TEOREMA DEL ELEMENTO EXTRA (EET)

Lecturas adicionales:

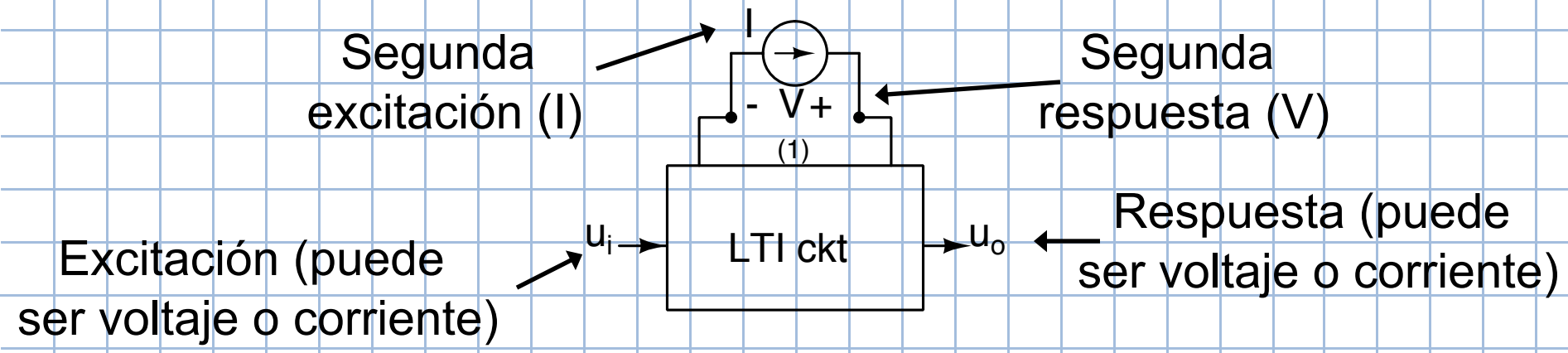
- *Fast analytical techniques for electrical and electronics circuits, Vatché Vorpérian, Cap. 3. (Cap. 4 sobre NEET opcional y recomendado)*

Introducción

En esta clase estudiaremos el *teorema del elemento extra* (EET) postulado por R.D. Middlebrook en 1989. Este teorema, junto con su extensión el *teorema del N-ésimo elemento extra* (NEET), permite simplificar el cálculo de una función de transferencia sacando elementos del circuito y realizando cálculos mucho más simples que el cálculo original.

Inyección doble de anulación

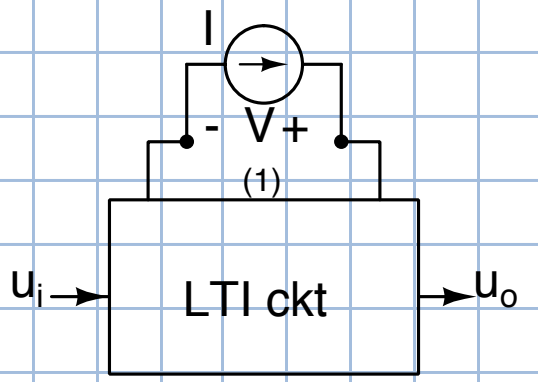
- Un concepto muy importante para entender EET es la inyección doble de anulación (*null double injection*, o ndi), concepto que tiene amplia relación con el método de cálculo de ceros vistos en la clase anterior.
- Consiste en aplicar dos señales de excitación a un circuito para anular otra señal (la respuesta) del circuito.
- Consideremos el siguiente circuito genérico:



Inyección doble de anulación

- Por superposición:

$$u_o = a_{11}u_i + a_{12}I$$
$$V = a_{21}u_i + a_{22}I$$



- Donde:

$$a_{11} = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{I=0}$$ → Función de transferencia u_o/u_i con el puerto (1) abierto, = H_o

$$a_{12} = \left.\frac{u_o}{I}\right|_{u_i=0}$$

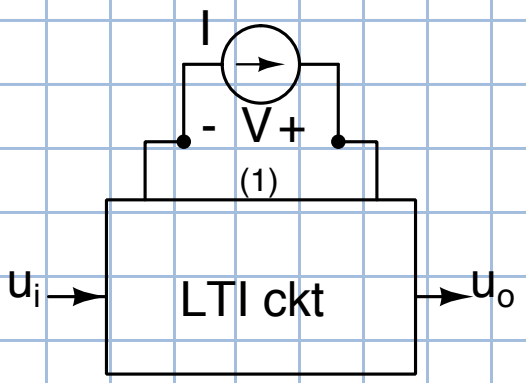
$$a_{21} = \left.\frac{V}{u_i}\right|_{I=0}$$

$$a_{22} = \left.\frac{V}{I}\right|_{u_i=0}$$ → Impedancia del puerto (1), = $Z^{(1)}$

Inyección doble de anulación

- Al aplicar dos excitaciones podemos anular la respuesta u_o del sistema, luego:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}u_i + a_{12}I \\ V &= a_{21}u_i + a_{22}I \end{aligned}$$



- Así podemos definir la impedancia de anulación del puerto (1) como:

$$\mathcal{Z}^{(1)} = \left.\frac{V}{I}\right|_{u_o=0} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}$$

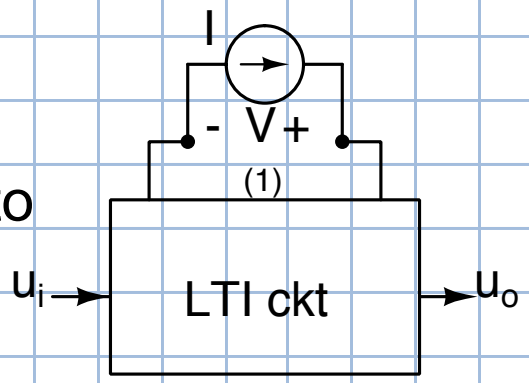
  - Corresponde a la impedancia que se ve en el puerto (1) cuando se anula la respuesta u_o.

Inyección doble de anulación

- Algunas observaciones sobre $Z^{(1)}$ y $\mathcal{Z}^{(1)}$:
  - $Z^{(1)}$ corresponde a la impedancia de puerto (1), y se calcula considerando sólo I como excitación ($u_i = 0$).
  - $\mathcal{Z}^{(1)}$ corresponde a la impedancia que se ve en el puerto (1) al anular la salida (u_o=0), *manteniendo* la excitación u_i (además de I).
  - Para calcular $\mathcal{Z}^{(1)}$ no es necesario calcular primero a_{11}, a_{12}, a_{21}, y a_{22} y luego reemplazar en

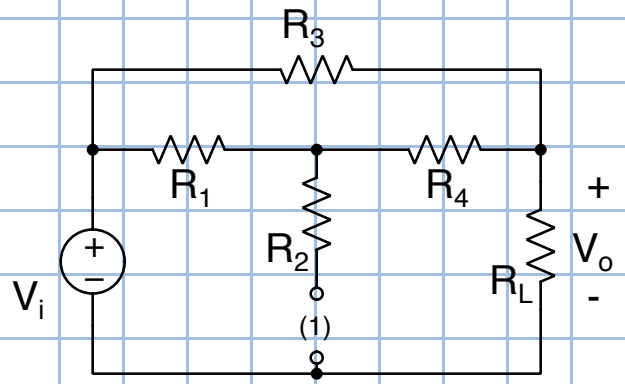
$$\mathcal{Z}^{(1)} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}$$

basta con anular la respuesta en el circuito y calcular directamente V/I.



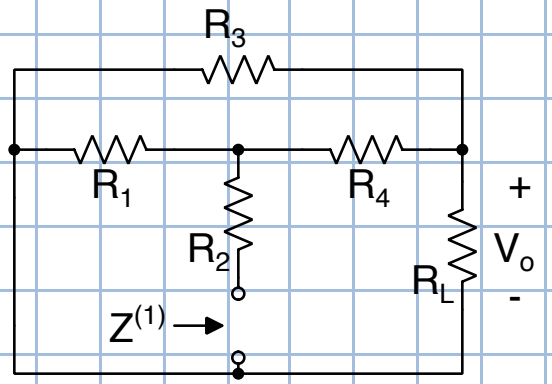
Inyección doble de anulación

- **Ejemplo**: calcular $Z^{(1)}$ y $\mathcal{Z}^{(1)}$.



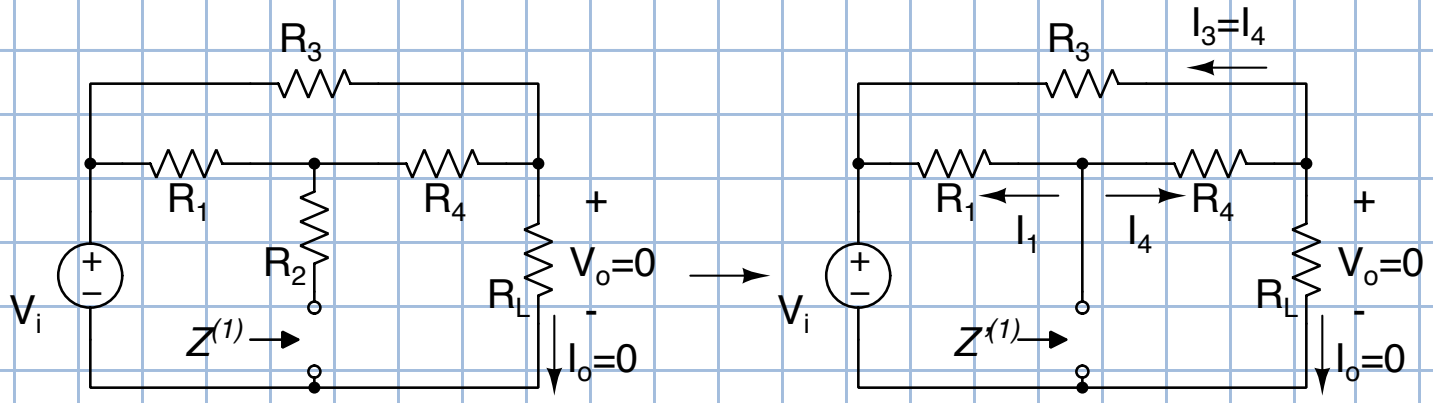
- Partimos por $Z^{(1)}$:

$$Z^{(1)} = R_2 + R_1 || \left(R_4 + R_3 || R_L\right)$$



Inyección doble de anulación

- Para calcular $\mathcal{Z}^{(1)}$ de forma más fácil, podemos analizar el siguiente circuito:



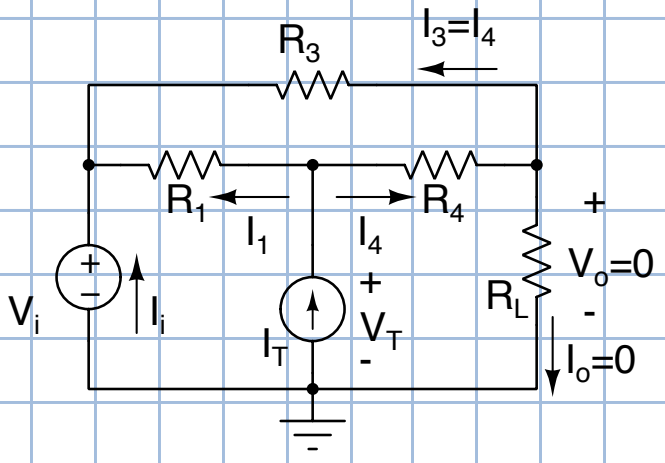
$$\mathcal{Z}'^{(1)} = R_2 + \mathcal{Z}^{(1)}$$

- Para que V_o = 0, la corriente que pasa por R_L también debe ser nula (cortocircuito virtual), por lo tanto $I_3 = I_4$.

Inyección doble de anulación

- Entonces:

$$\mathcal{Z}'(1) = \frac{V_T}{I_T}$$



$$I_4 = \frac{V_T}{R_4}$$

$$V_i = -\frac{R_3}{R_4} V_T$$

$$I_1 = \frac{V_T - V_i}{R_1} = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \frac{V_T}{R_1}$$

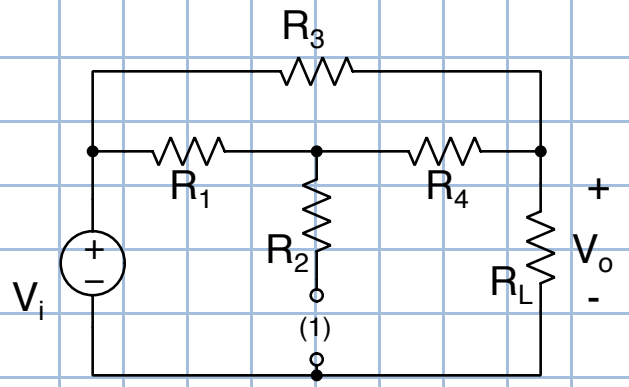
$$I_T = I_1 + I_4 = \left(R_4 || \left(\frac{R_1}{1 + R_3/R_4}\right)\right)^{-1} V_T$$

- Por lo tanto:

$$\rightarrow \mathcal{Z}^{(1)} = R_2 + R_4 || \left(\frac{R_1}{1 + R_3/R_4}\right)$$

Inyección doble de anulación

- Notar que $\mathcal{Z}^{(1)}$ *nunca* contiene el o los elementos que se cortocircuitan virtualmente al anular la respuesta del circuito! (en este caso R_L).



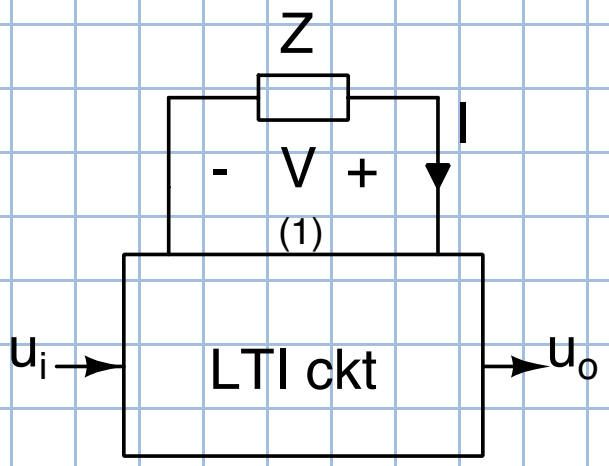
$$Z^{(1)} = R_2 + R_1 || \left(R_4 + R_3 || R_L\right)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)} = R_2 + R_4 || \left(\frac{R_1}{1+R_3/R_4}\right)$$

Fin ej.

EET para impedancias

- Si bien el EET es aplicable para cualquier elemento circuital (impedancia o fuente dependiente), primero revisaremos su aplicación para impedancias.
- Consideremos el siguiente circuito, donde Z será designado como el elemento extra:



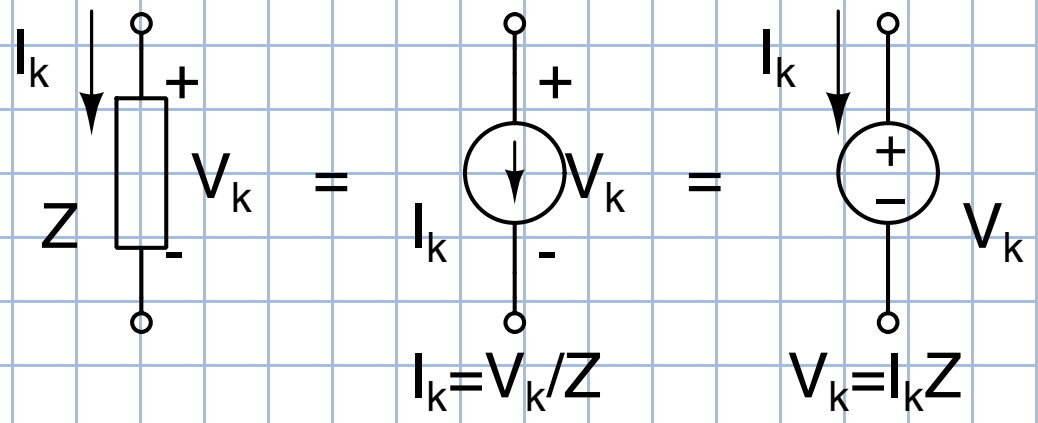
u_i y u_o pueden ser voltaje o corriente

$$H = \frac{u_o}{u_i}$$

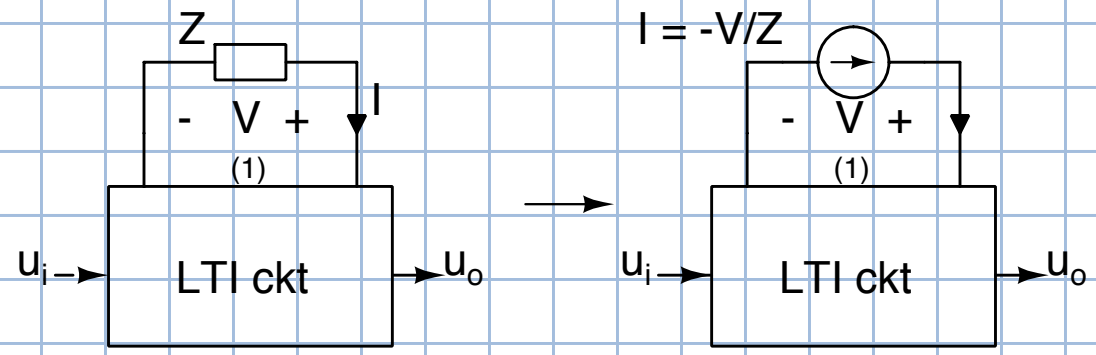
Esta es la función de transferencia que queremos calcular!

EET para impedancias

- De acuerdo al *teorema de la sustitución*:



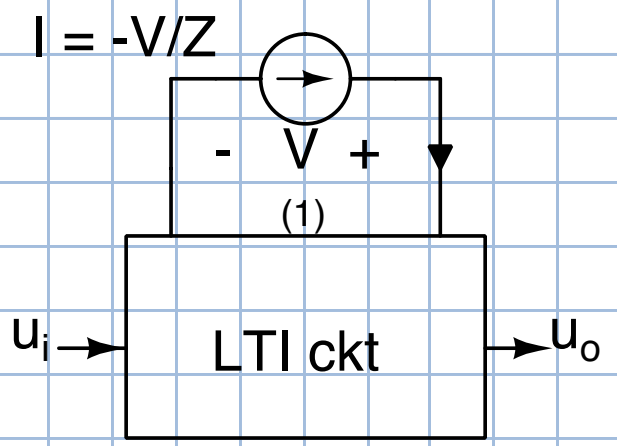
- Por lo tanto:



EET para impedancias

- Finalmente podemos calcular H = u_o/u_i como:

$$\begin{aligned} u_o &= a_{11}u_i + a_{12}I \\ V &= a_{21}u_i + a_{22}I \\ I &= -V/Z \end{aligned}$$



$$\rightarrow H = a_{11}\frac{1+\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}\frac{1}{Z}}{1+\frac{a_{22}}{Z}}$$

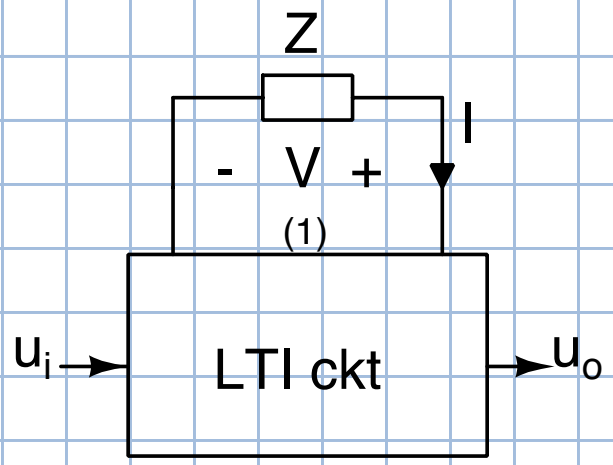
$Z^{(1)}$ (numerator)

$Z^{(1)}$ (denominator)

$$H_o = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{Z\rightarrow\infty}$$

EET para impedancias

- Por lo tanto:



$$H = H_o \frac{1 + \frac{Z^{(1)}}{Z}}{1 + \frac{Z^{(1)}}{Z}}$$

EET



[swcommunityband.com/sponsors.html]

EET para impedancias

- Una forma alternativa del EET es la siguiente:

$$H = H'_o \frac{1 + \frac{Z}{Z^{(1)}}}{1 + \frac{Z}{Z^{(1)}}}$$

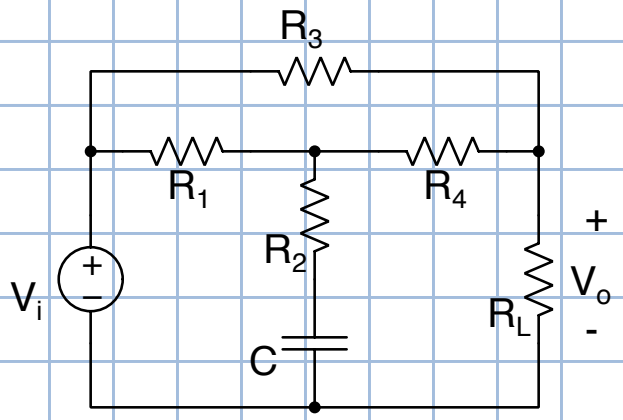
EET

$$H'_o = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{Z=0} = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(1)}} H_o$$

  - Depende del circuito qué expresión del EET debe utilizarse. Por ejemplo, en algunos circuitos H_o=0 (H'_o=0), por lo que necesariamente hay que utilizar la expresión con H'_o (H_o).

EET para impedancias

- **Ejemplo**: calcular H(s) = V_o/V_i con C como elemento extra.

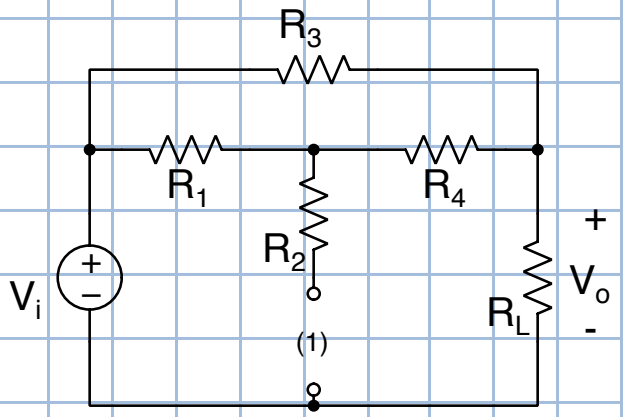


$$H(s) = H_o \frac{1 + \frac{Z^{(1)}}{Z_C}}{1 + \frac{Z^{(1)}}{Z_C}} = H_o \frac{1 + sCZ^{(1)}}{1 + sCZ^{(1)}}$$

- Calculamos H_o:

$$Z_C = \frac{1}{sC} \rightarrow \infty$$

$$H_o = \frac{R_L}{R_L + R_3 || (R_1 + R_4)}$$



EET para impedancias

- Tanto $Z^{(1)}$ como $\mathcal{Z}^{(1)}$ fueron calculados en el ejemplo anterior:

$$Z^{(1)} = R_2 + R_1 || (R_4 + R_3 || R_L)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)} = R_2 + R_4 || \left(\frac{R_1}{1+R_3/R_4} \right)$$

- Por lo tanto:

$$H(s) = \frac{R_L}{R_L + R_3 || (R_1 + R_4)} \frac{1 + sC \left(R_2 + R_4 || \left(\frac{R_1}{1+R_3/R_4} \right) \right)}{1 + sC \left(R_2 + R_1 || (R_4 + R_3 || R_L) \right)}$$

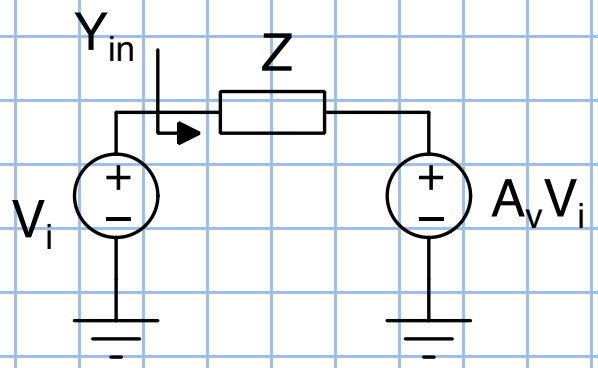
Imagínense calcular esto con nodos y mallas…

Notar que polo < cero!

Fin ej.

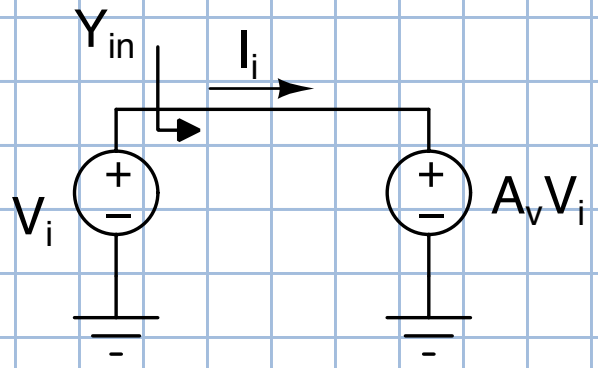
EET para impedancias

- **Ejemplo**: calcular $Y_{in}(s) = I_i/V_i$ con Z=0 como elemento extra.



$$Y_{in}(s) = H'_o \frac{1 + \frac{Z}{Z^{(1)}}}{1 + \frac{Z}{Z^{(1)}}}$$

- Calculamos H'_o:

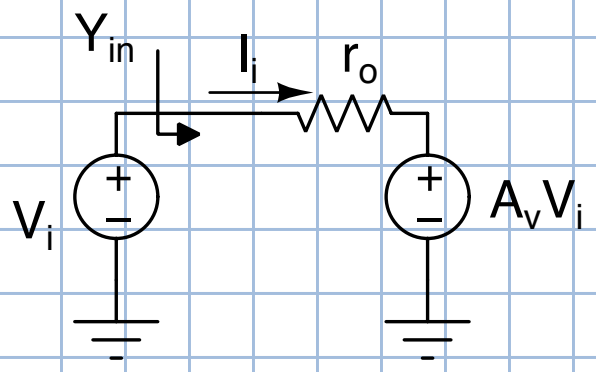


$$V_i = A_v V_i ???$$

A_v no tiene por qué ser igual a 1, esto es incorrecto

EET para impedancias

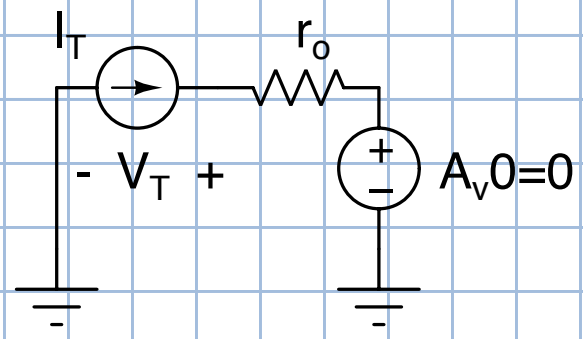
- En algunos casos no es posible calcular directamente los parámetros del EET (o del NEET). En estos casos se debe introducir un componente auxiliar que más tarde debe ser eliminado. Por ejemplo, en este caso agregaremos un resistor r_o en serie con Z:



$$H'_o = \frac{1 - A_v}{r_o}$$

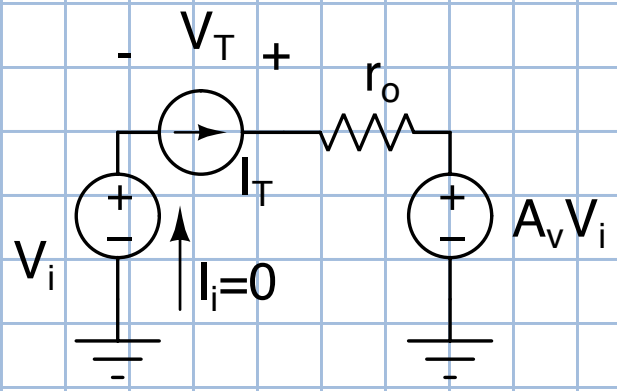
EET para impedancias

- Seguimos con $Z^{(1)}$:



$$Z^{(1)} = r_o$$

- Calculamos $\mathcal{Z}^{(1)}$ anulando la respuesta I_i=0:



$$I_i = I_T = 0 \rightarrow \mathcal{Z}^{(1)} = \infty$$

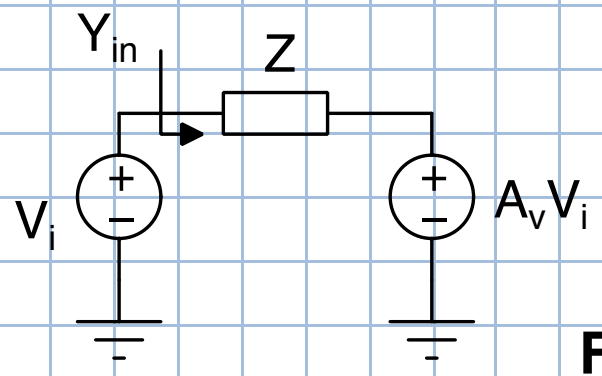
EET para impedancias

- Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} H_o' &= \frac{1-A_v}{r_o} \\ Z^{(1)} &= r_o \\ \mathcal{Z}^{(1)} &= \infty \end{aligned}\right\} \quad Y_{in}(s) = H_o' \frac{1+\frac{Z}{\mathcal{Z}^{(1)}}}{1+\frac{Z}{Z^{(1)}}} = \frac{1-A_v}{r_o+Z}$$

- Eliminamos el componente auxiliar (r_o=0):

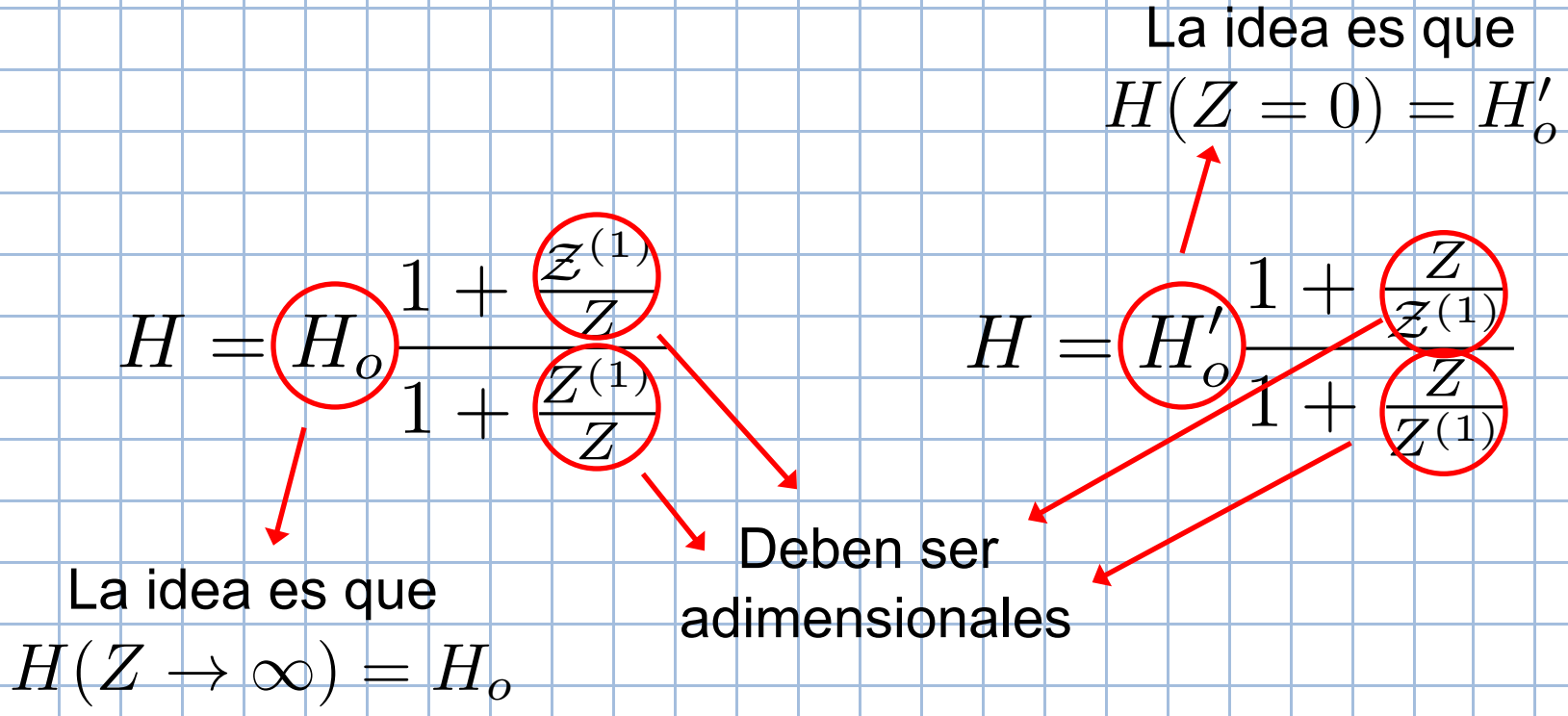
$$Y_{in}(s) = \frac{1-A_v}{Z}$$



Fin ej.

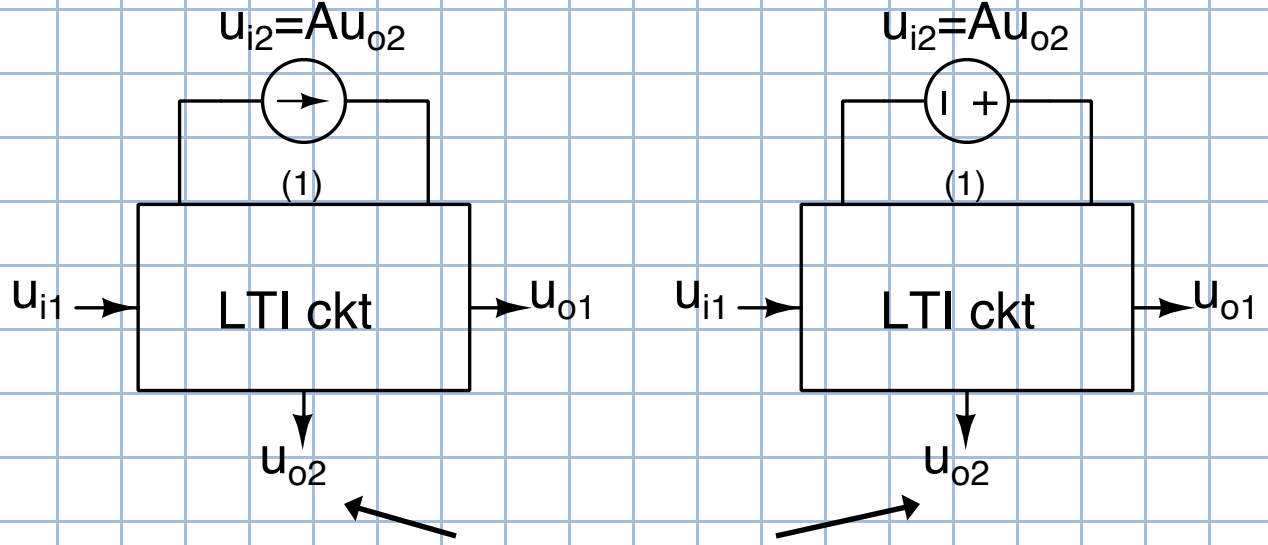
EET para impedancias

- Algunas observaciones sobre el EET (para recordarlo fácilmente):



EET para fuentes dependientes

- Como vimos, una impedancia es un caso especial de una fuente dependiente (*teorema de la sustitución*). Con esto en mente, consideremos los siguientes circuitos donde nos interesa calcular H = u_{o1}/u_{i1}:



Alguna respuesta del circuito que controla la fuente dependiente A

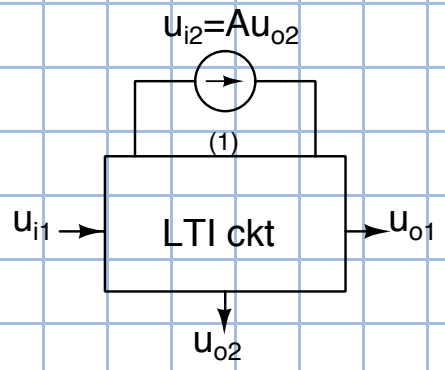
EET para fuentes dependientes

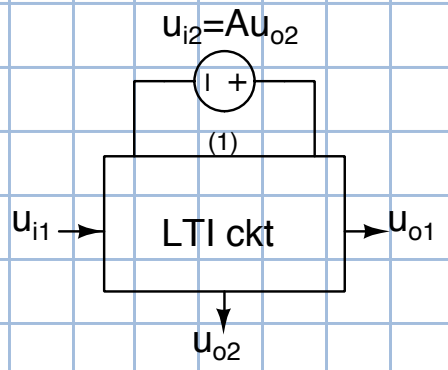
- Al igual que antes:

$$u_{o1} = a_{11}u_{i1} + a_{12}u_{i2}$$

$$u_{o2} = a_{21}u_{i1} + a_{22}u_{i2}$$

$$u_{i2} = Au_{o2}$$





$$\overline{\mathcal{A}^{(1)}} = \left.\frac{u_{o2}}{-u_{i2}}\right|_{u_{o1}=0}$$

$$\rightarrow H = a_{11}\frac{1+\left(-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)A}{1+(-a_{22})A}$$

$$H_o = \left.\frac{u_{o1}}{u_{i1}}\right|_{A=0}$$

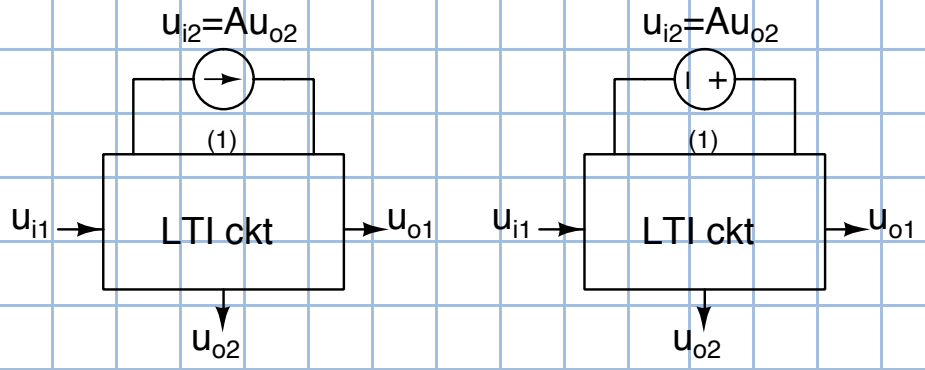
$$\overline{A^{(1)}} = \left.\frac{u_{o2}}{-u_{i2}}\right|_{u_{i1}=0}$$

EET para fuentes dependientes

- Así:

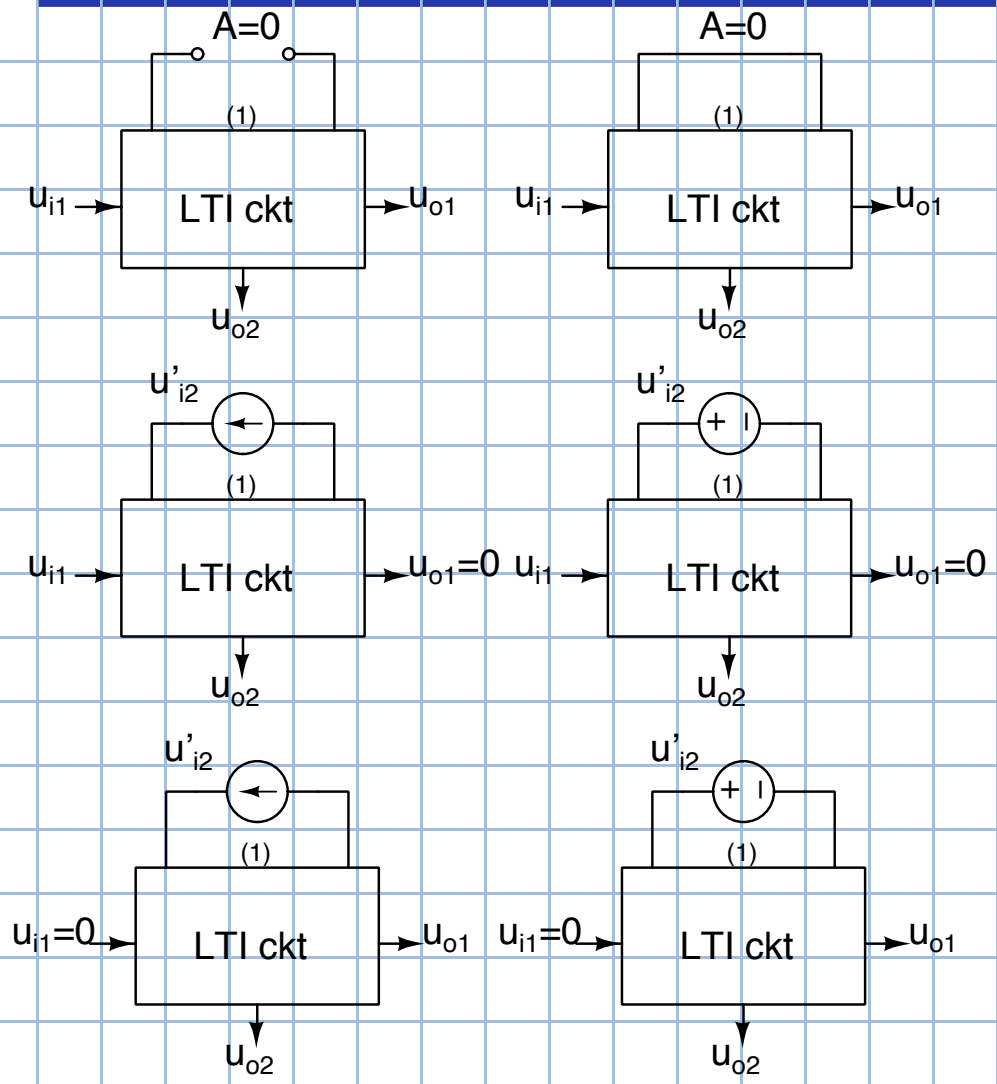
$$H = H_o \frac{1 + \overline{\mathcal{A}^{(1)}} A}{1 + \overline{A^{(1)}} A}$$

EET



- H_o: función de transferencia con la fuente dependiente apagada (A=0).
- $\overline{\mathcal{A}^{(1)}}$: ganancia de anulación de $-u_{i2}$ a u_{o2} con la respuesta (u_{o1}) anulada, *donde $-u_{i2}$ es una fuente independiente (con polaridad inversa a u_{i2}).*
- $\overline{A^{(1)}}$: ganancia de $-u_{i2}$ a u_{o2} con la excitación (u_{i1}) apagada, donde $-u_{i2}$ es una *fuente independiente (con polaridad inversa a u_{i2})*.

EET para fuentes dependientes



$$H_o = \left.\frac{u_{o1}}{u_{i1}}\right|_{A=0}$$

$$\overline{\mathcal{A}^{(1)}} = \left.\frac{u_{o2}}{u'_{i2}}\right|_{u_{o1}=0}$$

$$\overline{A^{(1)}} = \left.\frac{u_{o2}}{u'_{i2}}\right|_{u_{i1}=0}$$

EET para fuentes dependientes

- Una forma alternativa del EET es la siguiente:

$$H = H'_o \frac{1 + \frac{1}{\overline{\mathcal{A}^{(1)}} A}}{1 + \frac{1}{\overline{A^{(1)}} A}}$$

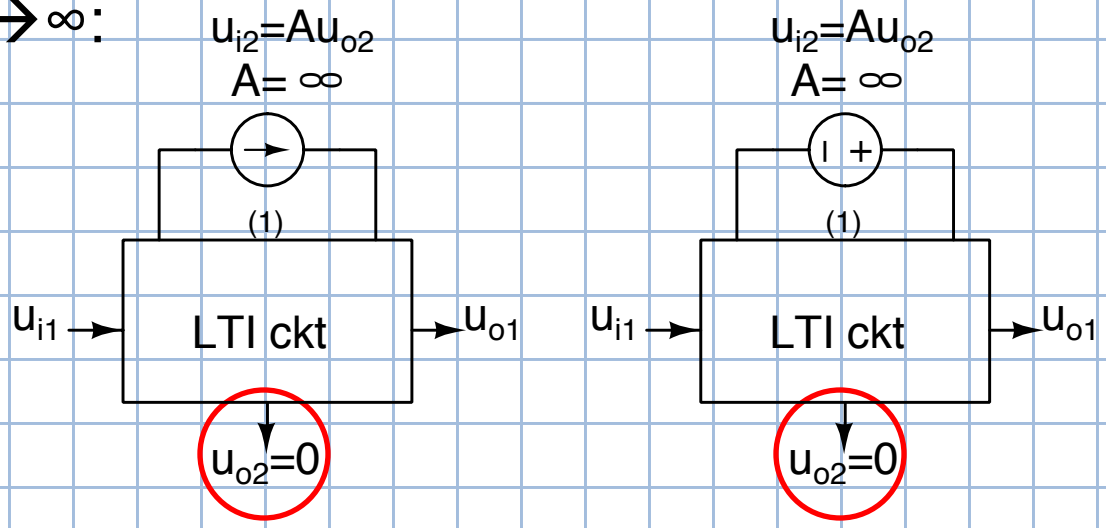
EET

$$H'_o = \left. \frac{u_{o1}}{u_{i1}} \right|_{A \to \infty} = \frac{\overline{\mathcal{A}^{(1)}}}{\overline{A^{(1)}}} H_o$$

- Depende del circuito qué expresión del EET debe utilizarse. Por ejemplo, en algunos circuitos H_o=0 (H'_o=0), por lo que necesariamente hay que utilizar la expresión con H'_o (H_o).

EET para fuentes dependientes

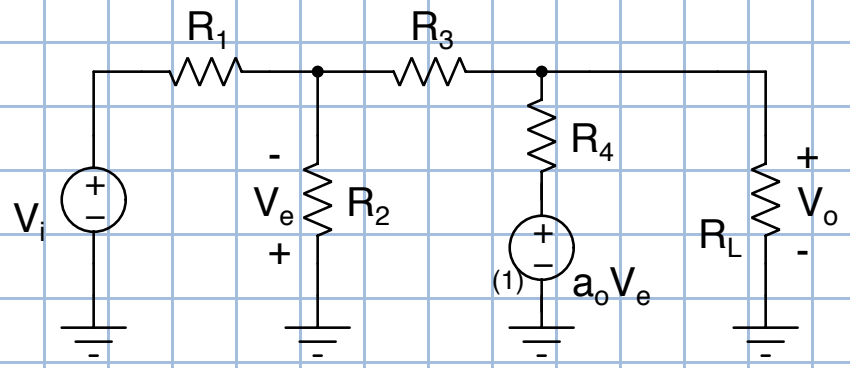
- Cabe preguntarse qué significa, en términos circuitales, hacer $A \rightarrow \infty$:



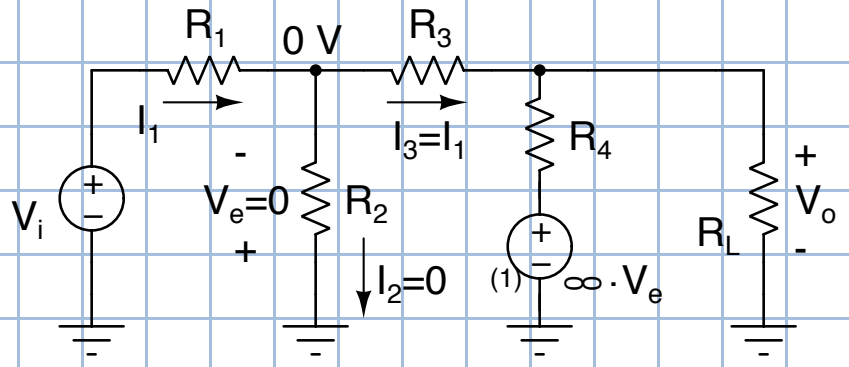
  - Cualquier valor *finito* de $u_{i2}=Au_{o2}$ con una ganancia A infinita requiere $u_{o2}=0$ (recordar que $0 \infty \bullet \infty$ puede ser algún número finito).

EET para fuentes dependientes

- **Ejemplo**: calcular H(s) = V_o/V_i con $a_o \rightarrow \infty$ como elemento extra.



- Calculamos H'_o:

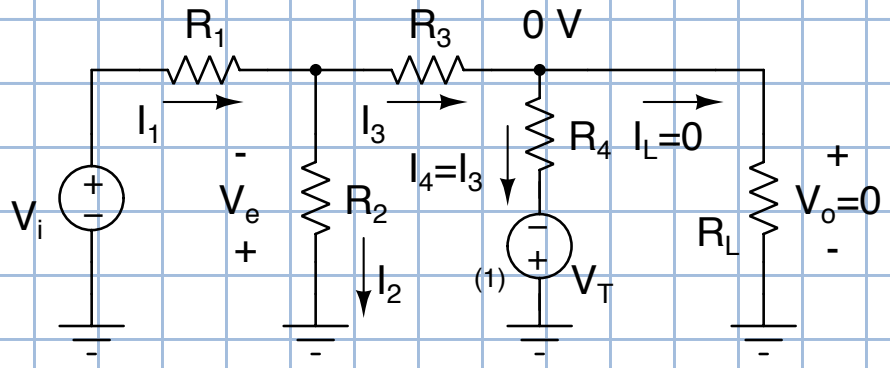


$$I_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

$$\rightarrow H'_o = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_3}{R_1}$$

EET para fuentes dependientes

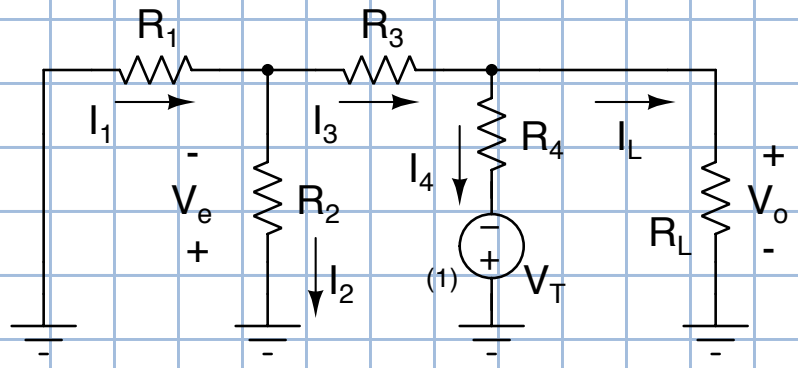
- Calculamos los parámetros faltantes:



$$\overline{\mathcal{A}^{(1)}} = \frac{V_e}{V_T}$$

$$I_3 = -\frac{V_e}{R_3} = \frac{V_T}{R_4} = I_4$$

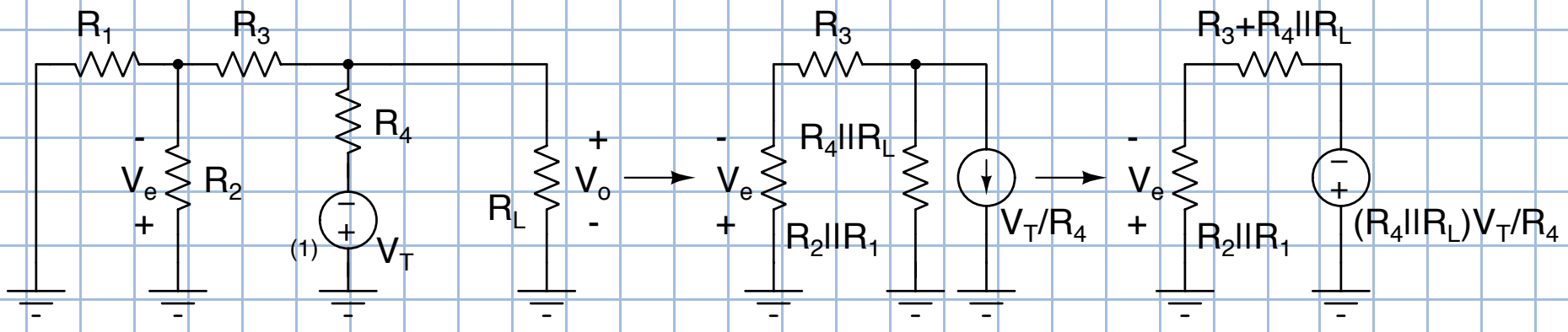
$$\rightarrow \overline{\mathcal{A}^{(1)}} = -\frac{R_3}{R_4}$$



$$\overline{A^{(1)}} = \frac{V_e}{V_T}$$

EET para fuentes dependientes

- Simplificamos el circuito para resolverlo al ojo:



$$\overline{A^{(1)}} = \frac{V_e}{V_T}$$

$$\rightarrow \overline{A^{(1)}} = \frac{R_1||R_2}{R_1||R_2+R_3+R_4||R_L} \frac{R_4||R_L}{R_4}$$

Fin ej.

NEET

- El NEET permite eliminar N elementos de un circuito y luego calcular la función de transferencia de interés por medio de varios cálculos mucho más simples, tales como los que se usan para el EET.
  - En este curso no veremos el NEET en detalle, simplemente nos limitaremos a mencionarlo y enumerar sus beneficios.
  - El NEET permite sacar todos los elementos reactivos de un circuito de forma de resolverlo como una simple red resistiva y obtener de inmediato una expresión de baja entropía para la función de transferencia buscada.
  - Es simplemente impresionante cómo simplifica las cosas. Vale la pena leer y entender el capítulo 4 del libro *Fast analytical techniques for electrical and electroncis circuits* de Vatché Vorpérian.

Sobre el EET y el NEET

- Ambos teoremas son muy potentes, y permiten resolver circuitos que prácticamente no tenían solución analítica.
- Al ocupar estos teoremas las respuestas obtenidas siempre son de baja entropía: permiten entender qué componente afecta qué, por lo que ayudan mucho en el diseño de circuitos.
- No es lo mismo el NEET que el EET anidado. El EET anidado consiste en aplicar recursivamente el EET, lo que no entrega necesariamente expresiones de baja entropía.
- El principal responsable de estos teoremas, así como también de una serie artículos relacionados, es R. David MiddleBrook (1929-2010, www.rdmiddlebrook.com).

Sobre el EET y el NEET

- Muchos de ustedes serán *Ingenieros Eléctricos*, y les quedan muchos circuitos por diseñar y resolver; otros serán ingenieros biomédicos o mecánicos, y probablemente también integren circuitos en sus proyectos
  - Inviertan bien su tiempo: aprendan bien EET y NEET y no dejen de ocuparlos nunca más. Esto sólo les traerá beneficios.
  - Es más valiosa una respuesta inteligente de pocos pasos e intuitiva que un desarrollo espantoso lleno de álgebra y ecuaciones molestas. Para resolver ecuaciones de circuitos tenemos computadores con SPICE.