PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
IEE2123 - Circuitos Eléctricos 1-2018

Material Anexo

Junio de 2018

Christian Escobar Arce [cmescobar@uc.cl]

Notas adicionales sobre diagramas de Bode

Funciones de transferencia negativas

Para este caso, considérese la función de transferencia siguiente:

$$F(s) = K \cdot \frac{(1+s/z_1)(1+s/z_2)...(1+s/z_n)}{(1+s/p_1)(1+s/p_2)...(1+s/p_m)}$$

Donde $K < 0$, es decir es una ganancia con valor negativo. Nótese que la función de transferencia de esta ganancia está dada por:

$$F_k(s) = K$$

Que transformado a régimen sinusoidal permanente resulta en:

$$F_k(j\omega) = K$$

Esta función se transferencia fasorialmente se puede ver como:

$$F_k(j\omega) = K\angle 0^\circ$$

Sin embargo, dado que $K < 0$, en términos fasoriales se puede escribir la expresión anterior como:

$$F_k(j\omega) = |K|\angle 180^\circ$$

Luego, la magnitud y fase de esta función de transferencia estarán dadas respectivamente por:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{K^2} = |K|$$
$$\angle F(j\omega) = 180^\circ$$

Con lo cual se explica que el comportamiento de una constante negativa no afecta a la magnitud, pero desplaza en 180° el gráfico de la fase.

Ejemplo: Considérese la función de transferencia dada por:

$$H(s) = -\frac{(1+s/5)(1+s/100)}{s(1+s/2000)(1+s/100000)}$$

Transformando esta expresión a régimen sinusoidal permanente:

$$H(j\omega) = -\frac{(1+j\omega/5)(1+j\omega/100)}{j\omega(1+j\omega/2000)(1+j\omega/100000)}$$

Con lo cual se puede obtener la magnitud y la fase, respectivamente, de la función de transferencia:

$$|H(j\omega)| = |-1|\frac{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{25}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10000}}}{\omega\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4000000}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100000^2}}}$$

$$\angle H(j\omega) = 180^\circ + \arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2000}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{100000}\right)$$

Gráficamente el diagrama de Bode de magnitud y fase se pueden apreciar en las figuras 1 y 2 respectivamente.

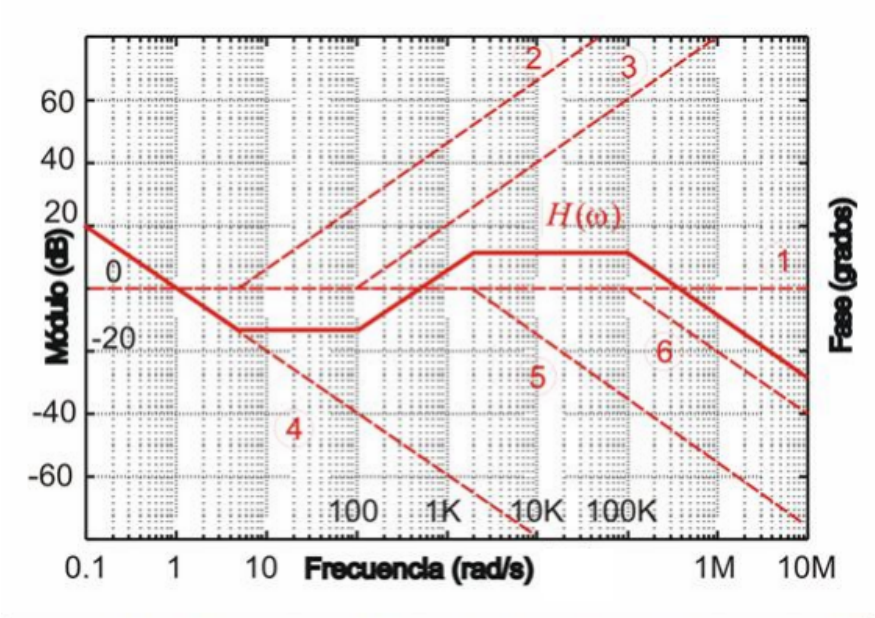


Figura 1: Diagrama de Bode de magnitud para $H(s)$

Expresiones cuadráticas para polos o ceros

Considérese una función de transferencia dada por:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Cuya solución general tiene la forma:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Nótese que dependiendo del valor que tome ζ la función $F(s)$ se comportará de manera distinta. Como se definió anteriormente para los circuitos de segundo orden: [1]

[1] Se recomienda al lector que antes de asumir que una expresión cuadrática necesariamente entregará polos o ceros complejo conjugado, verifique si es que realmente corresponde a este tipo de casos ya sea: obteniendo el valor de los ceros/polos, o bien, obteniendo el valor de ζ.

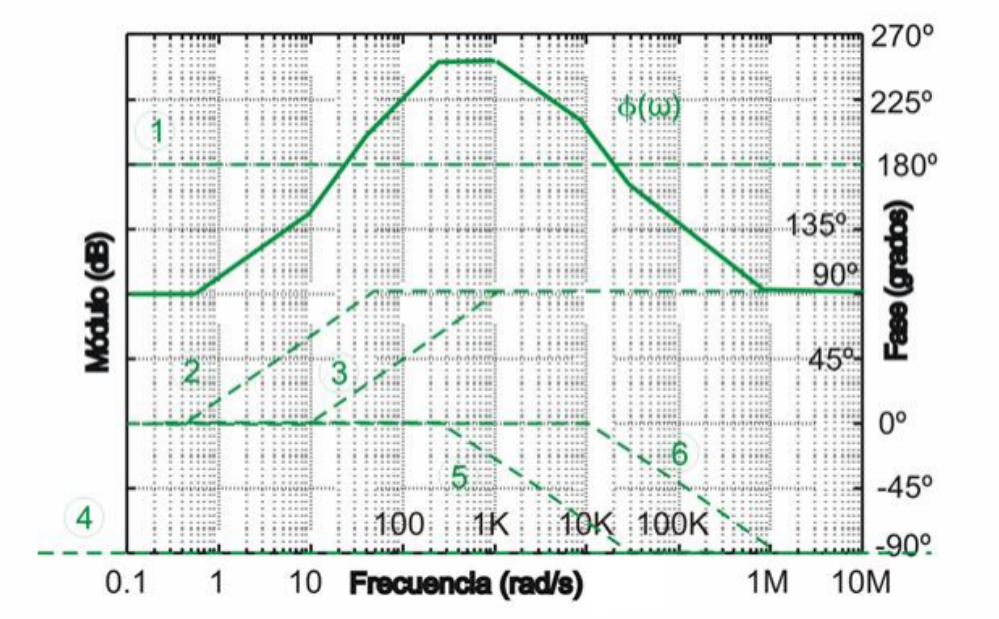


Figura 2: Diagrama de Bode de fase para $H(s)$

- Si $\zeta > 1$, la respuesta en frecuencia entregará 2 polos reales y distintos.
- Si $\zeta = 1$, la respuesta en frecuencia entregará 2 polos reales e iguales.
- Si $\zeta < 1$, la respuesta en frecuencia entregará 2 polos complejos conjugados.

Ejemplo: Considérese la función de transferencia $F_1(s)$ dada por:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 10000}$$

Se puede ver fácilmente que:

$$2\zeta\omega_0 = 20$$

Y donde $\omega_0 = \sqrt{10000} = 100$. Por ende:

$$\zeta = 0{,}1 < 1$$

Por lo tanto, esta función de transferencia tiene 1 polo complejo conjugado en $\omega_0 = 100$. Por otro lado, considere la función de transferencia $F_2(s)$ dada por:

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 60}$$

Se puede ver fácilmente que:

$$2\zeta\omega_0 = 20$$

Y donde $\omega_0 = \sqrt{60} = 7{,}74$. Por ende:

$$\zeta = 1{,}29 > 1$$

Por lo tanto, esta función de transferencia tiene 2 polos reales y distintos, cada uno en $-10 \pm 2\sqrt{10}$

Polos o ceros positivos

Para este caso, considérese la función de transferencia siguiente:

$$F(s) = K \cdot \frac{(1 - s/z_1)(1 - s/z_2)...(1 - s/z_n)}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)...(1 - s/p_m)}$$

Además considérese una sub-función de transferencia $F_{z_1}(s)$ dada por:

$$F_{z_1}(s) = (1 - s/z_1)$$

Pasando a régimen permanente se tiene que:

$$F_{z_1}(j\omega) = (1 - j\omega/z_1)$$

A partir de esto es posible notar que la magnitud y fase respectivamente están dadas por:

$$|F_{z_1}(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$$

$$\angle F_{z_1}(j\omega) = \arctan(-\omega/z_1) = -\arctan(\omega/z_1)$$

Con lo cual se explica que el signo de un polo o cero complejo no afecta a la magnitud, pero vuelve negativo el diagrama de fase. Es decir, la fase de un cero positivo se comporta como la fase de un polo negativo, y la fase de un polo negativo se comporta como la fase de un cero positivo. Esto se puede resumir en la figura 3.

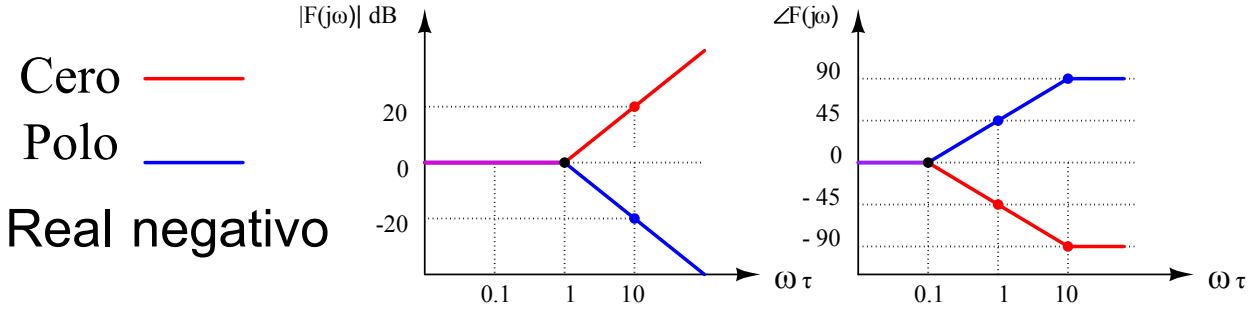


Figura 3: Diagrama de Bode de ceros y polos positivos