IEE2123-1 Circuitos Eléctricos - 1er Semestre 2018
Profesor: Daniel Olivares Q.
Ayudantes: Christian Escobar Nicolás Garrido Alonso Lizana
Maximiliano Rivera Rodrigo Troncoso

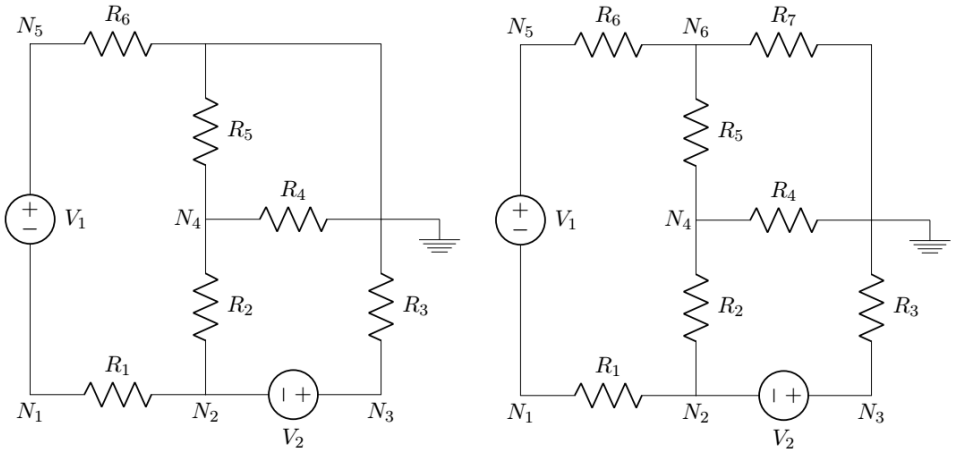
Tarea 3

Enunciado de tarea, Método de Nodos y Mallas
Fecha de Entrega: Día XX de XXXXX hasta las 23:59 horas.
Mail ayudante encargado: ajlizana@uc.cl

- La Tarea debe ser subida en formato .pdf al Siding, junto a los archivos adjuntos necesarios en un formato .rar o .zip.
- No se aceptarán fotografías de tareas escritas a mano. Solo serán revisadas tareas escritas en editor de texto (imágenes, diagramas, esquemáticos, etc. podrán ser hechas a mano).
- Existirá un bono de +0.5 pts. por tarea si se escribe en LaTeX.
- Evite entregar tareas de más de 10 MB de peso debido a imágenes de alta resolución.

Problema 1

Considere la siguiente topología circuital:



a) Encuentre la matriz obtenida por el método de nodos

Considere ahora el mismo circuito, pero con una resistencia R_7.

b) Resuelva por método de mallas

c) Resuelva por método de nodos

d) ¿Cuál método es mas apropiado para este circuito en particular?¿qué implicó el agregar R_7 para el método de nodos?¿y para el método de mallas?

Solución:

Determinamos que los nodos N_1-N_5 y los nodos N_2-N_3 forman supernodos porque poseen una fuente que los une. De esta forma, las ecuaciones del circuito son:

Supernodo 1(N_1-N_5):

$$\frac{v_5}{R_6} + \frac{v_1 - v_2}{R_1} = 0 \tag{1}$$

Supernodo 2(N_2-N_3):

$$\frac{v_2 - v_4}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_3} = 0 \tag{2}$$

Nodo N_4:

$$\frac{v_4}{R_5} + \frac{v_4}{R_4} + \frac{v_4 - v_2}{R_2} = 0 \tag{3}$$

Relación v_1-v_5:

$$v_5 - v_1 = V_1 \tag{4}$$

Relación v_2-v_3:

$$v_3 - v_2 = V_2 \tag{5}$$

De esta forma, el sistema matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R1||R2} & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R2||R3||R5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Al agregar la resistencia R_7, en el caso de la matriz de nodos, se agrega además el nodo N_6, por ende, la matriz aumenta en una dimensión.

Nodo N_6:

$$\frac{v_6}{R_7} + \frac{v_6 - v_4}{R_5} + \frac{v_6 - v_5}{R_6} = 0 \tag{6}$$

Los cambios en el nodo N_5 y N_4 se realizan directamente en la matriz, quedando el nuevo sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R1||R2} & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R2||R3||R5} & 0 & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_5||R_6||R_6} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la resistencia R_7 en la matriz de mallas simplemente implica un elemento más en la malla superior derecha:

Malla $2(R_4 - R_5 \rightarrow R_4 - R_5 - R_7)$:

$$-R_5(i_2 - i_1) - R_7 i_2 - R_4(i_2 - i_3) = 0 \tag{7}$$

Entonces, el sistema matricial es:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 + R_6 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_4 + R_5 + R_7 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_2 \end{pmatrix}$$

Claramente, para este caso, el método más fácil correspondía al método de mallas ya que es un sistema de 3x3.

Problema 2

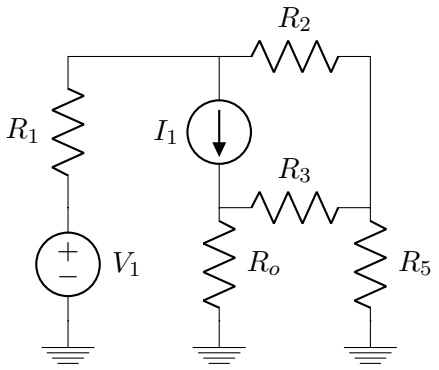
Muchos circuitos electrónicos tienen problemas por conexiones a tierra indeseadas. En el circuito a continuación, originalmente el nodo N_o no tenía conexión a tierra, pero un problema de impresión de la placa conectó N_o con tierra por medio de la resistencia R_o.

a) Encuentre la matriz correspondiente al método de mallas.

b) Determine la corriente I_o que circula por la corriente R_o. Considere los siguientes valores:
(R_1=1k Ω, R_2=R_5=2k Ω, R_3=0.5k Ω, R_o=20 Ω, V_1=5 V,I_1=10 A).

c) Compruebe el resultado de la pregunta b) usando Spice.

d) Determine la potencia que disipa la resistencia R_o



Solución: Debido a la presencia de una fuente de corriente en una de las mallas, nos vemos en la necesidad de definir una supermalla. Como se pueden definir varias mallas distintas para un mismo circuito, a continuación se presenta uno de los posibles desarrollos (a pesar de eso, todos deben obtener el mismo resultado)

Definimos las siguientes mallas:

Malla 1: V_1-R_1-R_2-R_3-R_o
Malla 2: R_o-R_3-R_4
Malla 3: V_1-R_1-I_1-R_o

La malla 3 ya tiene definida su corriente, la cual corresponde a I_1, $i_3 = I_1$. De esta forma, el sistema se reduce a dos ecuaciones:

Malla 1:

$$R_1(i_1 + i_3) + R_2 i_1 + R_3(i_1 - i_2) + R_o(i_1 + i_3 - i_2) = V_1 \tag{8}$$

Malla 2:

$$R_3(i_2 - i_1) + R_4 i_2 + R_o(i_2 - i_1 - i_3) = 0 \tag{9}$$

Reordenando, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2+R_3+R_o & -R_3-R_o \\ -R_3-R_o & R_3+R_4+R_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - i_3(R_1+R_o) \\ R_o i_3 \end{pmatrix}$$

La potencia disipada por una resistencia está dada por:

$$P = RI_R^2$$

reemplazando los valores de R_o y I_o obtenemos:

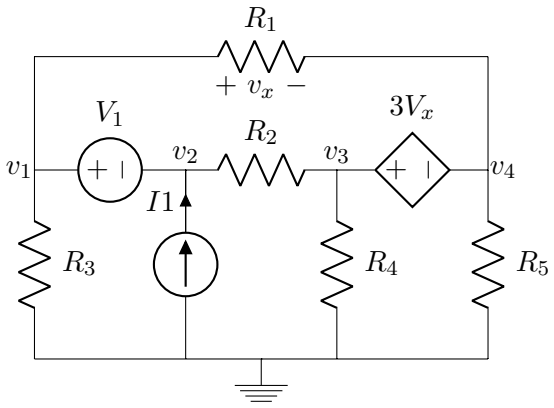
$$P = R_o I_o^2 = 20 \cdot (7{,}56)^2 = 1{,}143\ kW \tag{10}$$

Problema 3

Pedrito, un inalcanzable ingeniero, necesita determinar los voltajes v_1, v_2, v_3 y v_4 del siguiente circuito. Lamentablemente, no está seguro de que los valores que obtuvo son los correctos y le pide ayuda a usted para determinarlos.

a) Determine la matriz obtenida por el método de nodos.

b) Solucione el sistema matricial con algún programa computacional (Mathematica, Matlab, etc) y determine los valores de v_1, v_2, v_3 yv_4.



Solución: Entre los nodos correspondientes a los voltajes v_1 y v_2 hay una fuente de voltaje, al igual que entre los voltajes v_3 y v_4, por ende, los consideramos a ambos como supernodos. De esta forma, las ecuaciones que describen el circuito son:

Supernodo 1 (v_1-v_2):

$$\frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1 - v_4}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = I_1 \tag{11}$$

Supernodo 2 (v_3-v_4):

$$\frac{v_3}{R_4} + \frac{v_4}{R_5} + \frac{v_4 - v_1}{R_1} + \frac{v_3 - v_2}{R_2} = 0 \tag{12}$$

Por otro lado, las fuentes de voltaje nos relacionan los voltajes de sus respectivos nodos según las siguientes ecuaciones:

Relación v_1-v_2 :

$$v_1 = v_2 + V_1 \tag{13}$$

Relación v_3-v_4:

$$v_3 = v_4 + 3V_x \tag{14}$$

Determinamos el voltaje v_x y reemplazamos en la ecuación (4)

$$v_x = v_1 - v_4 \tag{15}$$

$$v_3 = 3v_1 - 2v_4 \tag{16}$$

Finalmente, reordenamos estas ecuaciones y escribimos el sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1||R_3} & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2||R_4} & \frac{1}{R_1||R_5} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reemplazamos los valores en el sistema y obtenemos los voltajes:

$$v_1 = 26{,}67\ V$$
$$v_2 = 6{,}67\ V$$
$$v_3 = 173{,}33\ V$$
$$v_4 = -46{,}67\ V$$