LEYES DE KIRCHHOFF

Introducción

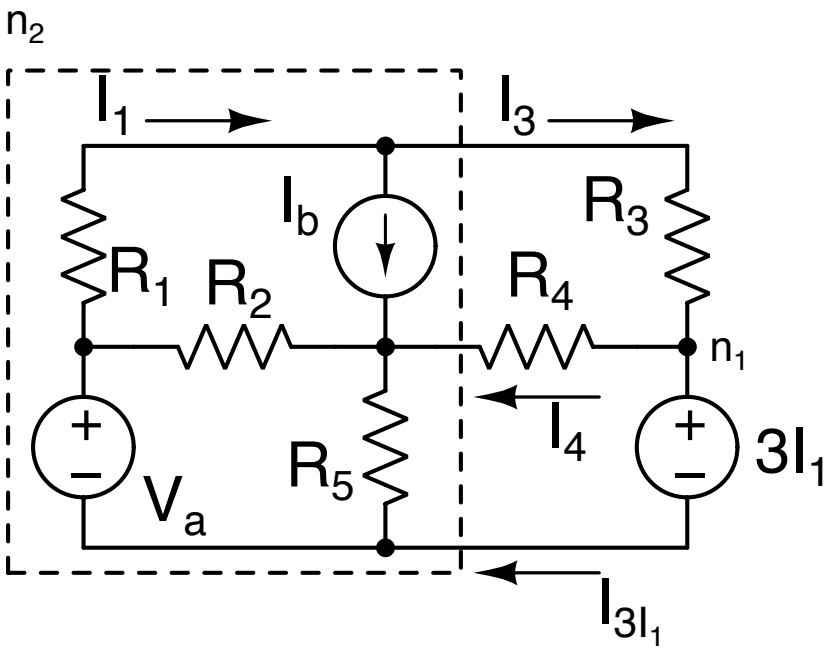
En esta clase veremos nuestras primeras herramientas de "análisis" (en realidad de resolución) de circuitos: las *leyes de Kirchhoff*. Con el uso de estas leyes ya es posible determinar todas las ecuaciones necesarias de un circuito para luego despejar las variables desconocidas. También estudiaremos el concepto de *resistencia equivalente* (conexión serie, paralelo y delta-estrella) y circuitos simples tales como el *divisor de voltaje* resistivo y el *divisor de corriente* resistivo. Estos circuitos son particularmente útiles para el análisis inteligente y de baja entropía de circuitos.

Leyes de Kirchhoff

- Las *leyes circuitales de Kirchhoff* (1845) consisten en un par de leyes que establecen relaciones entre las diferencias de voltaje (ley de voltajes de Kirchhoff, o KVL) y entre las corrientes de ramas (ley de corrientes de Kirchhoff, o KCL) de un circuito.
  - Estas leyes pueden ser entendidas como corolarios de las ecuaciones de Maxwell.
  - Sólo funcionan en circuitos de parámetros concentrados (como los que estudiamos nosotros!). Es decir, funcionan en circuitos donde las longitudes de onda de las señales son mucho mayores que el tamaño de los circuitos.
  - No teman! Estas herramientas también puede ser utilizadas en circuitos que no son de parámetros concentrados.

Ley de corrientes de Kirchhoff (KCL)

- KCL establece que la suma de las corrientes que entran a un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.



$$n_1 \quad : \quad I_3 = I_4 + I_{3I_1}$$

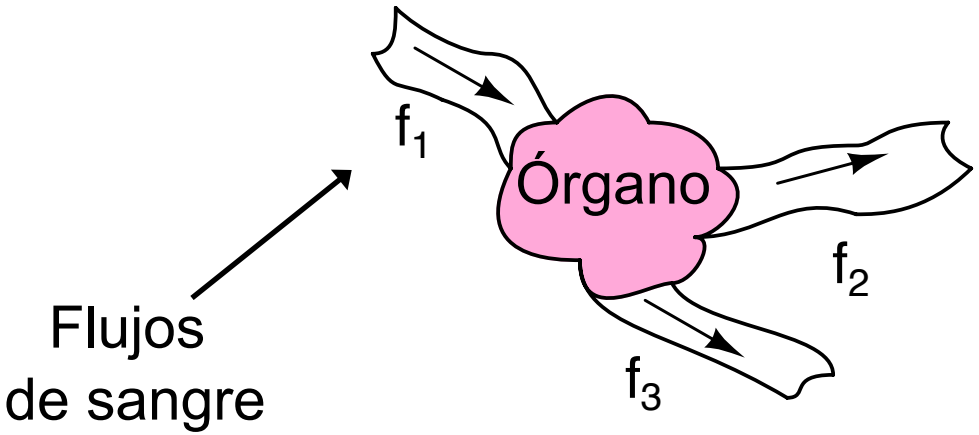
$$n_2 \quad : \quad I_4 + I_{3I_1} = I_3$$

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

KCL

Ley de corrientes de Kirchhoff (KCL)

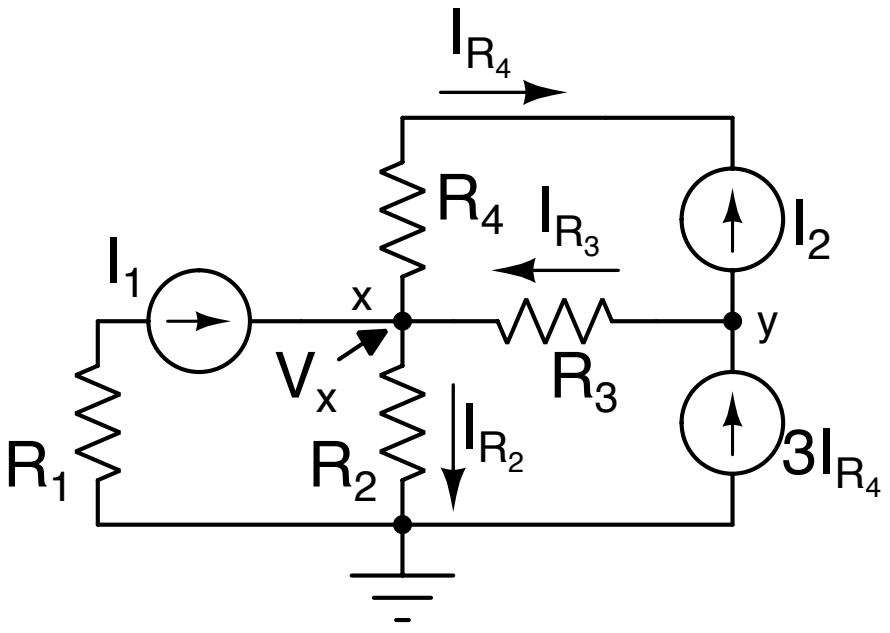
- Conceptualmente la idea es simple, y es que todo lo que entra a un punto que no almacena ni guarda nada, claramente debe salir.



$$f_1 = f_2 + f_3$$

Ley de corrientes de Kirchhoff (KCL)

- **Ejemplo**: determinar V_x.



- KCL en el nodo y:

$$I_{R_4} = -I_2$$

$$3I_{R_4} + I_{R_4} = I_{R_3}$$

$$\rightarrow I_{R_3} = -4I_2$$

- KLC en el nodo x:

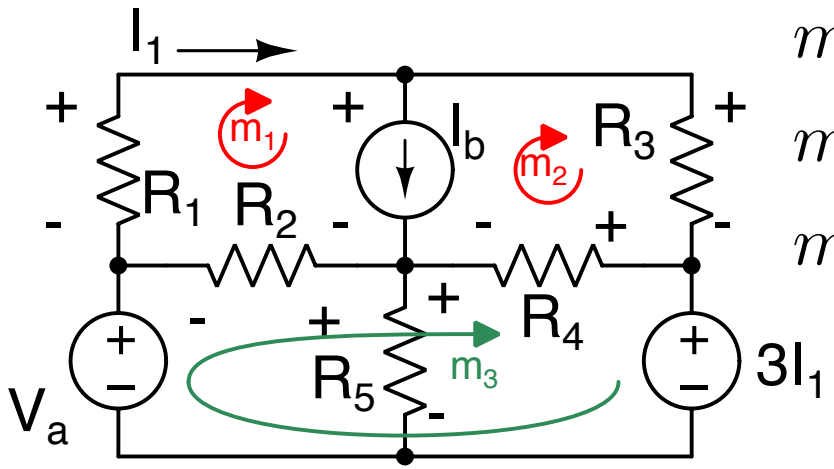
$$I_1 + I_2 - 4I_2 = \frac{V_x}{R_2}$$

$$\rightarrow V_x = R_2\left(I_1 - 3I_2\right)$$

Fin ej.

Ley de voltajes de Kirchhoff (KVL)

- KVL es ley dual de KCL, y establece que la suma de todos los voltajes correspondientes a cada uno de los elementos que forman un circuito o una parte de él es nula cuando se recorre un camino cerrado (malla).



$$m_1 \quad : \quad V_{R_1} - V_{I_b} - V_{R_2} = 0$$

$$m_2 \quad : \quad V_{I_b} - V_{R_3} - V_{R_4} = 0$$

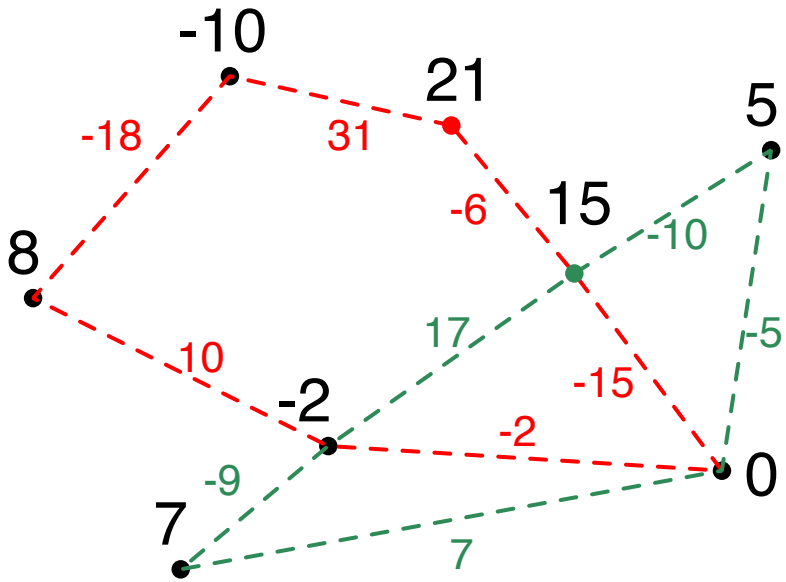
$$m_3 \quad : \quad V_a + V_{R_2} + V_{R_4} - 3I_3 = 0$$

$$\sum V = 0$$

KVL

Ley de voltajes de Kirchhoff (KVL)

- Conceptualmente la idea es que cada punto de un circuito tiene un voltaje único. Al hacer un camino por una malla partiendo por un punto y volviendo al mismo, el voltaje del punto debería mantenerse, es decir, la suma de todos los *cambios* de voltaje de la malla debería ser nula.

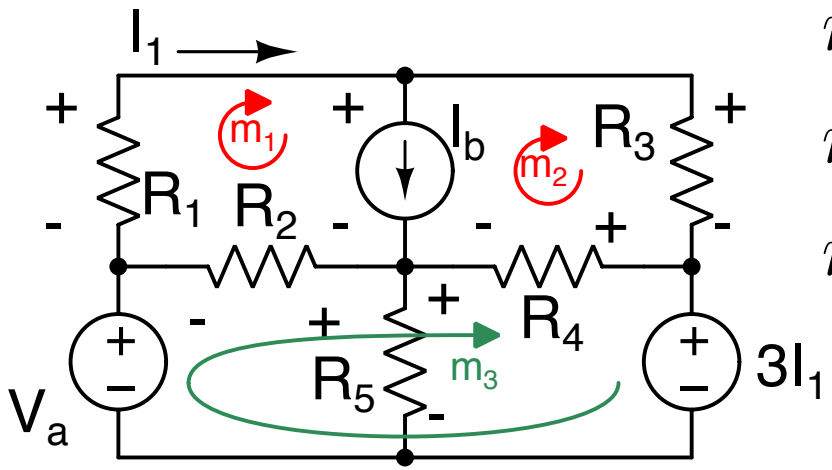


$$-6-15-2+10-18+31=0$$

$$-10-5+7-9+17=0$$

Ley de voltajes de Kirchhoff (KVL)

- Una manera alternativa de plantear esta ley es la siguiente: en una malla circuital, la suma de los aumentos de potencial debe ser igual a la suma de las caídas de potencial.



$$m_1 \quad : \quad V_{R_1} = V_{I_b} + V_{R_2}$$

$$m_2 \quad : \quad V_{I_b} = V_{R_3} + V_{R_4}$$

$$m_3 \quad : \quad V_a + V_{R_2} + V_{R_4} = 3I_1$$

$$\sum V \uparrow = \sum V \downarrow$$

Ley de voltajes de Kirchhoff (KVL)

- **Ejemplo**: calcular la caída de potencial en la fuente V_I.

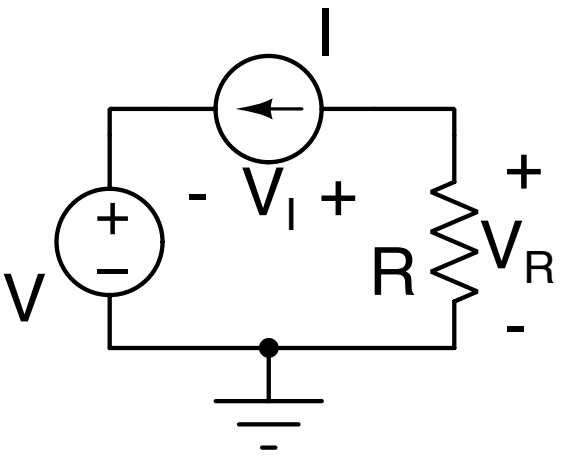
- Primero determinamos V_R:

$$V_R = -IR$$

- KVL en la única malla del circuito (en sentido horario):

$$V + V_I - V_R = 0$$

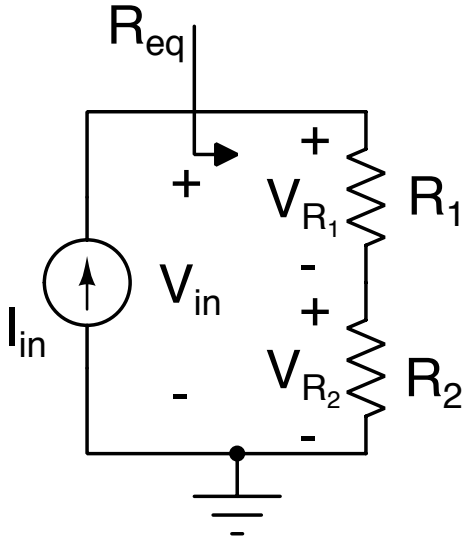
$$\rightarrow V_I = -IR - V$$



Fin ej.

Resistencia equivalente

- De acuerdo a las leyes Kirchhoff (aunque en realidad ya lo sabíamos!):
  - Resistores en serie:



$$V_{in} = V_{R_1} + V_{R_2} = I_{in}R_1 + I_{in}R_2$$

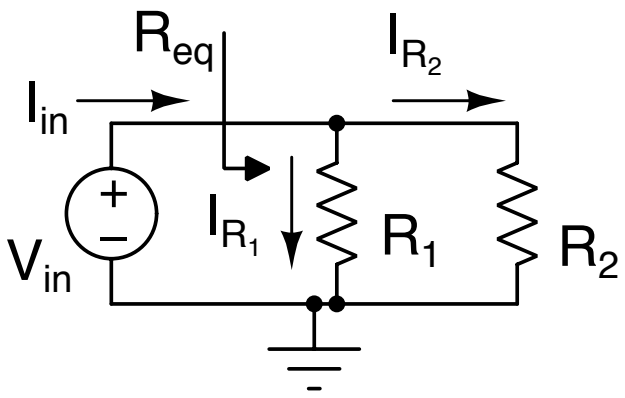
$$\rightarrow R_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = R_1 + R_2$$

$$\rightarrow G_{eq} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = G_1 || G_2 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

La resistencia equivalente corresponde a la suma de las resistencias! (o equivalentemente, al paralelo de las conductancias)

Resistencia equivalente

- Resistores en paralelo:



$$I_{in} = I_{R_1} + I_{R_2} = \frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{in}}{R_2}$$

$$\rightarrow G_{eq} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = G_1 + G_2$$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La resistencia equivalente corresponde al paralelo de las resistencias! (o equivalentemente, a la suma de las conductancias)

Resistencia equivalente

- Es muy útil tener en mente las propiedades de los operadores *paralelo* y *serie*, particularmente al diseñar circuitos:

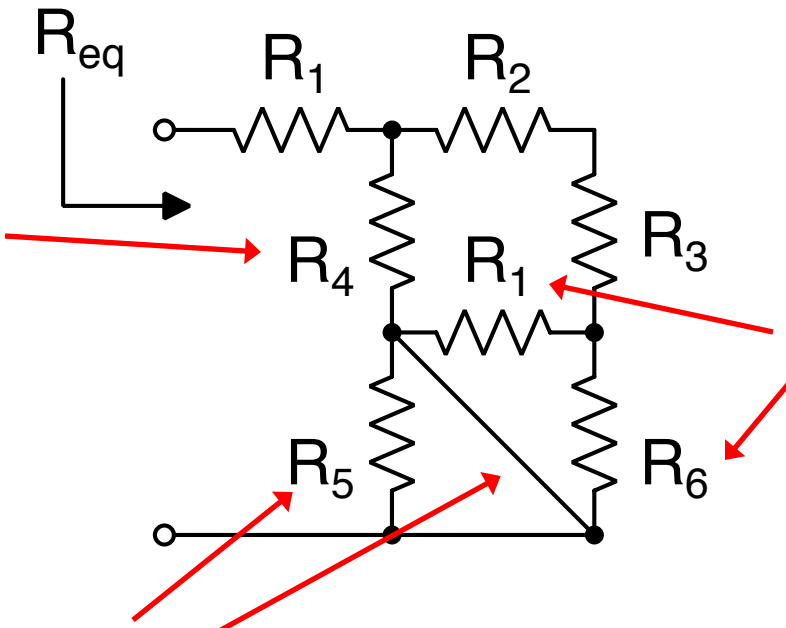
$$R_{grande} + R_{chico} \approx R_{grande}$$

$$R_{grande} || R_{chico} = \left(\frac{1}{R_{grande}} + \frac{1}{R_{chico}} \right)^{-1} \approx R_{chico}$$

- En general es conveniente dejar expresado el operador paralelo como tal en vez de desarrollarlo. De esta manera las expresiones obtenidas son de baja entropía y entregan más información que una expresión expandida.

Resistencia equivalente

- **Ejemplo**: determinar R_{eq}.



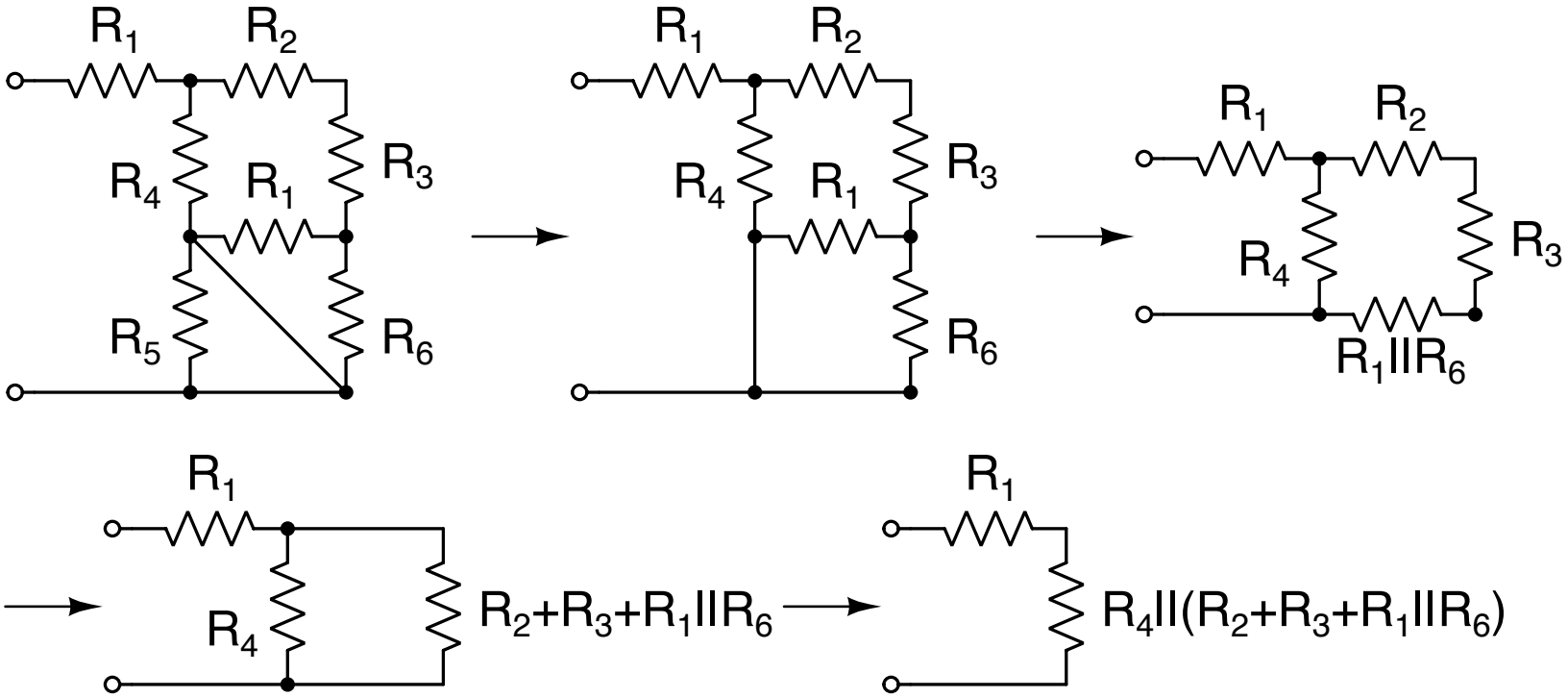
3. Luego quedan R_2, R_3 y $R_1||R_6$ en serie, y éstas a su vez quedan en paralelo con R_4

2. Habiendo eliminado R_5, es claro que R_1 y R_6 están en paralelo

1. R_5 está en paralelo con un cable!
$R_5||0 = 0$

Resistencia equivalente

- Luego:

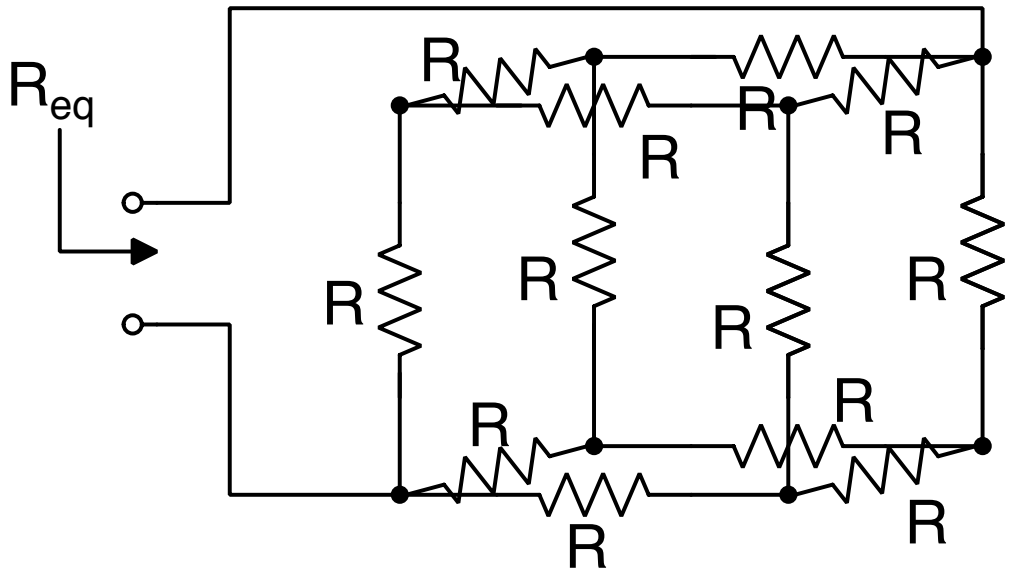


$$\rightarrow R_{eq} = R_1 + R_4 || \left(R_2 + R_3 + R_1 || R_6\right)$$

Fin ej.

Resistencia equivalente

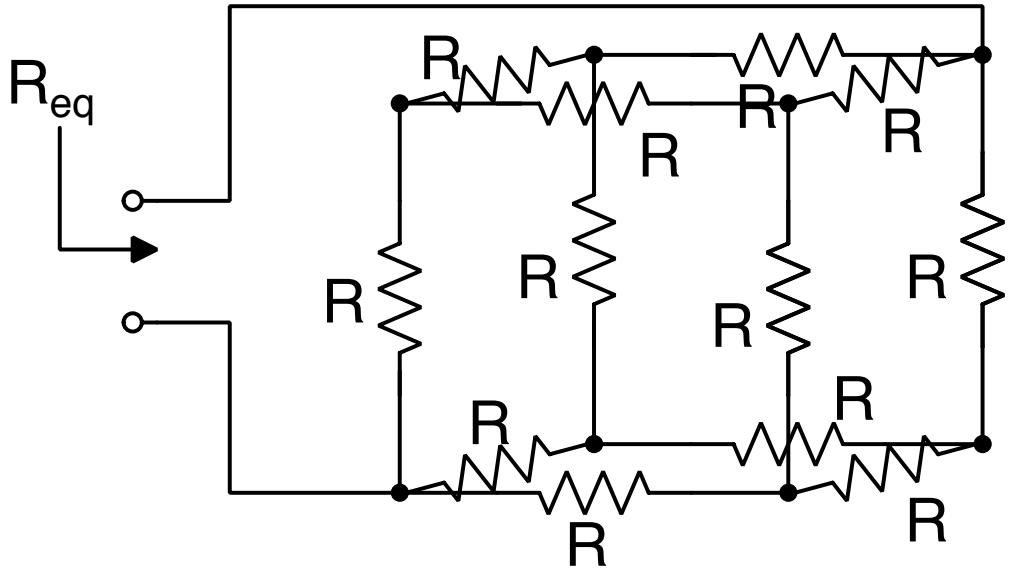
- **Ejemplo**: determinar R_{eq} en el cubo de resistores.



- En este caso no podemos aplicar directamente reducciones serie-paralelo! Tenemos que pensar!

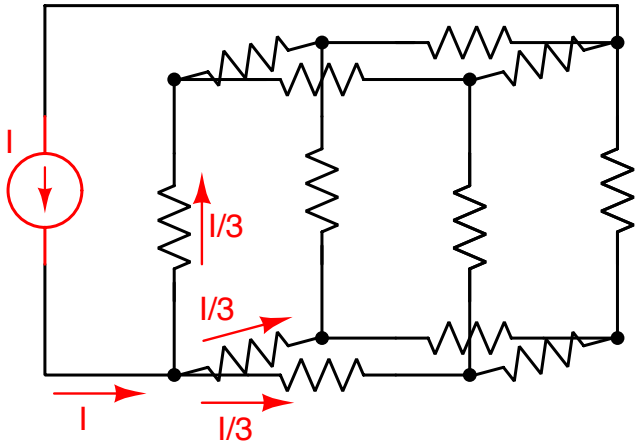
Resistencia equivalente

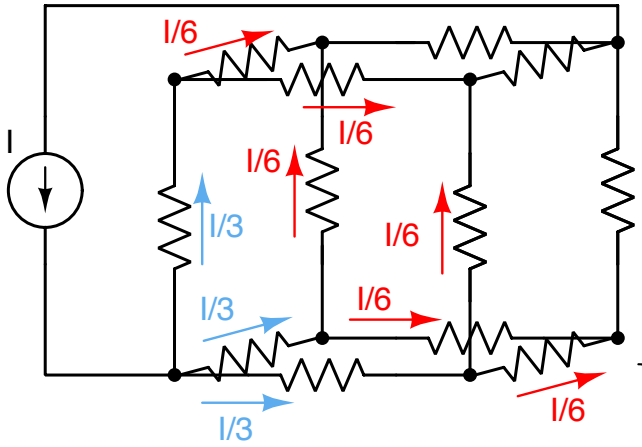
- Como todos los resistores son de igual resistencia, al llegar a un nodo la corriente ve exactamente lo mismo en todas las direcciones posibles. Por este motivo, en cada nodo la corriente se divide en partes iguales.



Resistencia equivalente

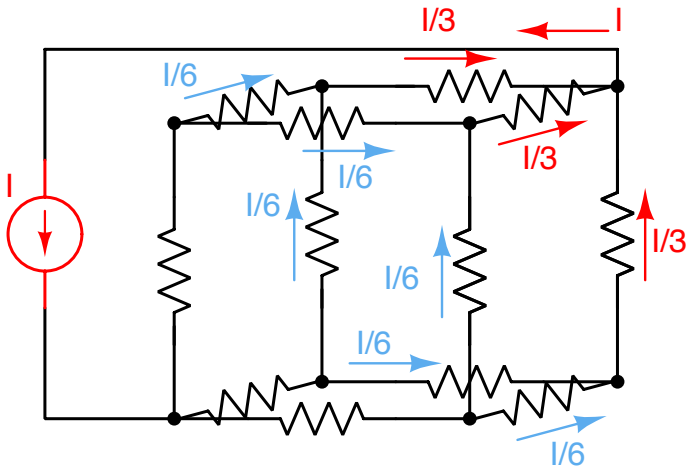
- Así:

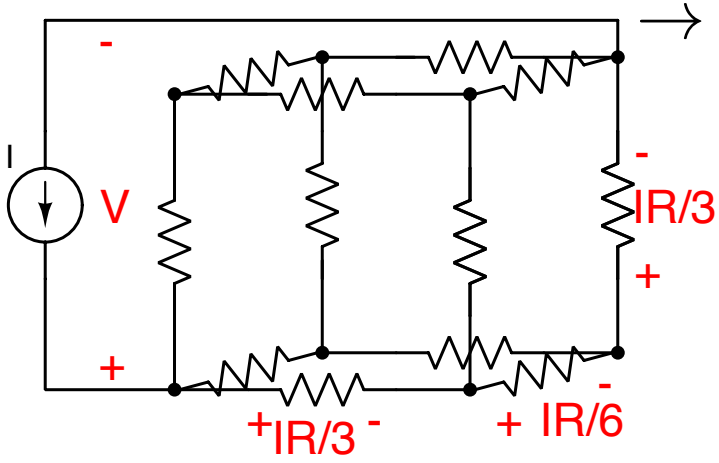




$$V = 2\frac{IR}{3} + \frac{IR}{6}$$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{5}{6}R$$

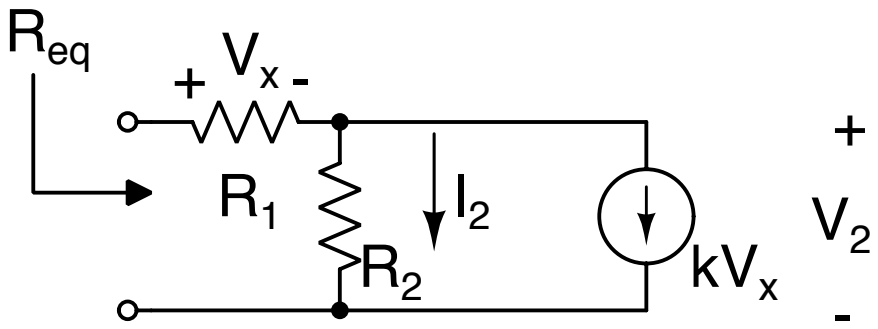




Fin ej.

Resistencia equivalente

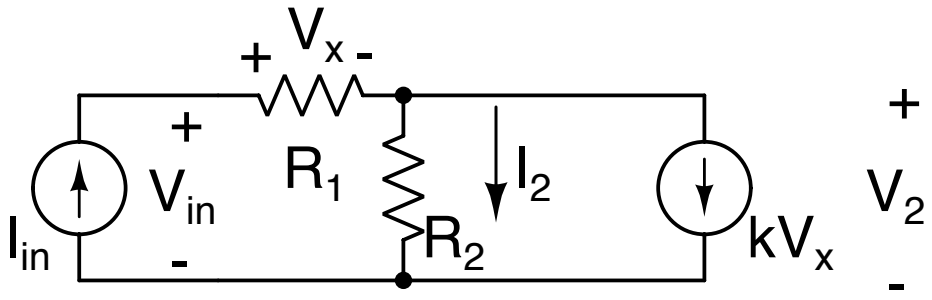
- **Ejemplo**: determinar R_{eq}.



- Este ejercicio se ve raro, ya que nos piden calcular una resistencia equivalente en un circuito que tiene una fuente de corriente dependiente!
  - Podría ser una trampa, ya que sabemos que las fuentes dependientes sirven para modelar resistores. En ese caso el voltaje de control debería ser V_2, no V_x.

Resistencia equivalente

- Si inyectamos una corriente I_{in} a la entrada y luego medimos el voltaje V_{in} en los bornes de la fuente podremos calcular V_{in}/I_{in}, que corresponde justamente a R_{eq}.



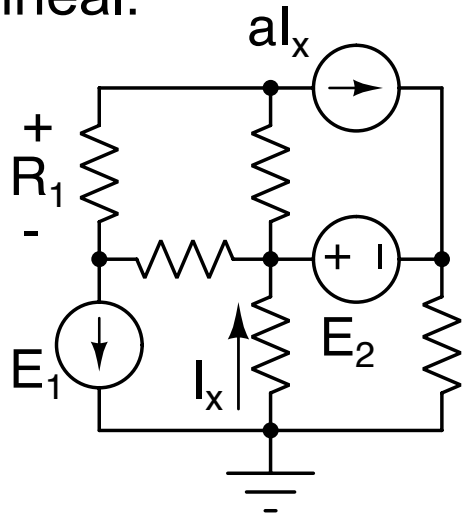
$$V_x = I_{in} R_1$$

$$I_2 = I_{in} - kV_x \quad \rightarrow R_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = R_1 + R_2\left(1 - kR_1\right)$$

$$V_{in} = V_x + R_2 I_2$$

Resistencia equivalente

- Cabe preguntarse si siempre es posible calcular el cociente entre dos variables en un circuito. La respuesta es sí, en la medida que éste sea *lineal* y sólo se considere una excitación a la vez.
  - Considere un circuito lineal con excitaciones E_1 y E_2, en el cual nos interesa medir una respuesta R_1. Como el circuito es lineal:



$$R_1 = c_1 E_1 + c_2 E_2$$

Constantes!

Resistencia equivalente

- Claramente se cumplen las condiciones de linealidad:

  Aditividad

  $$R_1(\vec{x}+\vec{y}) = c_1x_1 + c_1y_1 + c_2x_2 + c_2y_2 = R_1(\vec{x}) + R_1(\vec{y})$$

  Homogeneidad

  $$R_1(\alpha\vec{x}) = c_1\alpha x_1 + c_2\alpha x_2 = \alpha R_1(\vec{x})$$

- *Observación*: la homogeneidad se deriva de la aditividad al considerar sólo números reales. Al considerar números complejos:

$$f(x) = x^* \rightarrow \begin{array}{l} f(x+y) = x^* + y^* = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha^* x^* = \alpha^* f(x) \end{array}$$

$\alpha = \alpha^*$ sólo si α es real.

Resistencia equivalente

- Supongamos que queremos calcular R_1/E_1, es decir, cuánto afecta E_1 a la respuesta R_1. Para esto sólo consideramos la excitación E_1 y apagamos E_2 (i.e. $E_2 = 0$), así:

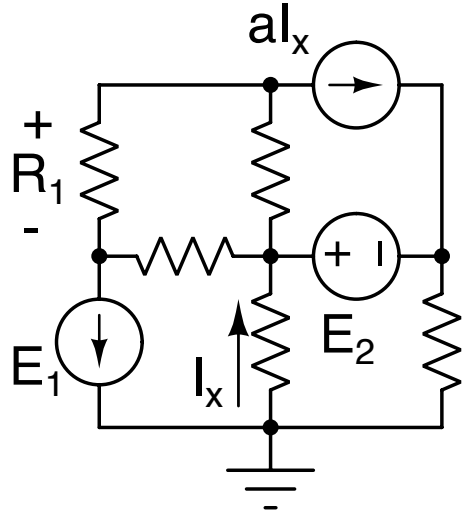
$$R_1 = c_1 E_1 + c_2 \cdot 0 = c_1 E_1$$
$$\rightarrow \frac{R_1}{E_1} = c_1$$

- Apagar una excitación implica:
  - Fuente de voltaje: reemplazar la fuente por un cortocircuito (V=0).
  - Fuente de corriente: reemplazar la fuente por un circuito abierto (I=0).

Resistencia equivalente

- Luego, en un sistema lineal la respuesta corresponde a la *superposición* lineal de las contribuciones de cada una de las excitaciones del sistema:

$$R_1 = \left.\frac{R_1}{E_1}\right|_{E_2=0} E_1 + \left.\frac{R_1}{E_2}\right|_{E_1=0} E_2$$



$$c_1 = \left.\frac{R_1}{E_1}\right|_{E_2=0}$$

$$c_2 = \left.\frac{R_1}{E_2}\right|_{E_1=0}$$

Resistencia equivalente

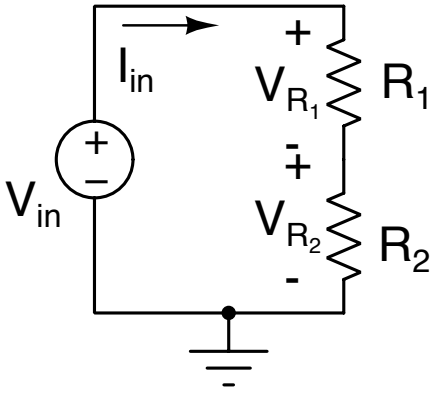
- Como resumen: dado que un sistema lineal cumple con las condiciones de aditividad y homogeneidad, todas sus respuestas se pueden relacionar con las excitaciones a través de ecuaciones lineales de coeficientes constantes!

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

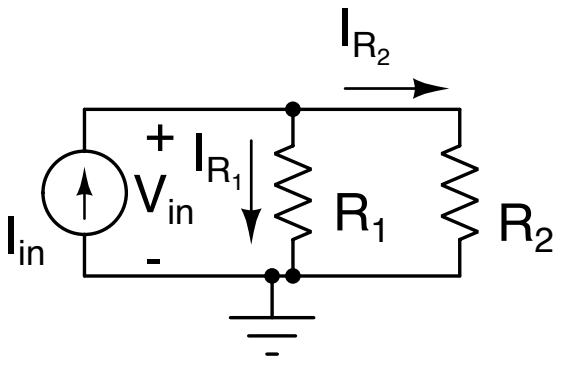
Fin ej.

Divisores de voltaje y corriente

- El divisor de voltaje y su dual, el divisor de corriente, son circuitos muy simples que vale la pena manejar al revés y al derecho a la hora de analizar circuitos. No sólo facilitan el análisis, sino que también contribuyen a la obtención de expresiones de baja entropía.



Divisor de voltaje

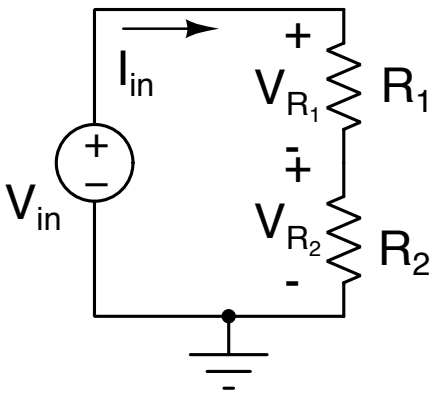


Divisor de corriente

(en general no es necesario que vayan a tierra o que dividan en dos solamente)

Divisores de voltaje y corriente

- Divisor de voltaje:



$$I_{in} = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2}$$

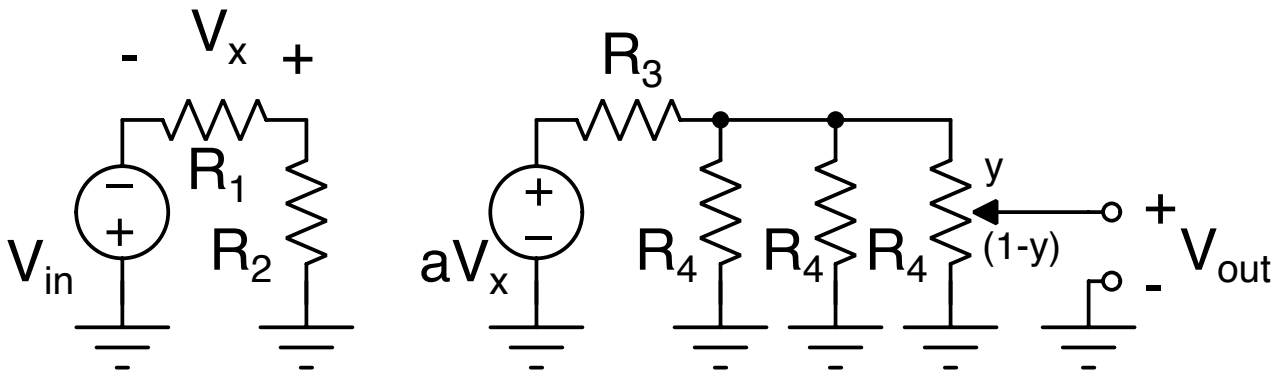
$$\rightarrow V_{R_1} = R_1 I_{in} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{in}$$

$$\rightarrow V_{R_2} = R_2 I_{in} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

- Por ejemplo, mientras más grande sea R_2 con respecto a R_1 menor es la caída de potencial en R_1 (V_{R1}) con respecto a la caída de potencial en R_2 (V_{R2}), por lo tanto, V_{R2} se parece más V_{in} → la expresión tiene sentido!

Divisores de voltaje y corriente

- **Ejemplo**: calcular V_{out} en función de V_{in} (0<y<1).



- Por inspección:

$$V_x = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{in}$$

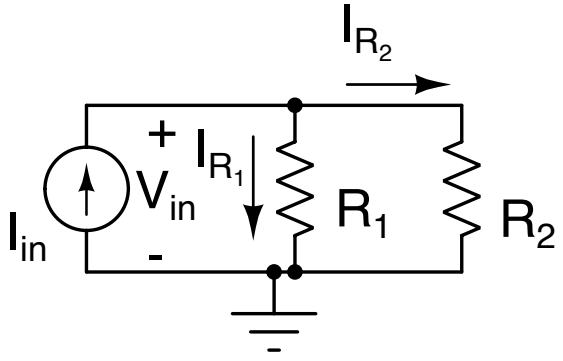
$$V_{out} = a \frac{R_4||R_4||R_4}{R_3+R_4||R_4||R_4} \frac{(1-y)R_4}{(1-y)R_4+yR_4} V_x$$

$$\rightarrow V_{out} = a(1-y) \frac{R_1}{R_1+R_2} \frac{\frac{R_4}{3}}{R_3+\frac{R_4}{3}} V_{in}$$

Fin ej.

Divisores de voltaje y corriente

- Divisor de corriente:



$$V_{in} = I_{in}(R_1||R_2)$$

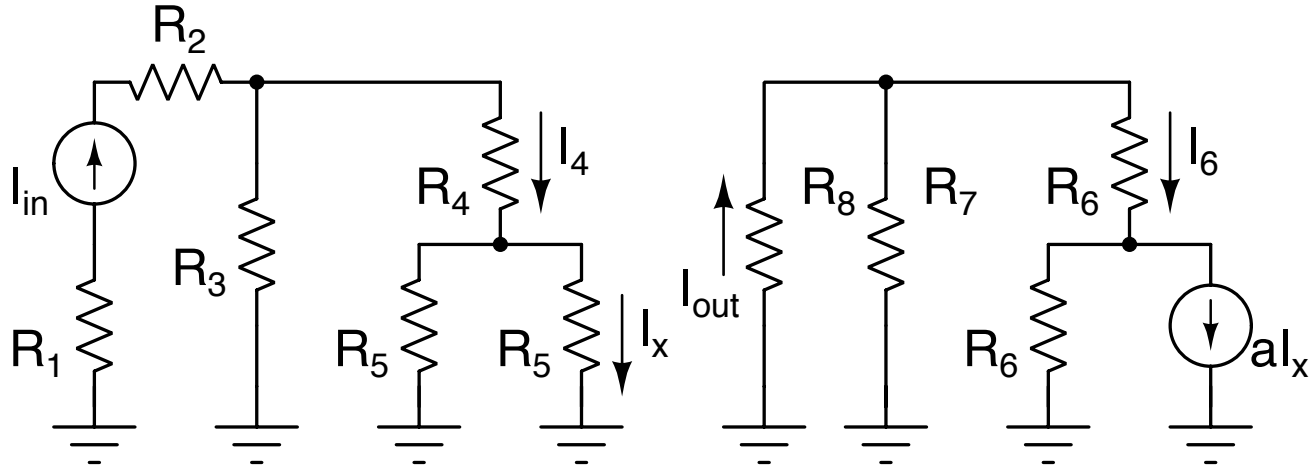
$$\rightarrow I_{R_1} = \frac{V_{in}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\rightarrow I_{R_2} = \frac{V_{in}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

- Por ejemplo, mientras más grande sea R_2 con respecto a R_1 menos corriente se irá por la rama de R_2, ya que para los electrones es más fácil moverse por el camino que muestre menos resistencia (en este caso la rama de R_1). Por lo tanto, I_{R1} se parece más I_{in} → esta expresión también tiene sentido!

Divisores de voltaje y corriente

- **Ejemplo**: calcular I_{out} en función de I_{in}.



- Para el circuito de la izquierda:

$$I_x = \frac{1}{2} I_4 = \frac{1}{2} \frac{R_3}{R_3 + R_4 + \frac{R_5}{2}} I_{in}$$

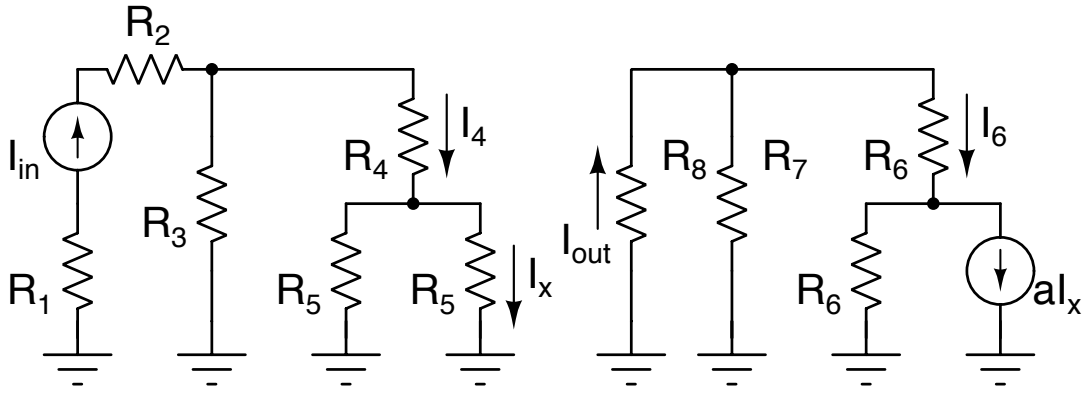
Divisores de voltaje y corriente

- Para el circuito de la derecha:

$$I_{out} = \frac{R_7}{R_7+R_8} I_6 = \frac{R_7}{R_7+R_8} \frac{R_6}{2R_6+R_7||R_8} aI_x$$

- Así:

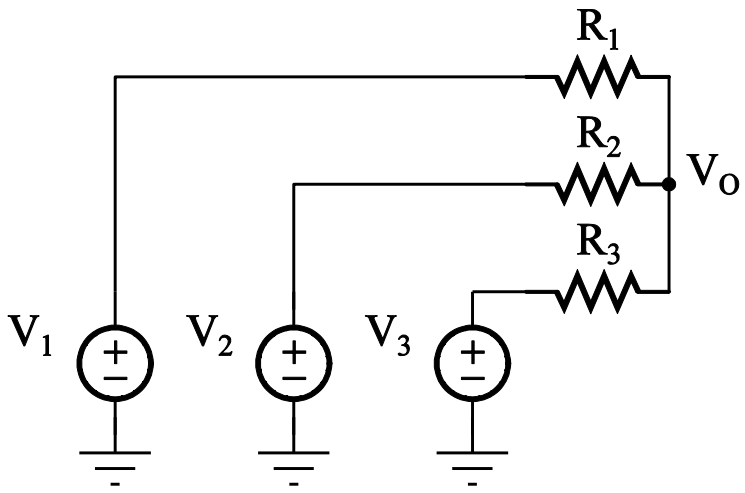
$$I_{out} = \frac{a}{2} \frac{R_7}{R_7+R_8} \frac{R_6}{2R_6+R_7||R_8} \frac{R_3}{R_3+R_4+\frac{R_5}{2}} I_{in}$$



Fin ej.

Divisor de voltaje como promediador de voltajes

Veamos un caso con tres voltajes:



¿Cómo resolverían este ejercicio?

Conexión delta-estrella

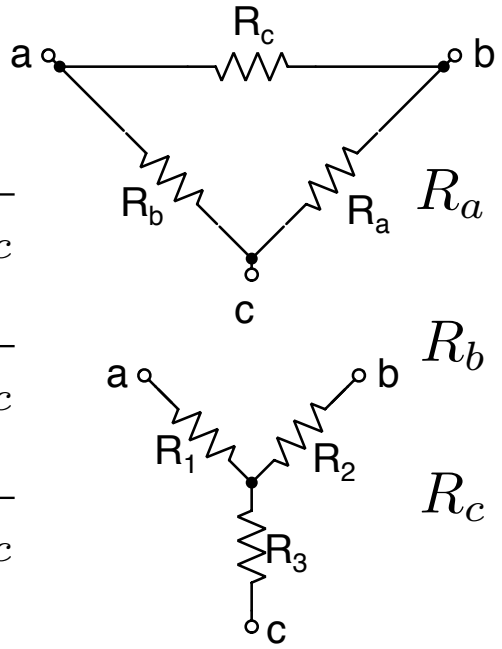
- Existe dos configuraciones de resistores comunes en algunos campos de la Ingeniería Eléctrica: las configuraciones delta (Δ) y estrella (Y). Es posible pasar de Δ a Y y de Y a Δ utilizando el *teorema de Kenelly*:

$$\Delta \rightarrow \mathrm{Y}$$

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$



$$\mathrm{Y} \rightarrow \Delta$$

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

Conexión delta-estrella

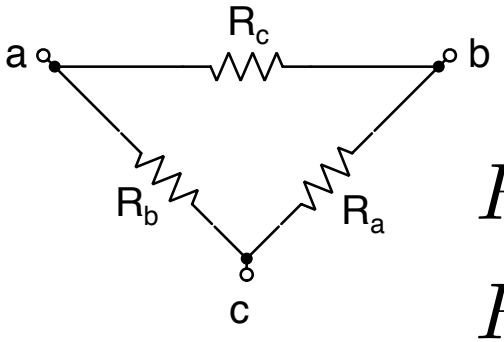
- Notar que cuando todos los resistores son iguales:

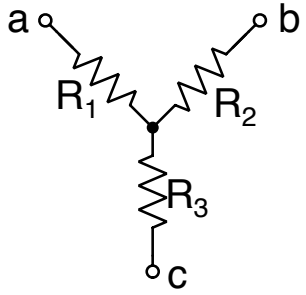
$$R_{\mathrm{Y}} = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

- En términos de admitancia las expresiones de Y a Δ son más simples.
- En realidad el teorema de Kenelly corresponde a un caso particular del *teorema de Rosen*, según el cual un circuito pasivo de N resistores R_1,R_2,…,R_N conectados en estrella puede ser sustituido por un circuito equivalente formado por N(N-1)/2 resistores R_{12}, R_{13},…, R_{1N}, R_{23}, R_{24},…,R_{2N}, R_{34}, R_{35},…,R_{3N}, etc. conectados en polígono.

Conexión delta-estrella

- La demostración del teorema de Kenelly va por calcular la resistencia equivalente entre dos terminales (dejando el tercero desconectado) y luego igualando las expresiones obtenidas para cada configuración.





$$
\begin{aligned}
R_{ab} &= R_c||(R_b + R_a) = R_1 + R_2 \\
R_{ac} &= R_b||(R_a + R_c) = R_1 + R_3 \\
R_{bc} &= R_a||(R_b + R_c) = R_2 + R_3
\end{aligned}
$$