1}{R_a + R_b \parallel R_c}$$
$$\implies \frac{I_1}{V_1} = y_{11} = \frac{1}{85} = 0{,}011765\Omega^{-1}$$

Por su parte, la corriente I_2 en la malla separable de la derecha es:

$$I_2 = \frac{10V_x}{50}$$

Y V_x en la malla de la izquierda:

$$V_x = 75 \cdot I_1 = 0{,}8824V_1$$

Reemplazando

$$I_2 = \frac{1}{5} \cdot 0{,}8824V_1$$
$$\implies \frac{I_2}{V_1} = y_{21} = 0{,}17648\Omega^{-1}$$

Para el caso de y_{12} y y_{22} se considera el siguiente circuito (Se aplica corriente en la salida igual a I_2 y se cortocircuita la entrada con $V_1 = 0$):

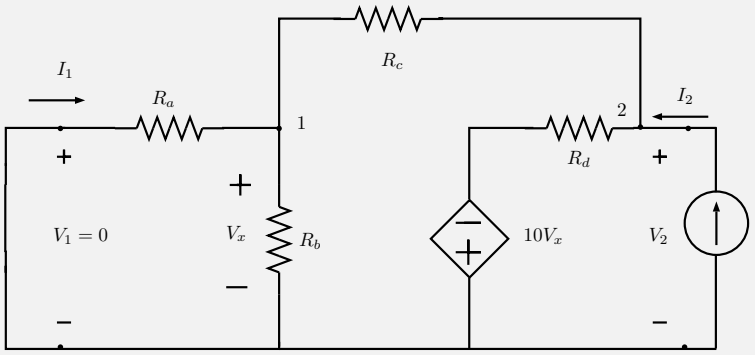


Figura 24: Red de dos puertos (cuadripolo)

De la malla de la izquierda

$$V_x = -10I_1$$

En el nodo 1:

$$I_1 = \frac{V_x}{R_b} + \frac{V_x - V_2}{R_c} = \frac{4}{300}V_x - \frac{1}{300}V_2 = -0{,}1333I_1 - 0{,}00333V_2$$
$$\implies 1{,}1333 \cdot I_1 = -0,00333V_2$$
$$\implies \frac{I_1}{V_2} = y_{12} = -0{,}00294\Omega^{-1}$$

Como $V_x = -10I_1$ y $I_1 = -0{,}00294V_2$

$$V_x = 0{,}0294V_2$$

En el nodo 2:

$$I_2 = \frac{V_2 + 10V_x}{R_d} + \frac{V_2 - V_x}{R_c} = \frac{7}{300}V_2 + \frac{59}{300}V_x$$
$$\implies I_2 = \frac{7}{300}V_2 + \frac{59}{300} \cdot 0{,}0294V_2 = (0{,}02333 + 0{,}00582)\, V_2$$
$$\implies \frac{I_2}{V_2} = y_{22} = 0{,}02911\Omega^{-1}$$

Finalmente:

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}011765 & -0{,}00294 \\ 0{,}17648 & 0{,}02911 \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

b.

1. Para el caso en serie:

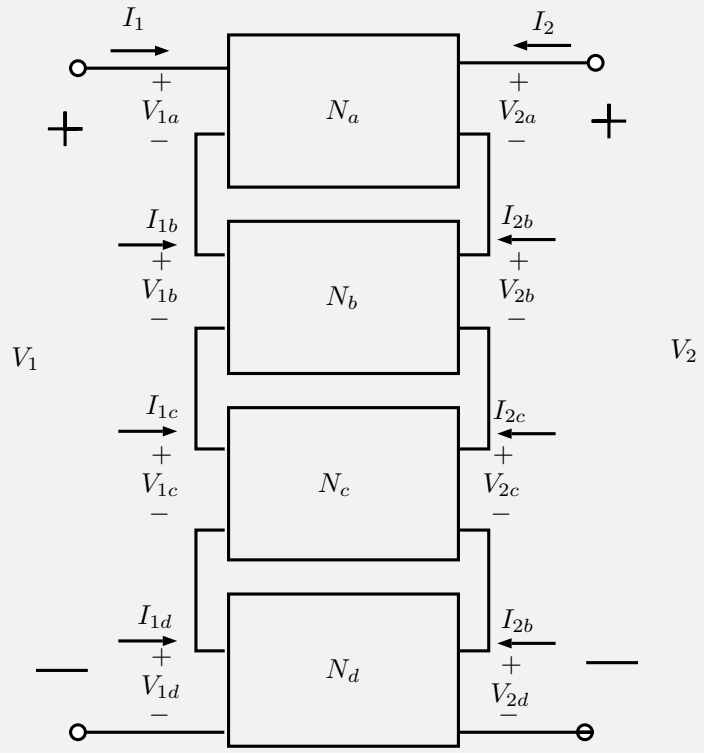


Figura 25: Red de dos puertos en serie

Para el caso en cascada:

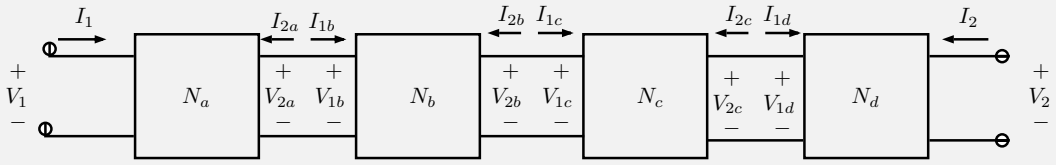


Figura 26: Red de dos puertos en cascada

2. En el caso en serie: Dado que se conocen los parámetros de admitancia de cada red, se obtienen los correspondientes parámetros de impedancia, a través de la matriz inversa de la matriz de admitancia, y luego se suman las cuatro matrices, uno a uno los términos, para obtener la matriz de impedancia total.
   En el caso de conexión en cascada: partiendo de la matriz de admitancia que se conoce de cada red, se pasan a la matriz T (a través de la relación entre la matriz de admitancia y la matriz de transmisión); luego, se multiplican las cuatro matrices T, para obtener la matriz T completa, y finalmente esta última se pasa a matriz impedancia (que sería de la conexión total).