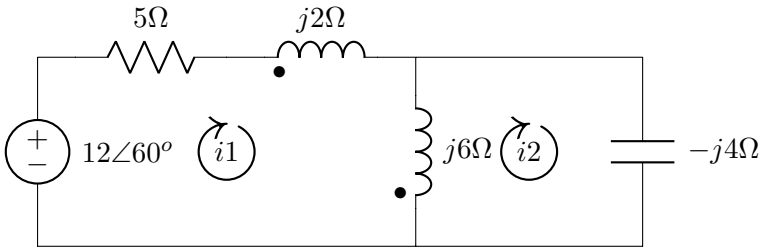
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123-1 Circuitos Eléctricos

Ayudantía 10

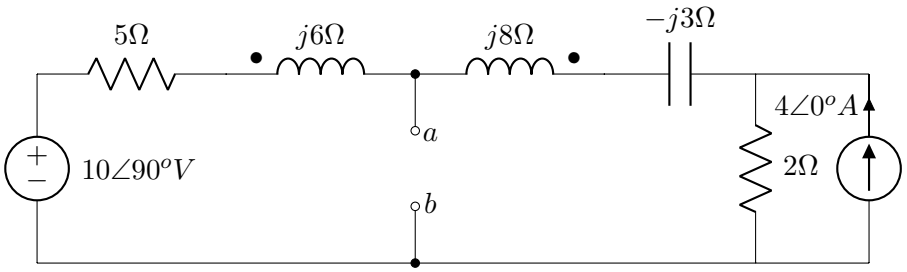
Profesor: Daniel Olivares Q. **Ayudante:** Alonso Lizana G. (ajlizana@uc.cl)

Problema 1: Circuitos Acoplados Magnéticamente

a) Determine las corrientes fasoriales I_1 e I_2 en el circuito de la figura, considerando que las bobinas estan acopladas magnéticamente, con una inductancia mutua M = $j3\Omega$.



b) Obtenga el equivalente de Thevenin entre los terminales a y b del siguiente circuito, considerando que las bobinas están acopladas magnéticamente por una inductancia mutua de M = $j2\Omega$.



Solución:

a) Planteamos las ecuaciones de cada malla ($V_o = 12\angle 60$):

M1:

$$V_o = I_1(5 + j2 + j6) - I_2 j6 + j3(I_2 - I_1) - j3I_1 \quad (1)$$

$$V_o = I_1(5 + j2) - j3I_2 \quad (2)$$

M2:

$$0 = I_2(j6 - j4) + j3I_1 - j6I_1 \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{3}{2}I_1 \quad (4)$$

Luego:

$$V_o = I_1(5 + j2) - j\frac{9}{2}I_1$$
$$I_1 = \frac{V_o}{5(1 - j\frac{1}{2})} = 2.15\angle 86.56$$

b) Para simplificar el desarrollo, transformamos la fuente de corriente en paralelo con la resistencia de la derecha mediante un equivalente de Norton - Thevenin, convirtiendolo en una fuente de voltaje con la misma resistencia en serie:

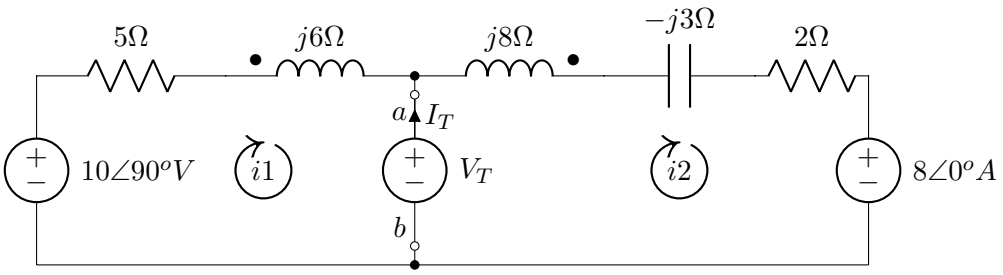
Para el voltaje de Thevenin V_{oc}, determinamos la corriente del circuito, haciendo la malla completa:

$$10\angle 90 - 8\angle 0 = I(7 + j6 + j8 - j3) + j2(-I)$$
$$I = \frac{j10 - 8}{7 + j7} = 1.29\angle 83.66$$

Luego, el voltaje de Thevenin V_{oc} será:

$$V_{oc} = V_o - I(5 + j6 - j2)$$
$$V_{oc} = (10\angle 90) - (1.29\angle 83.66)(5 + j4) = 5.35\angle 34.36$$

Para determinar la impedancia de Thevenin Z_T, ponemos fuente de prueba entre los terminales 'a' y 'b', que genera un voltaje V_T y entrega una corriente I_T.



Desarrollamos cada malla, para encontrar la impedancia equivalente $Z_T = \frac{V_T}{I_T}$.Luego:

Relación de corrientes:

$$I_2 - I_1 = I_T \rightarrow I_2 = I_T + I_1 \tag{5}$$

Desarrollamos las mallas M1:

$$-V_T = I_1(5 + j6) - j2I_2$$
$$-V_T = I_1(5 + J6) - J2(I_T + I_1)$$
$$-V_T = I_1(5 + j4) - j2I_T$$
$$I_1 = \frac{j2 - V_T}{5 + j4}$$

Reemplazamos en (5):

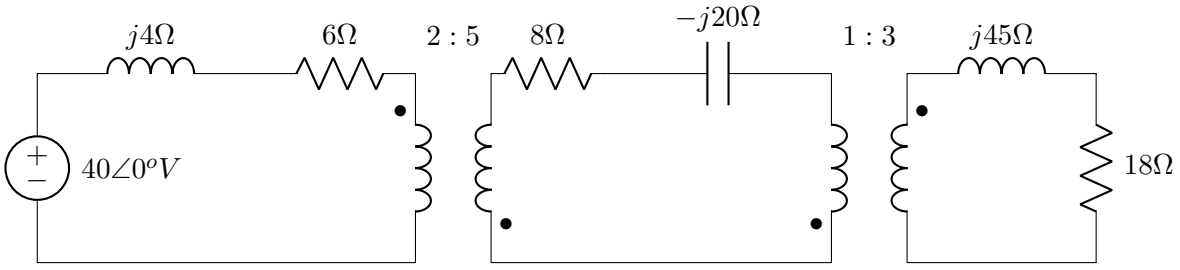
$$I_2 = \frac{I_T(5+j6) - V_T}{5+j4}$$

M2 (reemplazamos I_1 e I_2):

$$V_T = I_2(j8 - j3 + 2) - j2I_1$$
$$V_T = \frac{I_T(5+j6) - V_T}{5+j4}(j5+2) - j2\frac{j2I_T - V_T}{5+j4}$$
$$V_T = \frac{I_T(j37-16) + V_T(-j3-2)}{5+j4}$$
$$V_T(7+j7) = I_T(j37-16)$$
$$Z_T = \frac{V_T}{I_T} = \frac{j37-16}{7+j7} = 4.072\angle 68.38$$

Problema 2: Transformador Ideal

El circuito de la figura está compuesto por dos transformadores ideales. Considerando que las tensiones están en RMS, determine: **a)** Potencia suministrada por la fuente. **b)** Potencia disipada por la resistencia de 18 Ω.



Solucion:

a) En un transformador ideal, las relaciones están dadas por:

$$a = \frac{N_1}{N_2} \tag{6}$$
$$\frac{V_1}{V_2} = a \tag{7}$$
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{a} \tag{8}$$
$$Z_2^1 = \frac{V_2^1}{I_2^1} = \frac{aV_2}{\frac{1}{a}I_2} = a^2\frac{V_2}{I_2} = a^2 Z_2 \tag{9}$$
$$Z_1^2 = \frac{1}{a^2}Z_1 \tag{10}$$

Con estas relaciones, podemos referir cualquier circuito a su circuito primario o al secundario. Como nos piden la potencia entregada por la fuente, es conveniente referir todo el circuito al primario:

Circuito Terciario al Secundario:

$$Z_3 = 18 + j45$$
$$Z_3^2 = \frac{1}{3^2}(18 + j45) = 2 + j5$$

De esta forma, reemplazamos la bobina que acopla el circuito secundario y terciario por la carga Z_3^2. Luego, determinamos la impedancia del secundario:

$$Z_2 = 8 - j20 + Z_3^2 = 8 - j20 + 2 + j5 = 10 - j15 = 5(2 - j3)$$
$$Z_2^1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 5(2 - j3) = \frac{4}{5}(2 - j3) = 1.6 - j2.4$$

Finalmente, la impedancia total vista por el primario es:

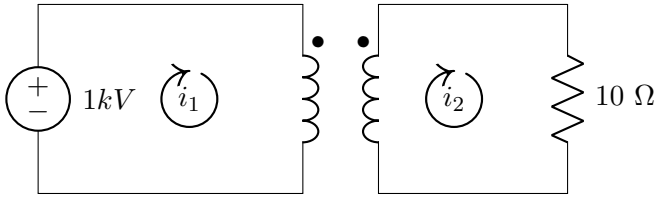
$$Z_1 = j4 + 6 + Z_2^1 = j4 + 6 + 1.6 - j2.4 = 7.6 + j1.6$$
$$S = VI^* = \frac{|V|^2}{Z^*} = \frac{40^2}{7.6 - j1.6} = 206.01\angle 11.89$$

b) Ahora, necesitamos determinar valores en el terciario. Como lo que nos piden es la potencia disipada por la resistencia en el terciario, observamos que todas las impedancias de los 3 circuitos (primario, secundario y terciario) están en serie. Luego, lo más fácil es determinar la corriente en el primario, y referirla al terciario (si determinamos el voltaje en el terciario, es necesario hacer tres divisores de voltaje, lo cual implica más álgebra):

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{40}{7.6 + j1.6} = 5.15\angle -11.88$$
$$I_2 = a_1 I_1 = \frac{2}{5} I_1 = 2.06\angle -11.88$$
$$I_3 = a_2 I_2 = \frac{1}{3} I_2 = 0.6867\angle -11.88$$
$$P = I^2 R = 0.6867^2 \cdot 18 = 8.48W$$

Problema 3: Autotransformador

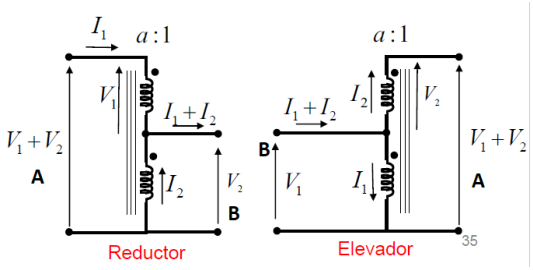
a)Realice el esquema de un autotransformador tipo elevador, determine su razón de transformación, la relación de corrientes, voltajes y la potencia entregada.
b) Repita el inciso a), pero ahora con un autotransformador tipo reductor.
c) Para el siguiente transformador, donde $i_1 = 1A$ e $i_2 = 10A$, conectelo como autotransformador elevador, calcule las corrientes en el autotransformador y su potencia nominal.



d) Reconectelo como autotransformador reductor, calcule nuevamente lo pedido en el inciso c)

Solución:

a) Las conexiones del autotransformador como elevador y reductor son las siguientes:



A partir de ellos, es fácil determinar las relaciones. Debemos considerar que la razón de transformación 'a' se define como:

$$a = \frac{N^o \ vueltas \ del \ primario}{N^o \ vueltas \ del \ secundario}$$

Luego, en el caso del autotrafo elevador del dibujo, tenemos que:

$$N_B = N_1 \quad N_A = N_1 + N_2$$
$$V_B = V_1 \quad V_A = V_1 + V_2$$
$$I_B = I_1 + I_2 \quad I_A = I_1$$
$$a' = \frac{N_B}{N_A} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \cdot \frac{\frac{1}{N_2}}{\frac{1}{N_2}} = \frac{1}{1+a}$$
$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{1}{1+a} = a' \frac{I_B}{I_A} = \frac{I_1 + I_2}{I_1} = 1 + a = \frac{1}{a'}$$

Finalmente, como consideramos un transformador ideal, el producto de la corriente de entrada por el voltaje de entrada $V_1 I_1$ será igual al producto del voltaje y la corriente de salida $V_2 I_2$. Luego, el autotransformador también será ideal, por lo que el producto del voltaje y la corriente de entrada del autotrafo $V_B I_B$ debe ser igual al producto de voltaje y corriente de salida $V_A I_A$. Al comparar ambos tenemos:

$$\frac{S_{auto}}{S_{trafo}} = \frac{V_B I_B}{V_2 I_2} = \frac{V_2(I_1 + I_2}{V_2 I_2)} = 1 + \frac{1}{a}$$

Podemos concluir que al conectar un transformador como autotransformador, su capacidad para manejar potencia aumenta en $\frac{1}{a}$ veces. Por ende, si tenemos razones de transformaciones cercanas a 1, se puede doblar la capacidad de potencia del transformador. Para razones de transformación muy altas, usar un autotrafo no es tan conveniente.

b) Se realiza un procedimiento análogo al anterio, obteniendo:

$$a'' = \frac{N_A}{N_B} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + a$$
$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_1 + V_2}{V_2} = 1 + a = a''$$
$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{1}{a''}$$

Claramente, el aumento de la capacidad del transformador como autotransformador reductor es la misma que la del autotransformador elevador.

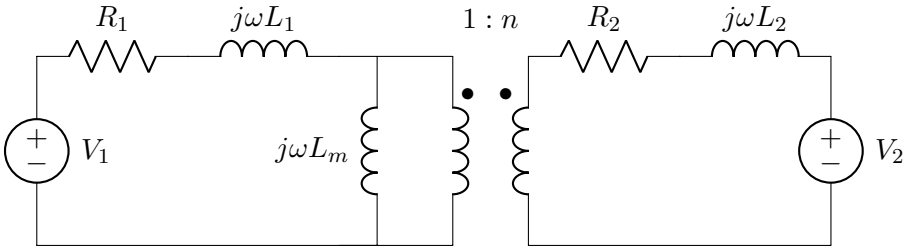
c)

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1000}{100} = 10$$
$$V_A = V_1 + V_2 = 1.1kV$$
$$V_B = 100V$$
$$I_B = I_1 + I_2 = 1 + 10 = 11A$$
$$I_A = I_1 = 1A$$
$$S = V_A I_A = V_B I_B$$
$$S = 1.1kV1A = 100V11A = 1.1MVA$$
$$\frac{S_{auto}}{S_{trafo}} = \frac{1.1MVA}{1MVA} = 1.1$$

d) Los cálculos son análogos.

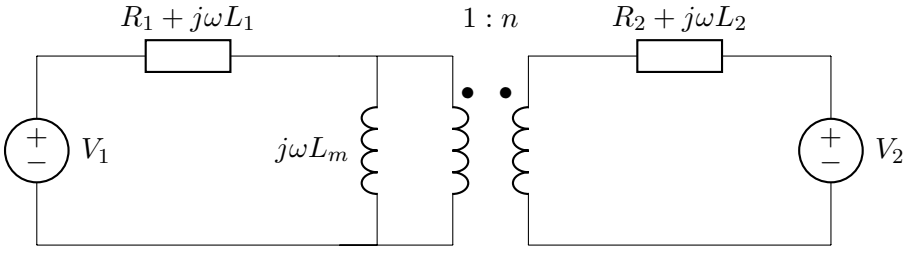
Problema 4: Transformador Ideal / Thevenin-Norton

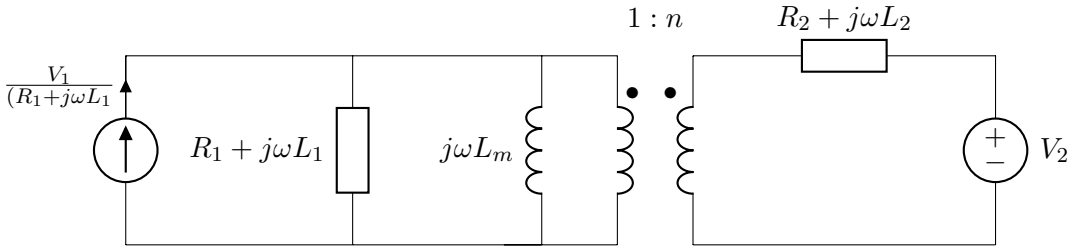
En el siguiente circuito, determine el circuito equivalente visto en los terminales de V_2.

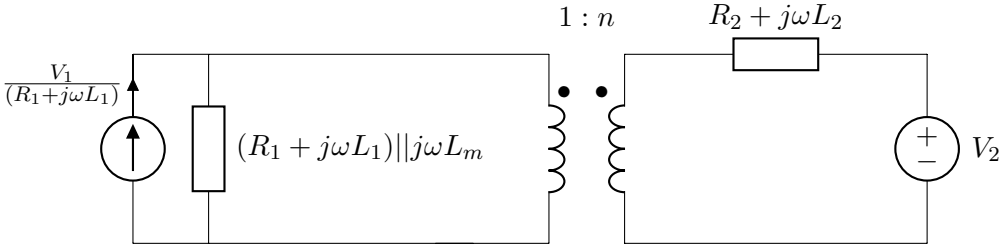


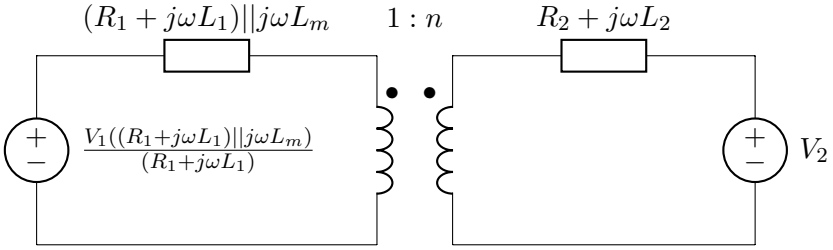
Solución:

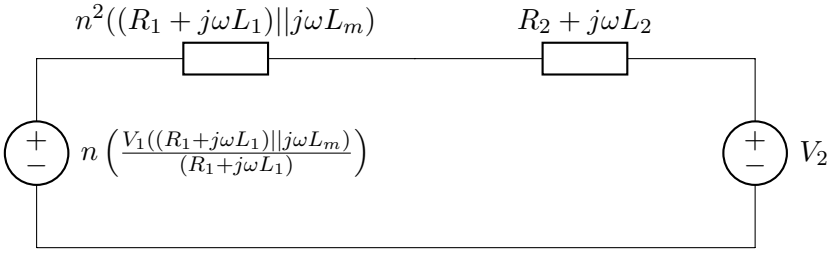
Realizamos transformaciones mediante el equivalente de Norton-Thevenin sucesivas:




$1:n$
$R_2 + j\omega L_2$
$\frac{V_1}{(R_1+j\omega L_1}$
$R_1 + j\omega L_1$
$j\omega L_m$
V_2


$1:n$
$R_2 + j\omega L_2$
$\frac{V_1}{(R_1+j\omega L_1)}$
$(R_1 + j\omega L_1)||j\omega L_m$
V_2


$(R_1 + j\omega L_1)||j\omega L_m$
$1:n$
$R_2 + j\omega L_2$
$\frac{V_1((R_1+j\omega L_1)||j\omega L_m)}{(R_1+j\omega L_1)}$
V_2


$n^2((R_1 + j\omega L_1)||j\omega L_m)$
$R_2 + j\omega L_2$
$n\left(\frac{V_1((R_1+j\omega L_1)||j\omega L_m)}{(R_1+j\omega L_1)}\right)$
V_2