IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 09: Solución de Circuitos RC y RL

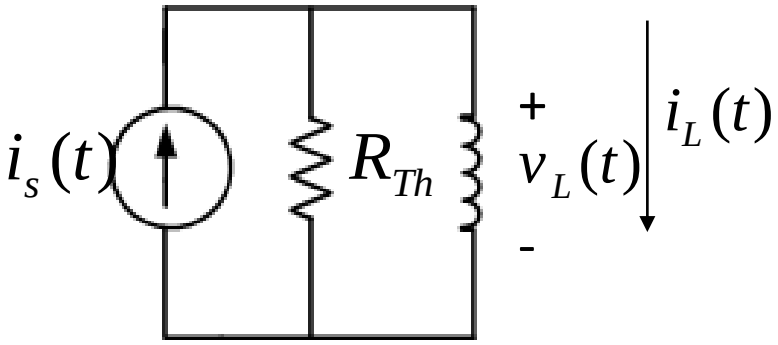
Contenidos:

1. Solución de la ecuación diferencial
2. Resolución de la ecuación diferencial
3. Ejemplos

Capítulo 7 Dorf 6ª Edición

1. Solución de la ecuación diferencial

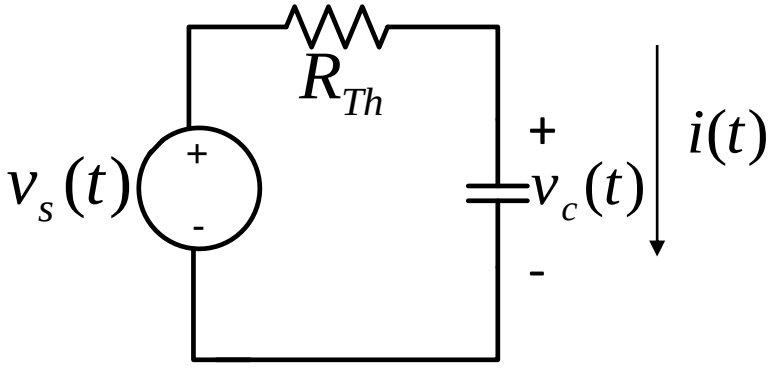
- **Circuito RC y RL:**
  - Los voltajes y corrientes de estos circuitos satisfacen una ecuación diferencial del tipo:



Ec. Dif. En $i_L(t)$

$$i_s(t) = \frac{v_L(t)}{R_{Th}} + i_L(t) \quad ; \quad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L(t) = \frac{R_{Th}}{L} i_s(t)$$



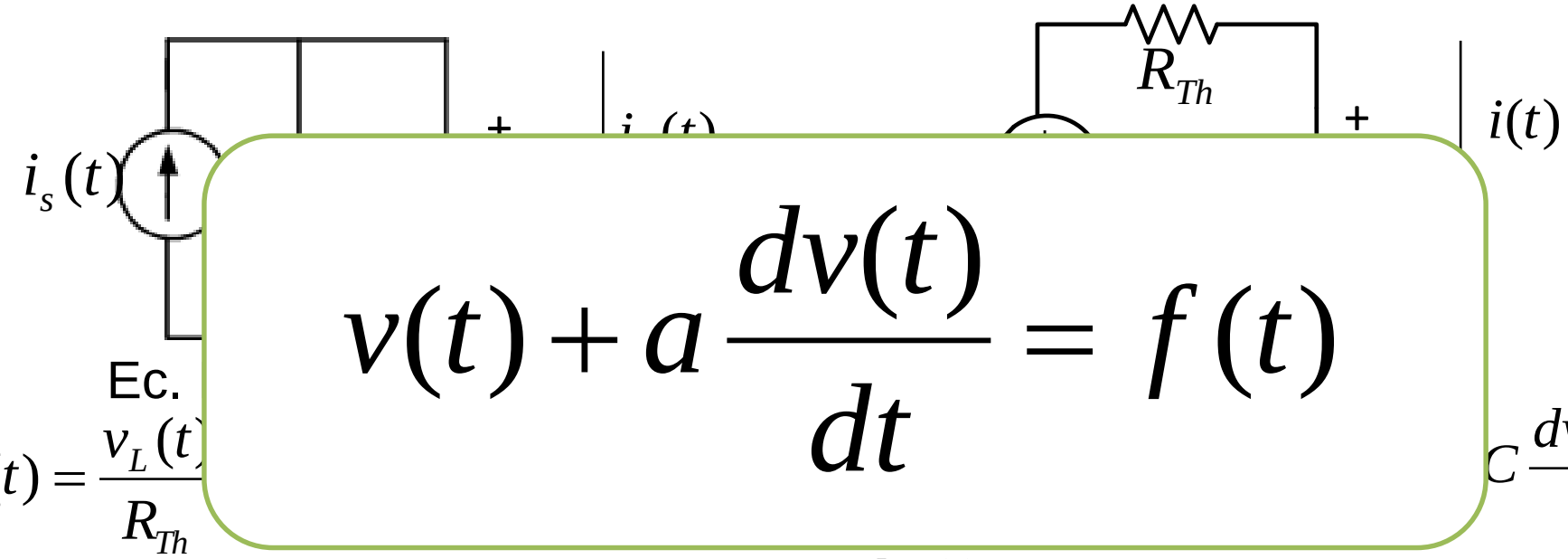
Ec. Dif. en $v_C(t)$

$$v_s(t) = R_{Th} i(t) + v_c(t) \quad ; \quad i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} v_s(t)$$

1. Solución de la ecuación diferencial

- **Circuito RC y RL:**
  - Los voltajes y corrientes de estos circuitos satisfacen una ecuación diferencial del tipo:



$$v(t) + a\frac{dv(t)}{dt} = f(t)$$

Ec.

$$i_s(t) = \frac{v_L(t)}{R_{Th}}$$

$$C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L(t) = \frac{R_{Th}}{L} i_s(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} v_s(t)$$

1. Solución de la ecuación diferencial

- **Circuito RC y RL:**
  - Los voltajes y corrientes de estos circuitos satisfacen una ecuación diferencial del tipo:

$$v(t) + a\frac{dv(t)}{dt} = f(t)$$

- **Solución:**
  - La solución de esta ecuación está dada por:

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

1.1. Solución particular:

- **Solución particular:** $v_p(t)$ normalmente corresponde a la suma ponderada de $f(t)$ y su primera derivada, luego:

$$si \quad f(t) = A \rightarrow v_p(t) = B$$

$$si \quad f(t) = \alpha \sin(\omega t) \rightarrow v_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

- **Constantes:** las constantes que aparecen en la respuesta se determinan reemplazando la solución particular en la ecuación diferencial (método de los coeficientes indeterminados).

1.2. Solución homogénea

- **Solución homogénea:** corresponde a solucionar la ec. Diferencial igualada a cero, y es de la forma:

$$v_h(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

- **Constantes:** la constante K se determina con las **condiciones iniciales** del problema.

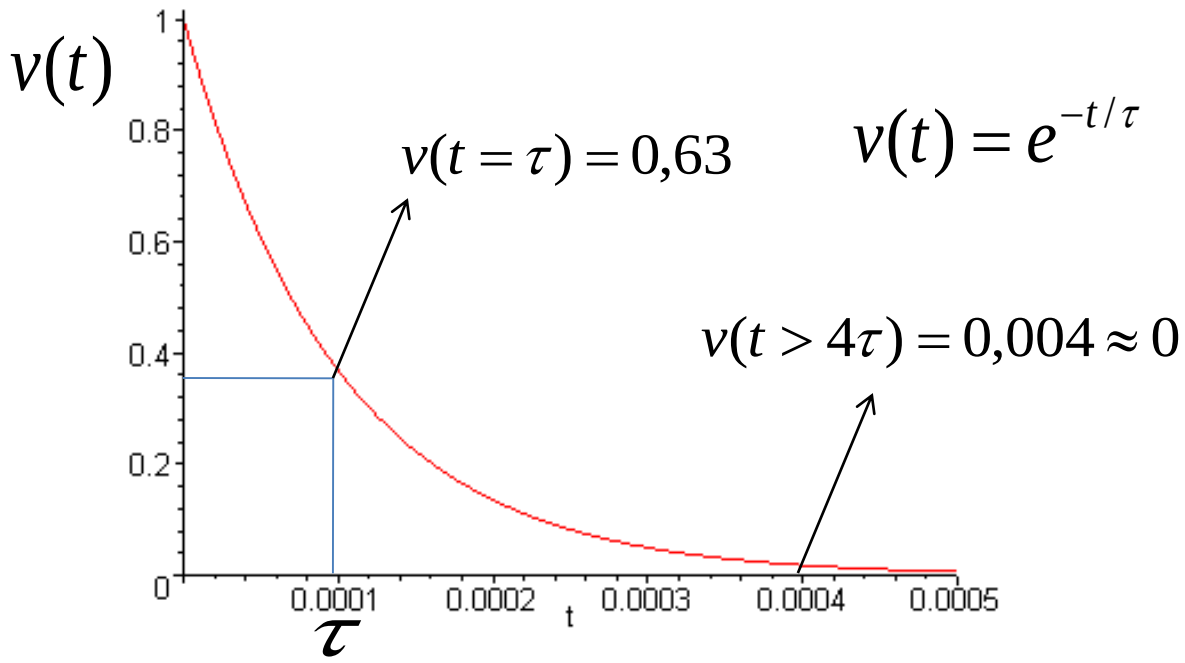
- **La constante τ**:

  - Circuito $R_{Th}C$ → $\tau = R_{Th}C$
  - Circuito $R_{Th}L$ → $\tau = L/R_{Th}$

  ¿Cual es la intuición? ¿Unidades?

1.2. Solución homogénea

- **La constante τ**:
  - Corresponde al tiempo necesario para que la solución haya decaído al 36,7% del valor inicial.
  - Si ha transcurrido un tiempo superior a más o menos 4τ, se dice que se ha alcanzado el régimen permanente.



2. Resolución de la ecuación diferencial

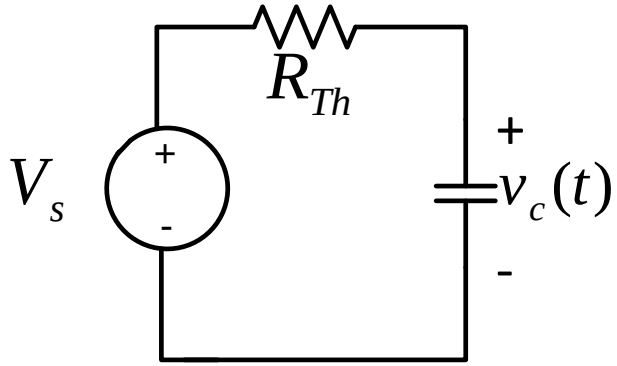
- **Métodos de solución:** básicamente, el problema con **fuentes constantes** se puede enfrentar de dos maneras:

  - Resolviendo directamente la ecuación diferencial.
    - Escribir la ecuación diferencial
    - Calcular la Respuesta Homogénea
    - Calcular Rpta particular,
    - Utilizar condiciones iniciales en la respuesta completa

  - Aplicando un método sistemático paso a paso (DC)
    - i.e. sale al ojo!

2.1. Resolución directa:
Caso RC.

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} V_s$$



- **Solución homogénea:**

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = 0$$

$$\int \frac{dv_c}{v_c} = -\int \frac{dt}{R_{Th}C} \quad \Rightarrow \quad v_c^{\,h}(t) = Ke^{-\frac{t}{R_{Th}C}}$$

$$\ln(v_c(t)) = -\frac{t}{R_{Th}C} + K$$

Mas fácil con el Operador s o D!

2.1. Resolución directa:
Caso RC.

- **Solución particular:** como la fuente es de valor constante, la solución particular será del mismo tipo, o sea:

$$v_c^{\,p} = A$$

Determinamos A:

$$\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{0} + \frac{1}{R_{Th}C} A = \frac{V_s}{R_{Th}C}$$

$$A = V_s$$

$$v_c^{\,p} = V_s$$

2.1. Resolución directa:
Caso RC.

- **Solución completa:**

$$v_c(t) = v_c^{\,h}(t) + v_c^{\,p}(t) = Ke^{-\frac{t}{R_{Th}C}} + V_s$$

Determinamos K con de la condición inicial:

$$v_c(0) = Ke^{-\frac{0}{R_{Th}C}} + V_s \Rightarrow K = v_c(0) - V_s$$

Finalmente:

$$v_c(t) = (v_c(0) - V_s)e^{-\frac{t}{R_{Th}C}} + V_s$$

2.1. Resolución directa

- **Resumen para circuitos RC y RL con fuentes contantes:**

  - Circuito RC serie:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C} v_c(t) = \frac{1}{R_{Th}C} V_s \Rightarrow v_c(t) = (v_c(0) - V_s) e^{-\frac{t}{R_{Th}C}} + V_s$$

  - Circuito RL paralelo (analogo al ant):

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_n}{L} i_L(t) = \frac{R_n}{L} I_n \Rightarrow i_L(t) = (i_L(0) - I_n) e^{-\frac{R_n t}{L}} + I_n$$

2.1. Resolución directa

- **Régimen permanente:**

$$\lim_{t\to\infty} v_c(t) = (v_c(0) - V_s)\underbrace{e^{-\frac{t}{R_{Th}C}}}_{0} + V_s = V_s$$

$$\lim_{t\to\infty} i_L(t) = (i_L(0) - I_n)\underbrace{e^{-\frac{R_n t}{L}}}_{0} + I_n = I_n$$

- **Generalización:** se puede resumir toda la información anterior en una sola expresión:

$$X(t) = (X(0) - X(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + X(\infty)$$

2.2. Método paso a paso

- **Método paso a paso:** consiste en seguir mecánicamente cuatro pasos para encontrar los valores pertinentes de la ecuación:

$$X(t) = (X(0) - X(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + X(\infty)$$

donde:

  - X(0): condición inicial de la variable.
  - X(∞): condición final de la variable.
  - τ : constante de tiempo del circuito.

2.2. Método paso a paso

- **Pasos a seguir:**

1. Identificar la variable de interés:
   - Circuito RC → $v_c(t)$
   - Circuito RL → $i_L(t)$
   - Si la variable de interés es otra → relacionar con $v_c(t)$ o $i_L(t)$
2. Valor inicial variable de interés:

$$v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+)$$

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+)$$

2.2. Método paso a paso

3. Valor final variable de interés:

   - Asumir régimen permanente; así, las inductancias se comportan como cortocircuito y los condensadores como circuito abierto.

4. Constante de tiempo τ :

   - Circuito RC → $\tau = R_{Th} C$
   - Circuito RL → $\tau = L / R_{Th}$

3. Ejemplos

Ejemplos de respuesta natural de circuitos de primer orden:

1. Circuitos RC sin fuentes
2. Circuitos RL sin fuentes

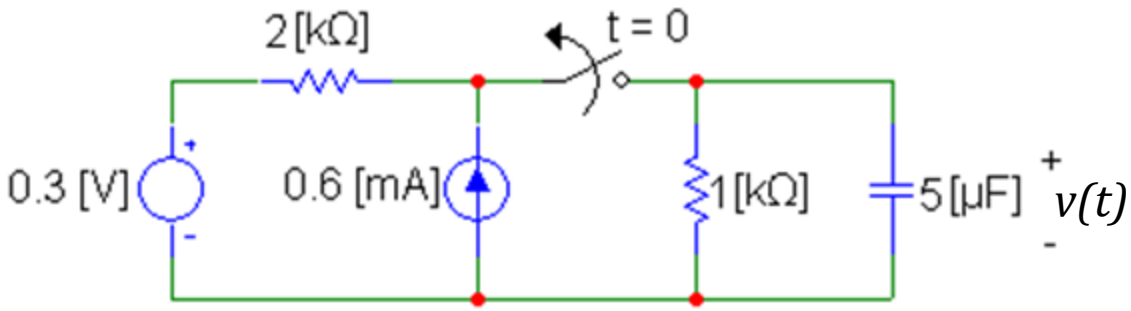
Ejemplos de respuesta completa (natural y forzada) de circuitos de primer orden:

3. Circuitos RC con fuentes
4. Circuitos RL con fuentes

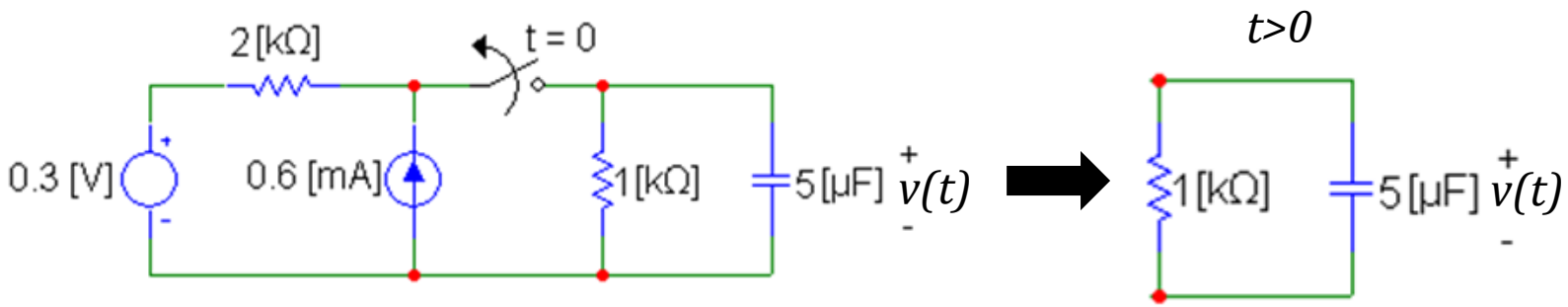
Circuitos con “transientes” consecutivos.

3. Ejemplos:
1. Circuito RC sin fuentes.

- Calcular $v(t)$ para $t>0$.



Para $t>0$ la respuesta de la variable corresponde a una respuesta únicamente natural, luego:

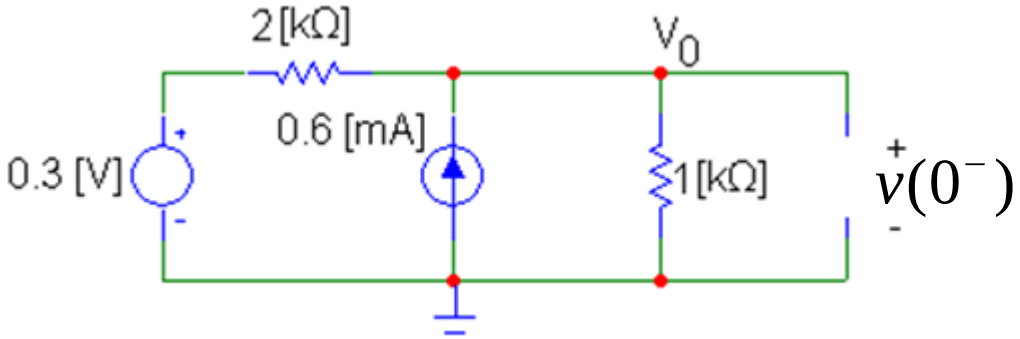


3. Ejemplos:
1. Circuito RC sin fuentes.

1. Variable de interés:

$$v(t) = v_c(t)$$

2. Valor inicial:
   - Circuito antes de $t=0$ (válido para $t=0^-$):



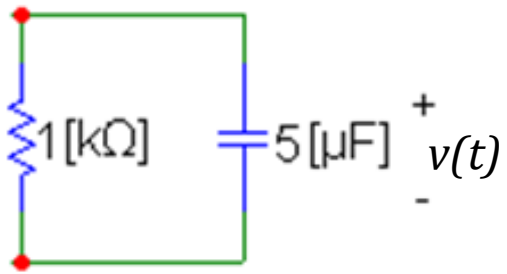
   - Nodos:

$$\frac{0,3 - V_0}{2000} + 0,6 \cdot 10^{-3} - \frac{V_0}{1000} = 0 \quad \longrightarrow \quad V_0 = 0,5V = v(0^-)$$

$$v(0^-) = v(0^+) = 0,5V$$

3. Ejemplos:
1. Circuito RC sin fuentes.

3. Valor final:



Como el condensador tiene a descargarse completamente:

$$V(\infty) = 0$$

4. Constante de tiempo τ :

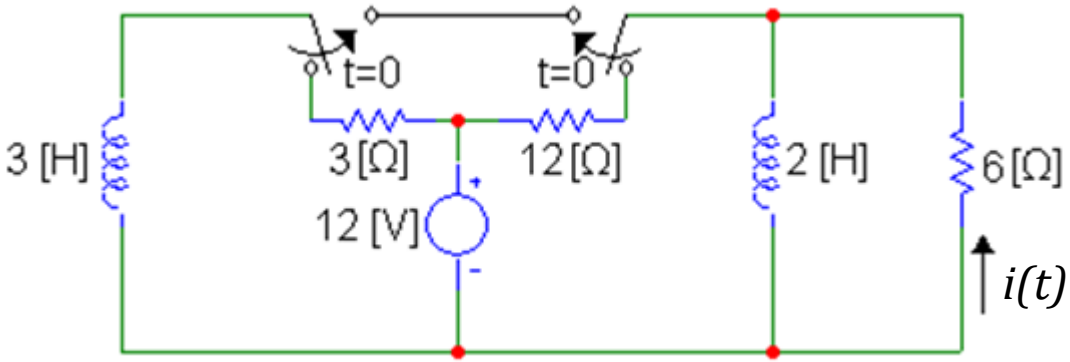
$$\tau = RC = 10^{3} \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{200}$$

Luego:

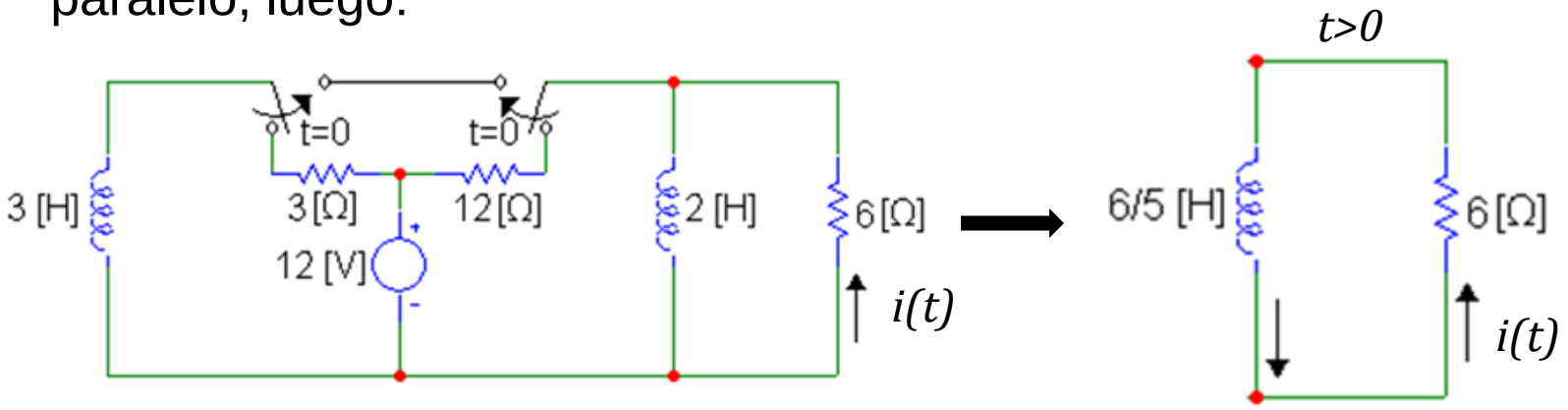
$$v(t) = 0{,}5e^{-t/5*10^{-3}} = 0{,}5e^{-200t}$$

3. Ejemplos:
2. Circuito RL sin fuentes.

- Calcular $i(t)$ para $t>0$.



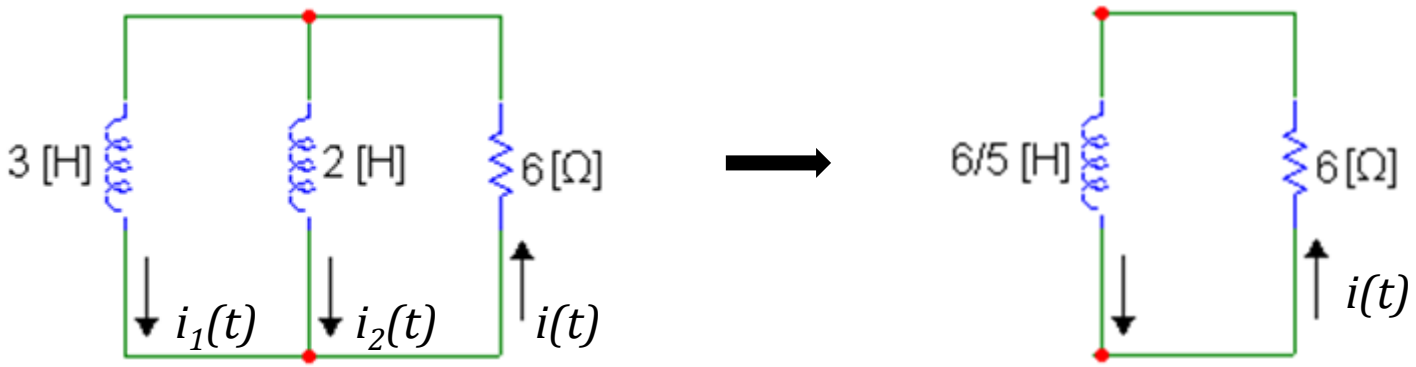
Para $t>0$ las dos inductancias se pueden reducir, ya que están en paralelo, luego:



3. Ejemplos:
2. Circuito RL sin fuentes.

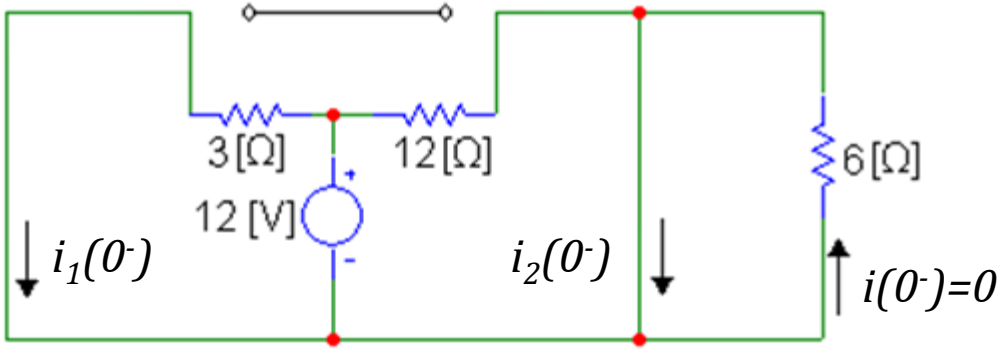
1. Variable de interés:

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$$



2. Valor inicial:

- Circuito antes de $t=0$ (válido para $t=0^-$):



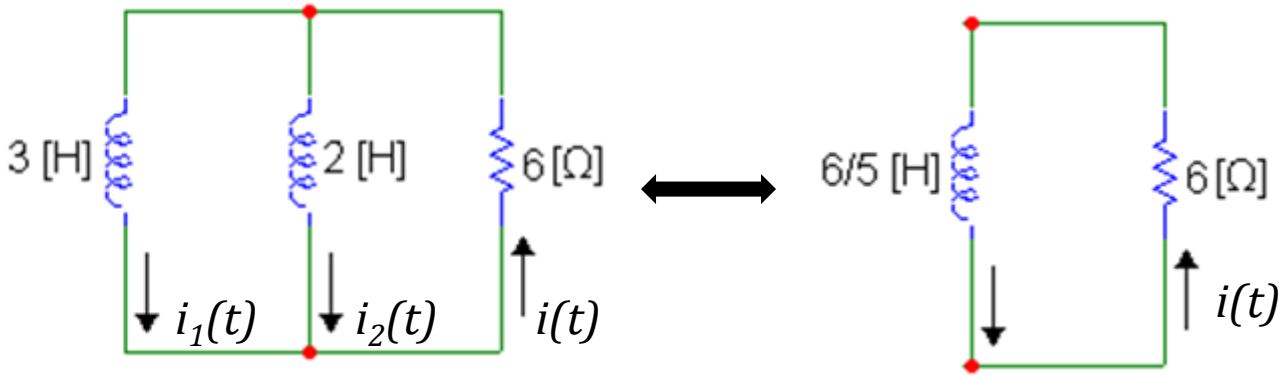
$$i_1(0^-)=i_1(0^+)=\frac{12}{3}=4A$$

$$i_2(0^-)=i_2(0^+)=\frac{12}{12}=1A$$

$$i(0^+)=i_1(0^+)+i_2(0^+)=5A$$

3. Ejemplos:
2. Circuito RL sin fuentes.

3. Valor final:



Como la inductancia tiende a descargarse:

$$i(\infty) = 0$$

4. Constante de tiempo τ :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{6/5}{6} = \frac{1}{5}$$

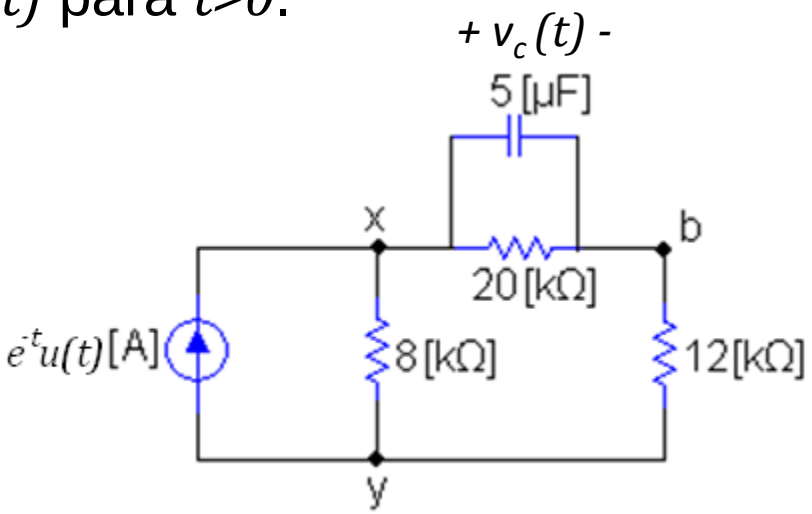
Finalmente:

$$\boxed{i(t) = 5e^{-5t}}$$

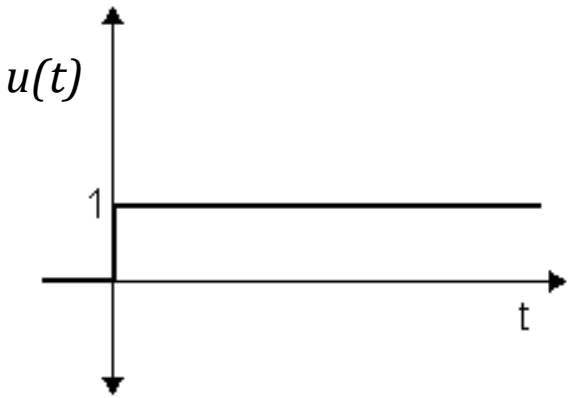
3. Ejemplos:
3. Respuesta completa circuito RC.

- Calcular $v_c(t)$ para $t>0$.

Ejercicio para su casa!



con $u(t)$:



3. Ejemplos:
3. Respuesta completa circuito RC.

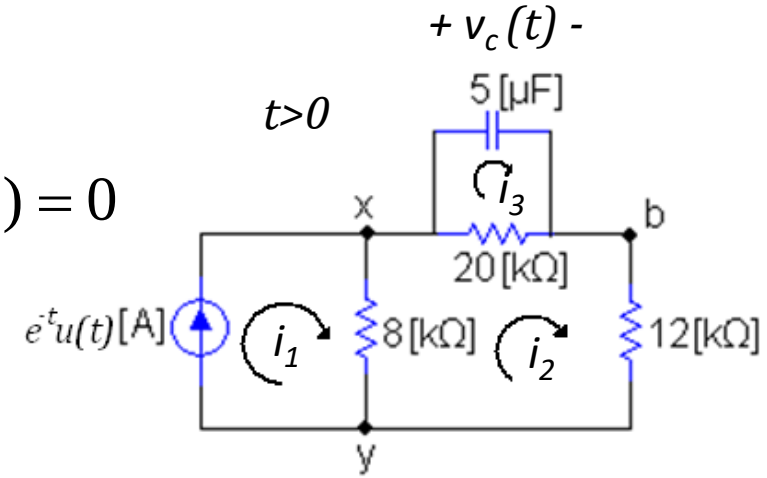
Encontrar Ec. dif. Mediante el Método de mallas:

$$i_1 = e^{-t}$$

$$v_c(t) + 20000(i_3 - i_2) = 0$$

$$12000 i_2 + 8000(i_2 - i_1) + 20000(i_2 - i_3) = 0$$

$$i_3 = 5 \cdot 10^{-6} \frac{dv_c(t)}{dt}$$



Luego:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + 20v_c(t) = 8 \cdot 10^4 e^{-t}$$

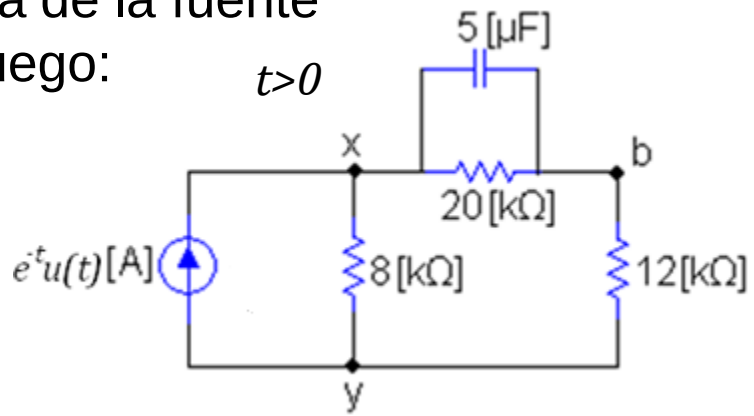
- **Solución homogénea:**

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + 20v_c(t) = 0 \Rightarrow v_c^{\,h}(t) = Ke^{-20t}$$

3. Ejemplos:
3. Respuesta completa circuito RC.

- **Solución particular:**

Ésta está dada por la forma algebraica de la fuente forzadora más su primera derivada, luego:



$$v_c^{\,p}(t) = Ae^{-t}$$

Determinamos *A*:

$$\frac{d(Ae^{-t})}{dt} + 20Ae^{-t} = 8\cdot 10^4 e^{-t}$$

$$-Ae^{-t} + 20Ae^{-t} = 8\cdot 10^4 e^{-t}$$ De acá se despeja A!

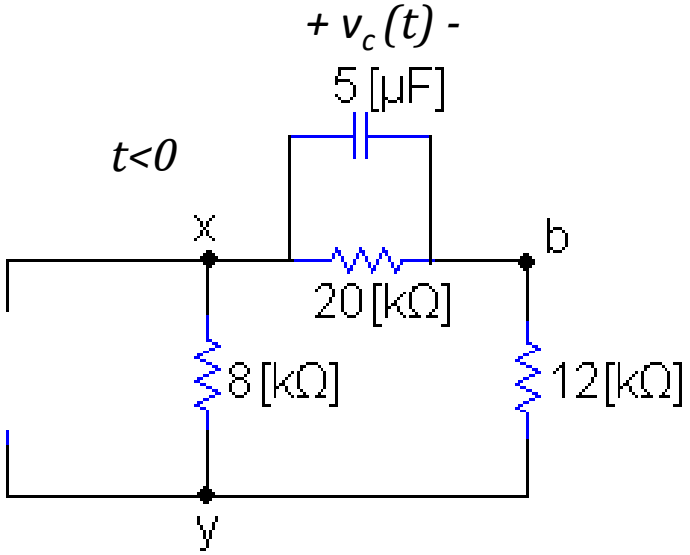
3. Ejemplos:
3. Respuesta completa circuito RC.

- **Solución completa:**

$$v_c(t) = v_c^{\,h}(t) + v_c^{\,p}(t) =$$

- **Condiciones iniciales:**

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0V$$



3. Ejemplos:
Circuitos con transientes consecutivos.

- **Circuitos con transientes consecutivos:** puede ser por **cambio de interruptores** (en más de 1 instante) o por fuentes pulsantes.

- **Método:**

  - El método de solución **no cambia**.

  - Si hay cambios en t_0, t_1, t_2,…, t_n (n+1 cambios), conocidas las condiciones iniciales en $t=t_0$, resolver consecutivamente para los intervalos (t_0, t_1), (t_1, t_2),…(t_{n-1}, t_n), con sus respectivas configuraciones, y usar como condición inicial en cada intervalo las condiciones finales del intervalo anterior.

  - **Ver ejercicio en clases!**

4. Apéndice:
Solución particular.

- A continuación se encuentra un cuadro de las funciones forzadoras de circuito y su respectiva solución particular.

Función forzadora	Solución propuesta
K	A
$K*t$	$A*t + B$
$K*t^2$	$A*t^2 + B*t + C$
$K*\sin(\omega t + \theta)$	$A*\cos(\omega t) + B*\sin(\omega t)$
$K*e^{-at}$	$A*e^{-at}$
$e^{-at}(K_1*\cos(\omega t) + K_2*\sin(\omega t))$	$e^{-at}(A_1*\cos(\omega t) + A_2*\sin(\omega t))$

IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC

Clase 09: Solución de Circuitos RC y RL

Contenidos:

1. Solución de la ecuación diferencial
2. Resolución de la ecuación diferencial
3. Ejemplos

Capítulo 7 Dorf 6ª Edición