TÉCNICAS CIRCUITALES PARA CALCULAR FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Lecturas adicionales:

- *Fast analytical techniques for electrical and electroncis circuits, Vatché Vorpérian, Cap. 2.*

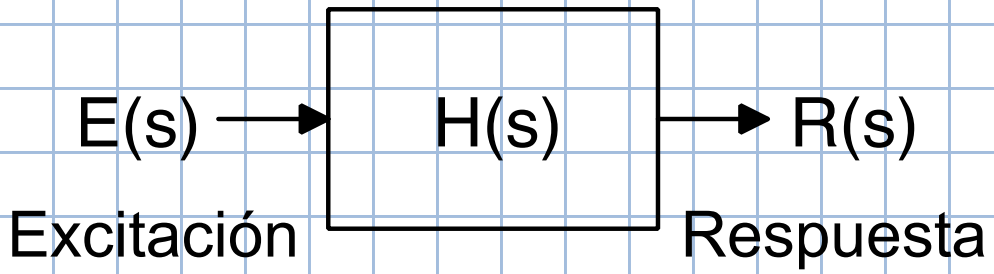
Introducción

En esta clase estudiaremos algunas propiedades de las funciones de transferencia de un circuito. También revisaremos brevemente algunas técnicas de análisis de circuitos que permiten determinar los polos y ceros de una función de transferencia de forma rápida y completamente intuitiva.

Las técnicas aquí vistas nos permitirán más adelante entender el origen y los fundamentos del *teorema del elemento extra* (EET) y *del teorema del N-ésimo elemento extra* (NEET).

Función de transferencia

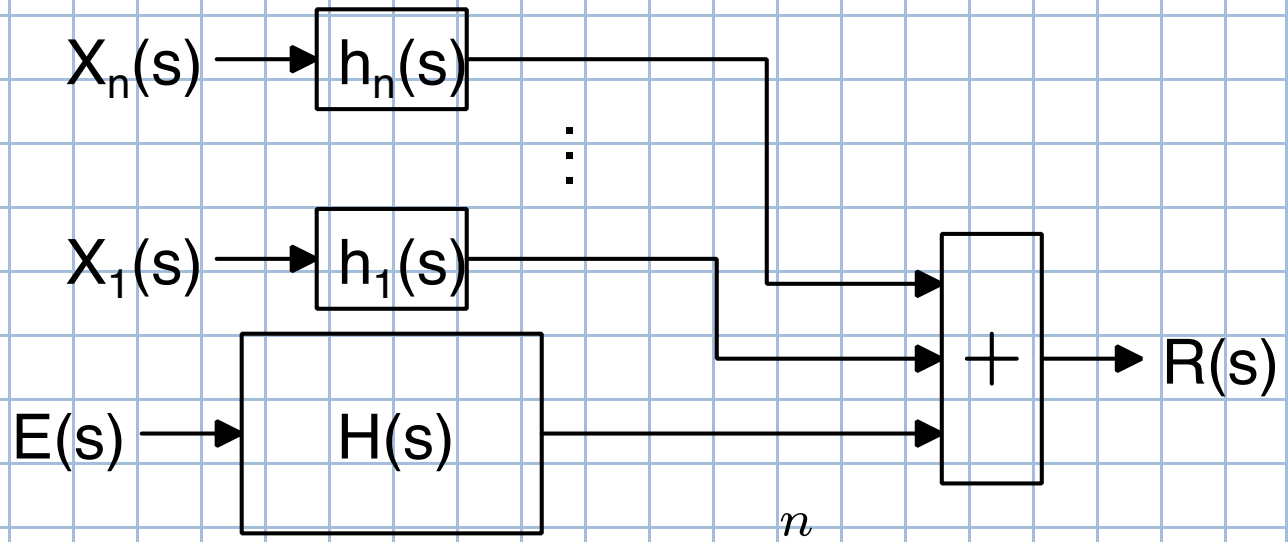
- Recordemos que en un circuito lineal invariante en el tiempo (LTI) con todas sus condiciones iniciales iguales a cero, una función de transferencia H(s) se define como:



$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

Función de transferencia

- Condiciones iniciales no nulas se comportan como excitaciones, y R(s) está dada por la superposición de estas excitaciones ponderadas por sus respectivas funciones de transferencia:



$$R(s) = H(s)E(s) + \sum_{i=1}^{n} X_i(s)h_i(s)$$

Función de transferencia

- Con condiciones iniciales nulas:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow I_C(s) = sCV_C(s)$$

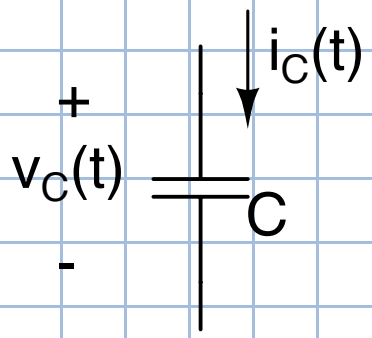
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow V_L(s) = sLI_L(s)$$

- Con condiciones iniciales ≠ 0:

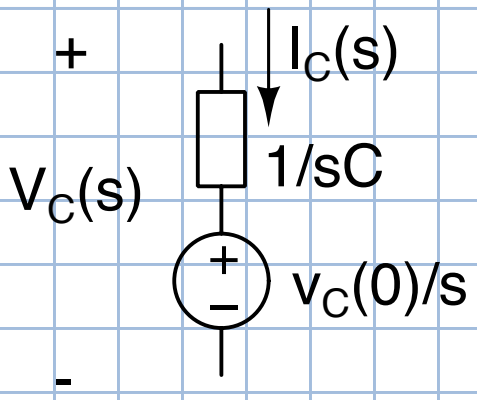
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s) - f(t=0)$$

Función de transferencia

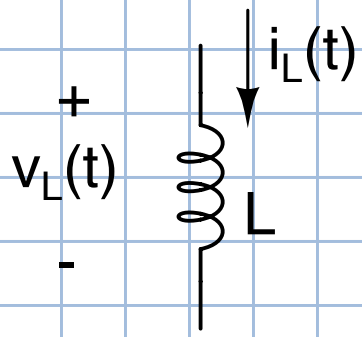
- Con condiciones iniciales ≠ 0:



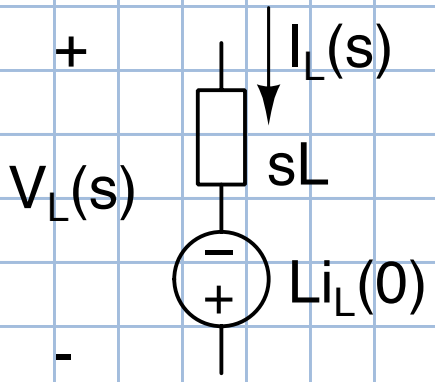
$\mathcal{L}\{\cdot\}$



$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}$$



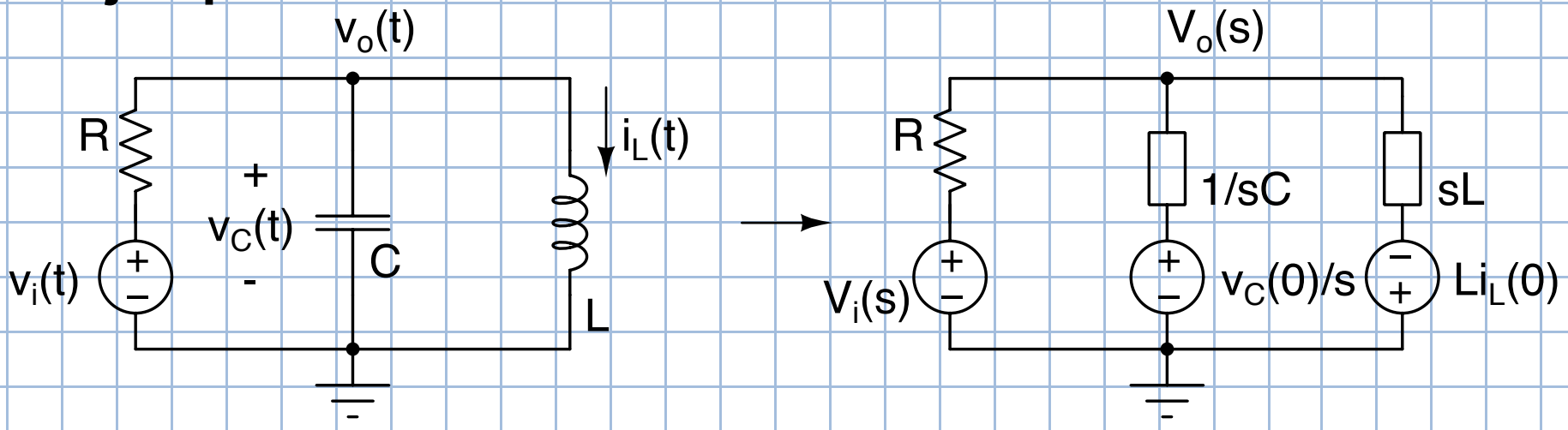
$\mathcal{L}\{\cdot\}$



$$V_L(s) = sLI_L(s) + Li_L(0)$$

Función de transferencia

- **Ejemplo**:



$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{sC}||sL}{R+\frac{1}{sC}||sL} V_i(s) + \frac{R||sL}{\frac{1}{sC}+R||sL} \frac{v_C(0)}{s} - \frac{R||\frac{1}{sC}}{sL+R||\frac{1}{sC}} Li_L(0)$$

$R(s) \quad H(s) \quad E(s) \quad h_1(s) \quad X_1(s) \quad h_2(s) \quad X_2(s)$

Fin ej.

Función de transferencia

- Dado que un circuito LTI está gobernado por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, H(s) está dado por el cociente entre dos polinomios:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

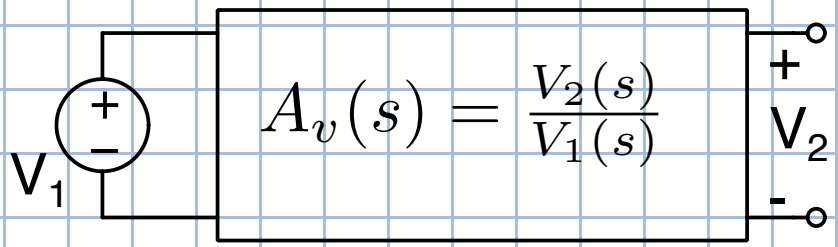
  - Las raíces de N(s) corresponden a los ceros de H(s).
  - Las raíces de D(s) corresponden a los polos de H(s).
- H(s) típicamente se expresa como:

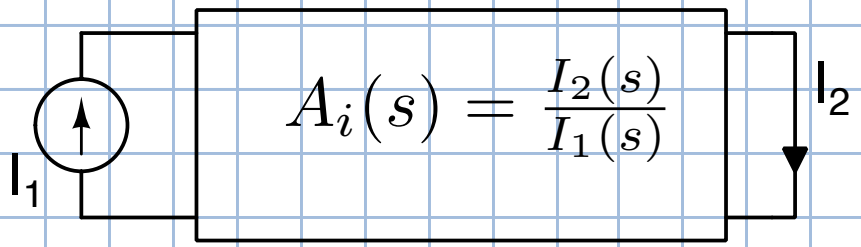
$$H(s) = H|_{s=0} \frac{1+a_1 s+a_2 s^2+\ldots+a_{n_z} s^{n_z}}{1+b_1 s+b_2 s^2+\ldots+b_{n_p} s^{n_p}}$$

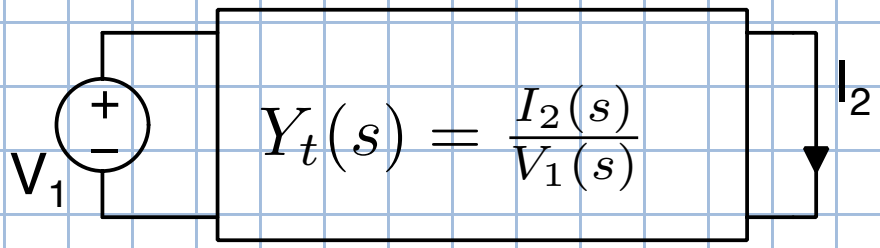
  - Aquí, tanto N(s) como D(s) corresponden a polinomios normalizados (a_0 y $b_0 = 1$).

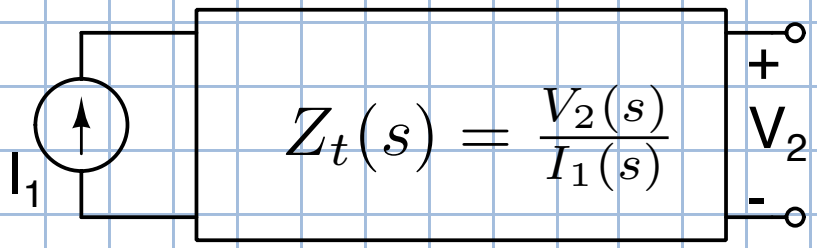
Tipos de funciones de transferencia

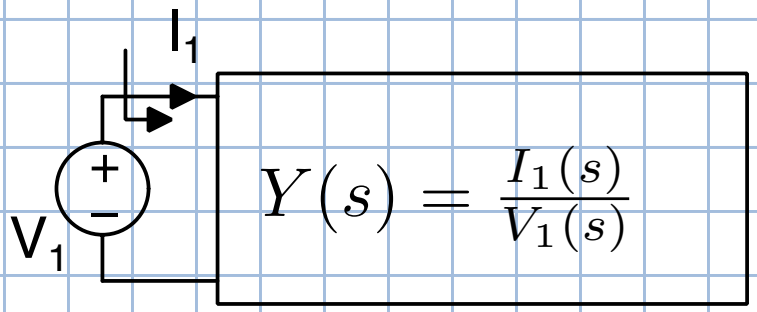
- En un circuito hay seis tipos de funciones de transferencia:

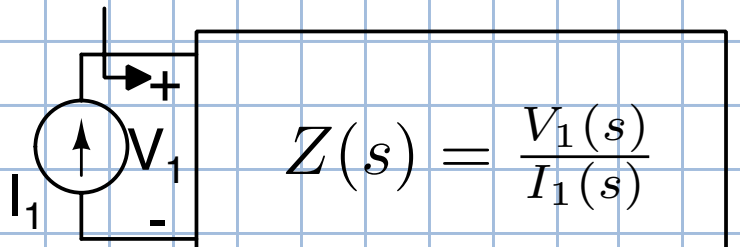






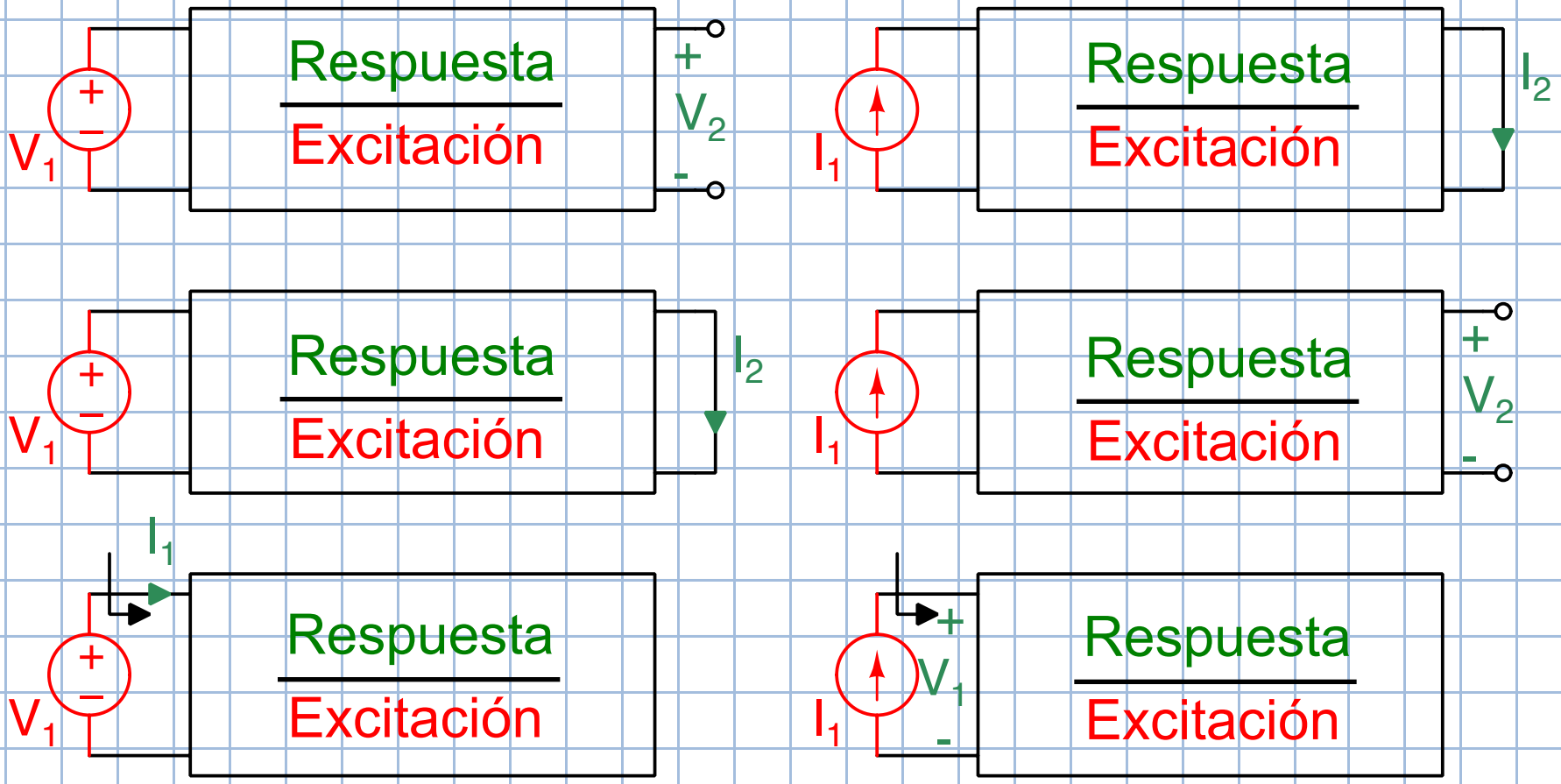






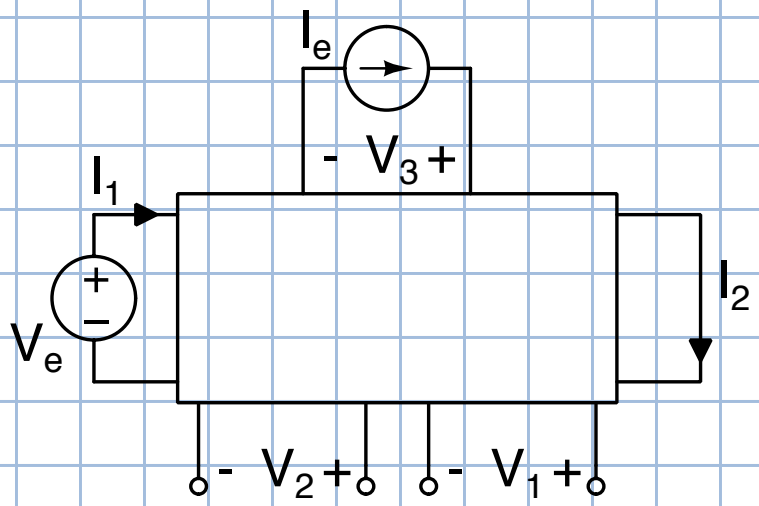
Tipos de funciones de transferencia

- En un circuito hay seis tipos de funciones de transferencia:

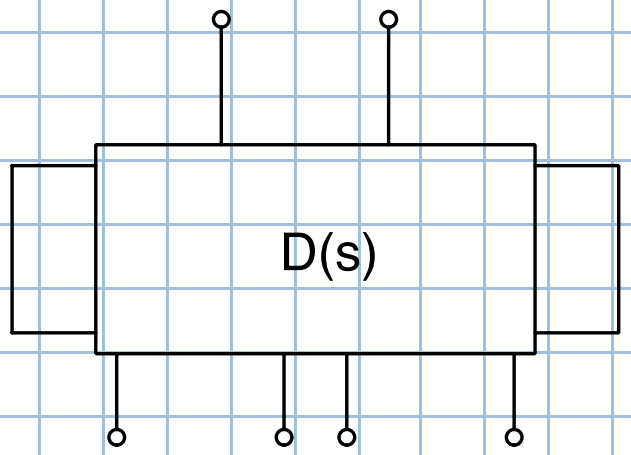


Determinación de polos

- D(s) está completamente determinado por la topología de un circuito, no por la excitación ni por la respuesta.
  - Independientemente de cómo un circuito es excitado o cuál de sus respuestas es observada, D(s) puede ser determinado haciendo E(s) = 0!



E(s)=0 →



Esta red tiene un D(s) asociado

Determinación de polos

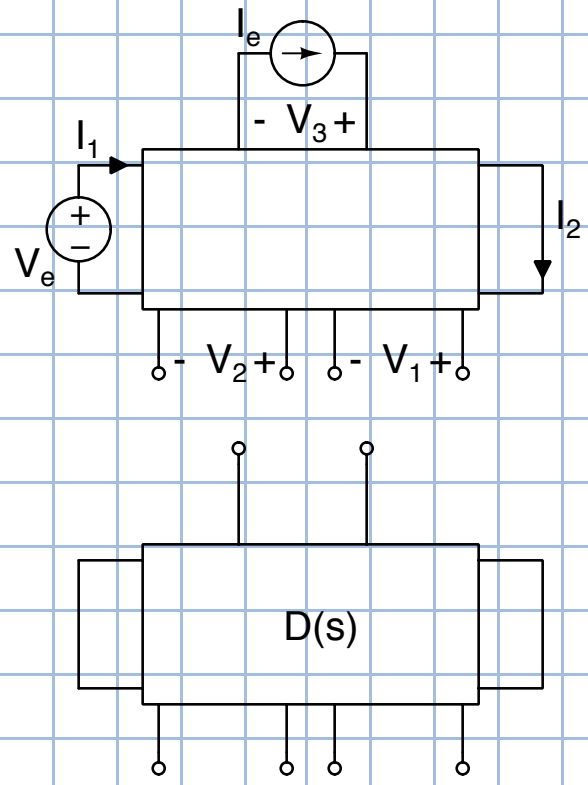
- Como D(s) está asociado a la topología, las siguientes 10 funciones de transferencia *tienen el mismo denominador*:

$$\left.\frac{V_n(s)}{V_e(s)}\right|_{I_e(s)=0} = \frac{N_{A_{vn}}(s)}{D(s)},\ n=1,2,3$$

$$\left.\frac{I_n(s)}{V_e(s)}\right|_{I_e(s)=0} = \frac{N_{Y_{tn}}(s)}{D(s)},\ n=1,2$$

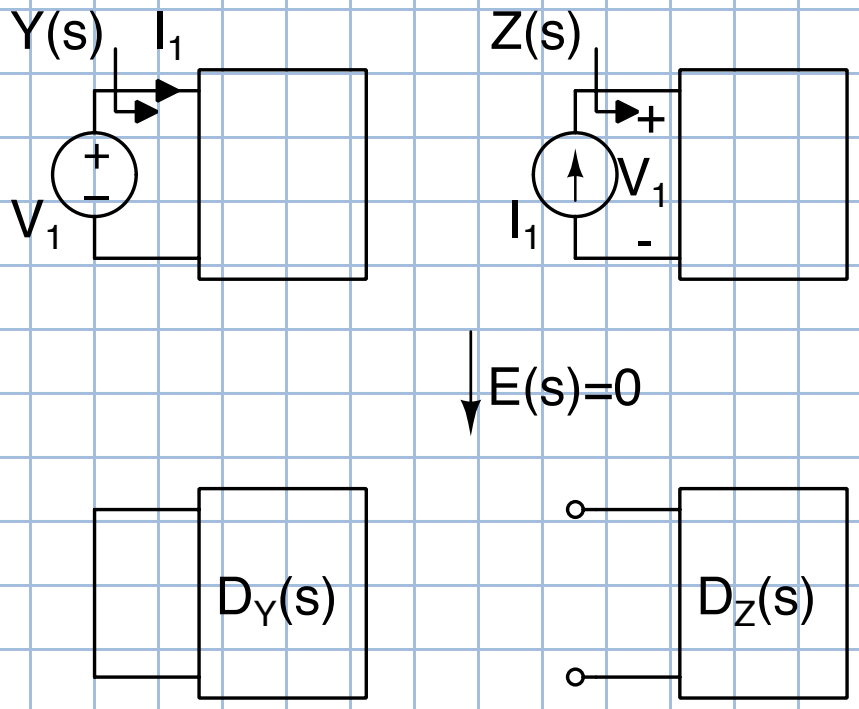
$$\left.\frac{V_n(s)}{I_e(s)}\right|_{V_e(s)=0} = \frac{N_{Z_{tn}}(s)}{D(s)},\ n=1,2,3$$

$$\left.\frac{I_n(s)}{I_e(s)}\right|_{V_e(s)=0} = \frac{N_{A_{in}}(s)}{D(s)},\ n=1,2$$



Determinación de polos

- Y(s) y Z(s) de un circuito *no tienen el mismo D(s)*.
  - Para calcular Y(s) se excita el circuito con una fuente de voltaje, mientras que para calcular Z(s) se excita el circuito con una fuente de corriente.



$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{N_Y(s)}{D_Y(s)}$$

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{N_Z(s)}{D_Z(s)}$$

Claramente:

$$N_Y(s) = D_Z(s)$$

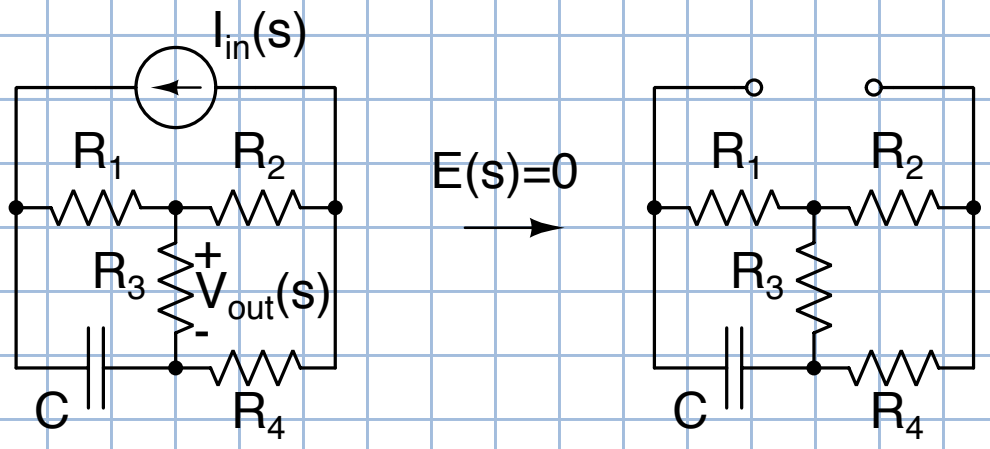
$$D_Y(s) = N_Z(s)$$

Determinación de polos

- Para determinar de forma inteligente D(s) en un circuito de orden N, es necesario aplicar NEET.
  - Por ahora sólo revisaremos redes de primer orden y veremos cómo es que D(s) puede ser calculado haciendo E(s) = 0 (los fundamentos son los mismos para sistemas de mayor orden).
  - Más adelante estudiaremos el EET y enunciaremos el NEET.

Determinación de polos

- **Ejemplo**: calcular los polos de $Z_t(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{in}(s)}$



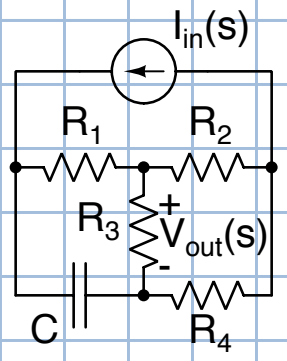
$$D(s) = 1 + s\tau$$

$$D(s) = 1 + sC\left((R_2 + R_4)||R_3 + R_1\right)$$

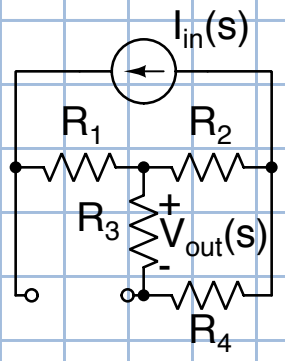
- En un sistema de primer orden el polo está dado por el producto de C y la resistencia equivalente vista desde C.

Determinación de polos

- También se pueden calcular fácilmente $Z_t(0)$ y $Z_t(\infty)$:

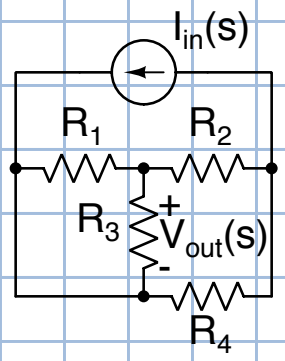


s=0



$$Z_t(0) = R_3 \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4}$$

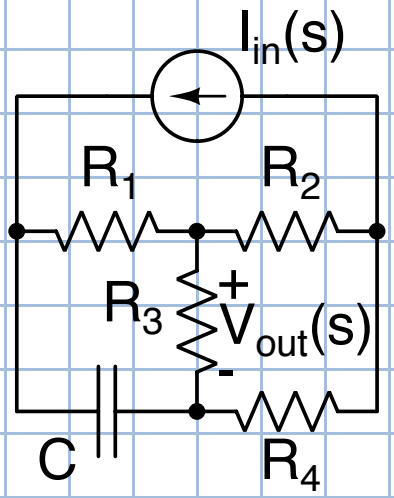
s= ∞



$$Z_t(\infty) = -R_1||R_3 \frac{R_4}{R_4+R_2+R_1||R_3}$$

Determinación de polos

- Por lo tanto:



Vamos por este polinomio ahora!

$$Z_t(s) = R_3 \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4} \frac{N_{Z_t}(s)}{1+sC((R_2+R_4)||R_3+R_1)}$$

$$N_{Z_t}(0) = 1$$

Fin ej.

Determinación de ceros

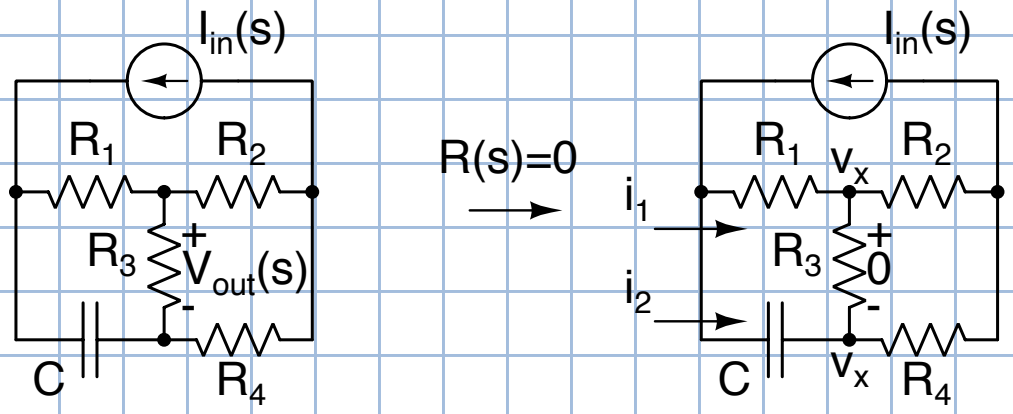
- N(s) sí depende de la entrada y la salida del circuito. **Los ceros de una función de transferencia corresponden a las condiciones en el circuito que llevan a anular la respuesta observada** (R(s)=0).
  - Al hacer R(s) = 0 el circuito se simplifica mucho y el cálculo de los ceros se hace bastante simple!
- Una vez encontrados todos los s_k para los cuales $R(s_k)=0$, N(s) se calcula como:

$$N(s) = \prod_k n_k(s),\ n_k(s) = 1 - \frac{s}{s_k}$$

- Los ceros de dos funciones de transferencia distintas de una misma topología no están necesariamente relacionados.

Determinación de ceros

- **Ejemplo**: siguiendo con el ejercicio anterior:
  - R(s) = 0 implica que $V_{out}(s) = 0$ → no circula corriente por R_3.
  - Los voltajes en los bornes de R_3 son iguales (cortocircuito virtual).

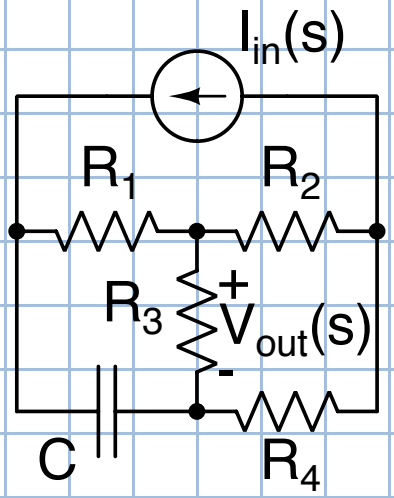


$$\left.\begin{aligned} R_1 i_1 &= \frac{i_2}{s_1 C} \\ R_2 i_1 &= R_4 i_2 \end{aligned}\right\} \quad s_1 = \frac{R_2}{C R_1 R_4}$$

En este caso hay un sólo cero!

Determinación de ceros

- Por lo tanto:



$$N_{Z_t}(s) = 1 - \frac{s}{s_1} = 1 - s\frac{R_1 R_4 C}{R_2}$$

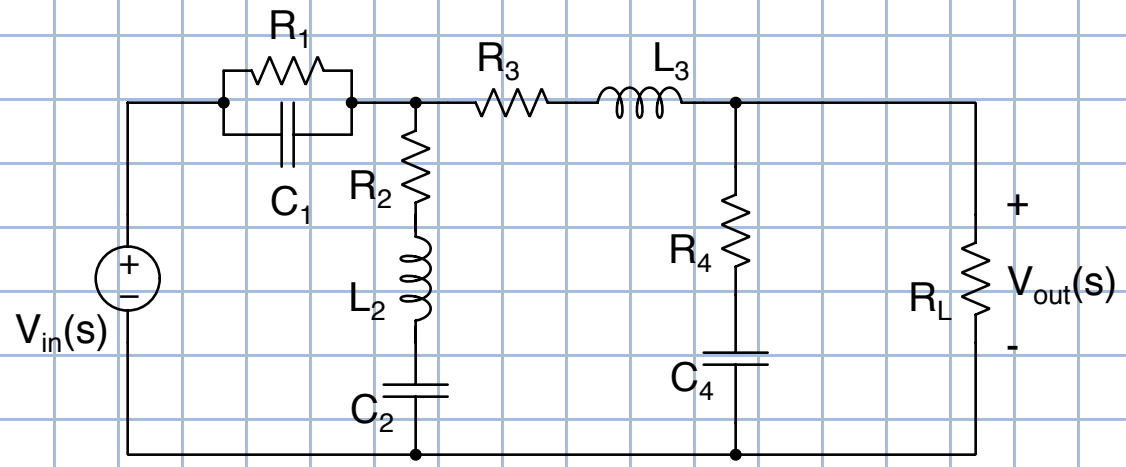
$$Z_t(s) = R_3 \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4} \frac{1-s\frac{R_1 R_4 C}{R_2}}{1+sC((R_2+R_4)||R_3+R_1)}$$

Fin ej.

Determinación de ceros

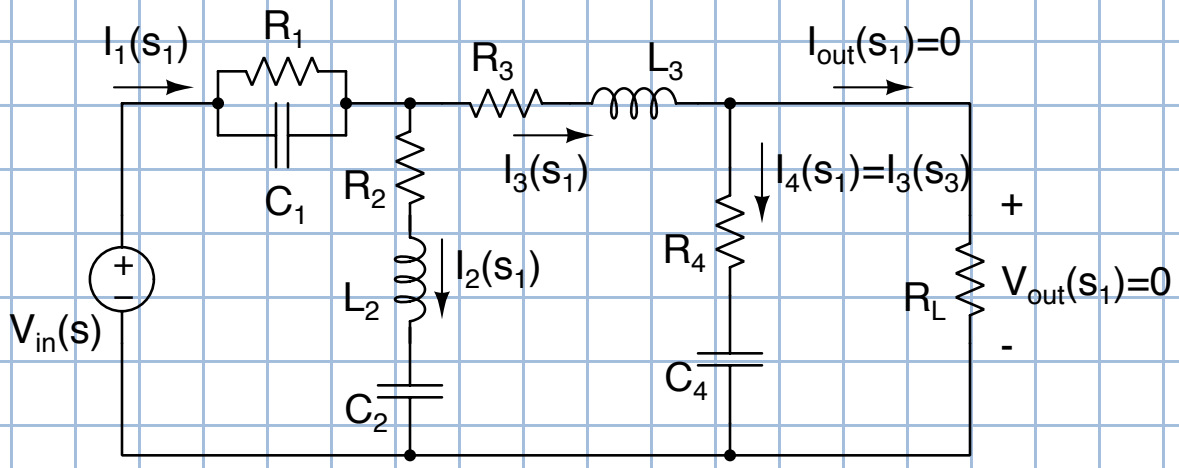
- **Ejemplo**: calcular N(s) de la siguiente función de transferencia

$$A_v(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$$



Determinación de ceros

- Partimos por anular la respuesta:



- Si $I_{out}(s_1)=0$, entonces $I_3(s_1) = I_4(s_1)$. Para que todo I_3 se vaya por la rama 4 (y no por la rama de salida), la impedancia de esta rama evaluada en s_1 debe ser nula:

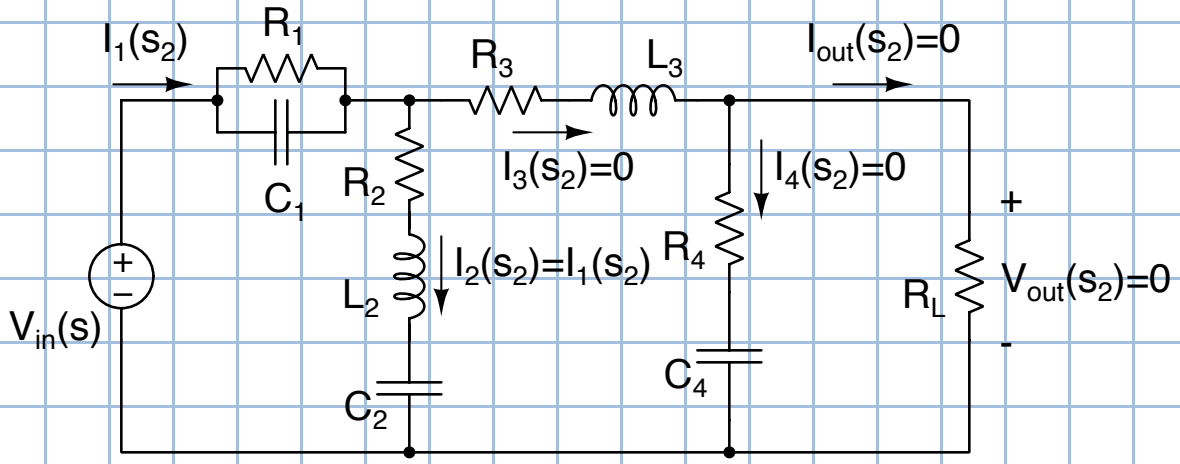
$$Z_4(s_1) = R_4 + \frac{1}{s_1 C_4} = 0 \rightarrow s_1 = -\frac{1}{R_4 C_4}$$

Determinación de ceros

- También podría ocurrir que $I_{out}(s_2)=0$, $I_4(s_2) = 0$ e $I_3(s_2) =0$, lo que implica que todo $I_1(s_2)$ se vaya por la rama 2 y no por la rama 3. Para esto, la impedancia de la rama 2 evaluada en s_2 debe ser nula:

$$Z_2(s_2) = R_2 + s_2 L_2 + \frac{1}{s_2 C_2} = \frac{1+s_2 C_2 R_2 + s_2^2 L_2 C_2}{s_2 C_2} = 0$$

$$\rightarrow n_2(s) = 1 + sC_2R_2 + s^2 L_2 C_2$$

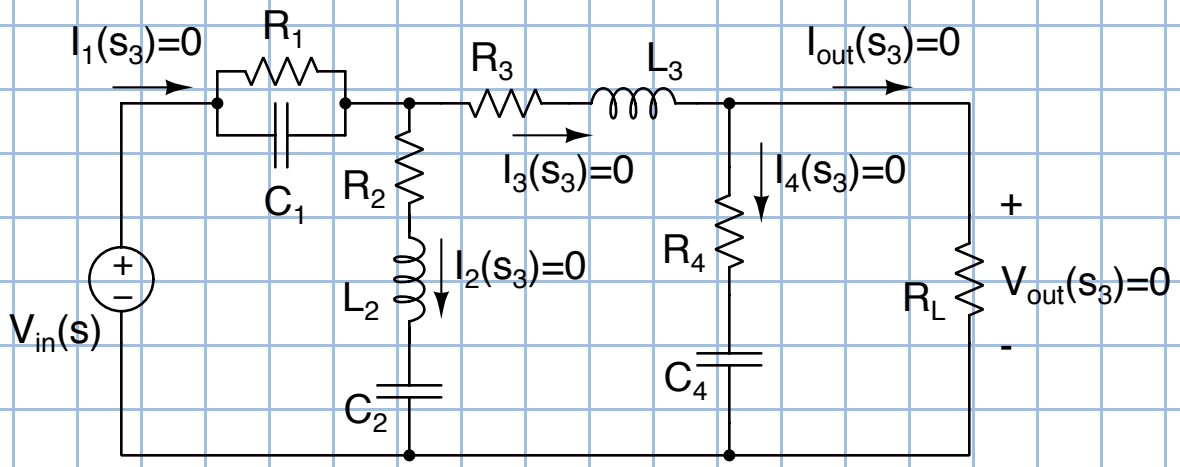


Los dos ceros de este polinomio corresponden a ceros de $A_v(s)$!

Determinación de ceros

- Finalmente, también podría ocurrir que $I_1(s_3)=0$ (y por ende el resto de las corrientes también). Para esto, la impedancia de la rama 1 a s_3 debe ser infinita:

$$Z_1(s_3) = \frac{R_1}{1+s_3 C_1 R_1} = \infty \rightarrow s_3 = -\frac{1}{R_1 C_1}$$

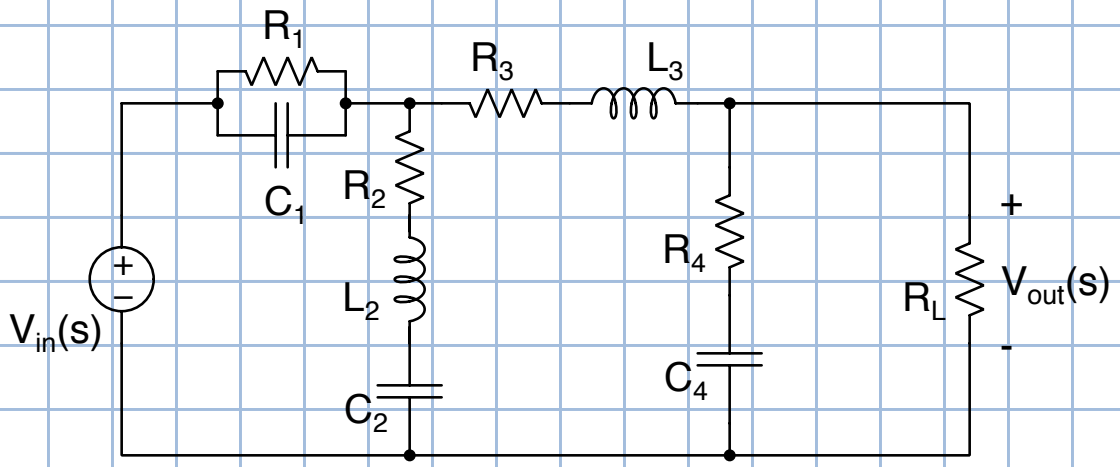


Determinación de ceros

- Por lo tanto:

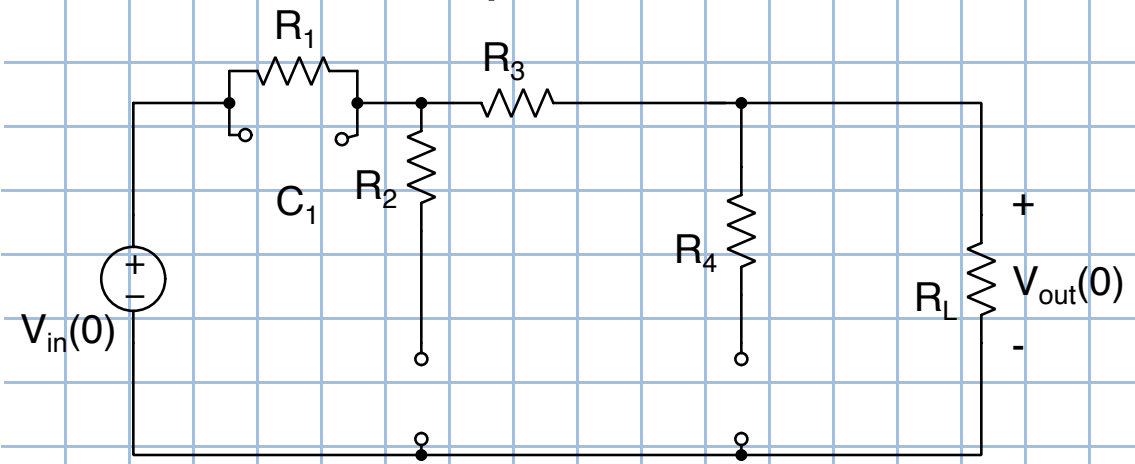
$$n_1(s) = 1 + sC_4R_4$$
$$n_2(s) = 1 + sC_2R_2 + s^2L_2C_2$$
$$n_3(s) = 1 + sC_1R_1$$

$$N_{A_v}(s) = n_1(s)n_2(s)n_3(s)$$

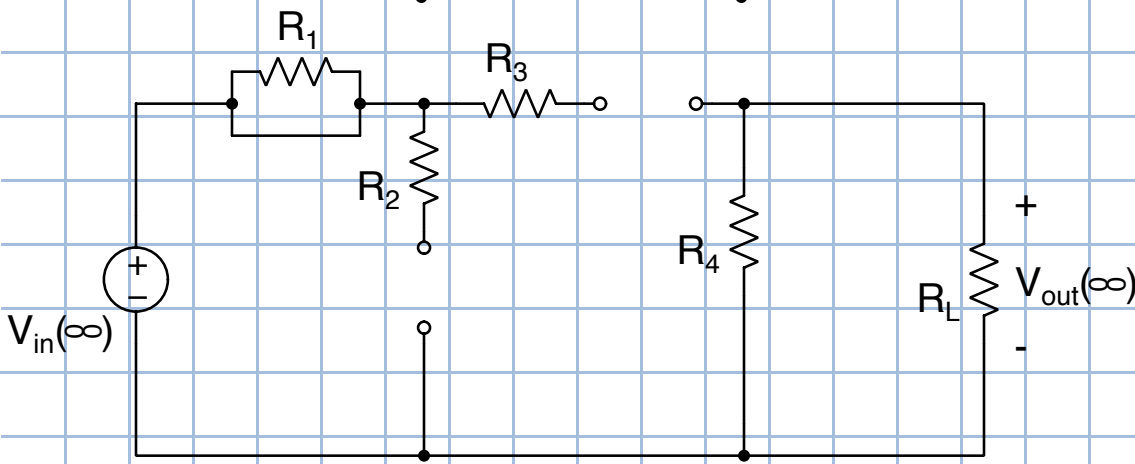


Determinación de ceros

- También se pueden calcular fácilmente $A_v(0)$ y $A_v(\infty)$:



$$A_v(0) = \frac{R_L}{R_1 + R_3 + R_L}$$



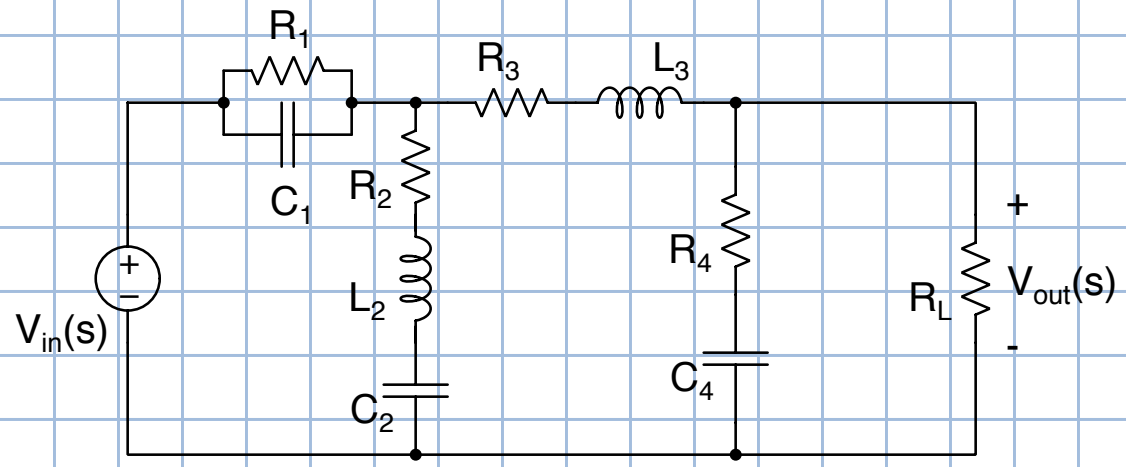
$$A_v(\infty) = 0$$

Determinación de ceros

- Así:

$$A_v(s) = \frac{R_L}{R_1+R_3+R_L} \frac{(1+sC_4R_4)\left(1+sC_2R_2+s^2L_2C_2\right)(1+sC_1R_1)}{D_{A_v}(s)}$$

$$D_{A_v}(0) = 1$$



Fin ej.