

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Sistemas Trifásicos Balanceados

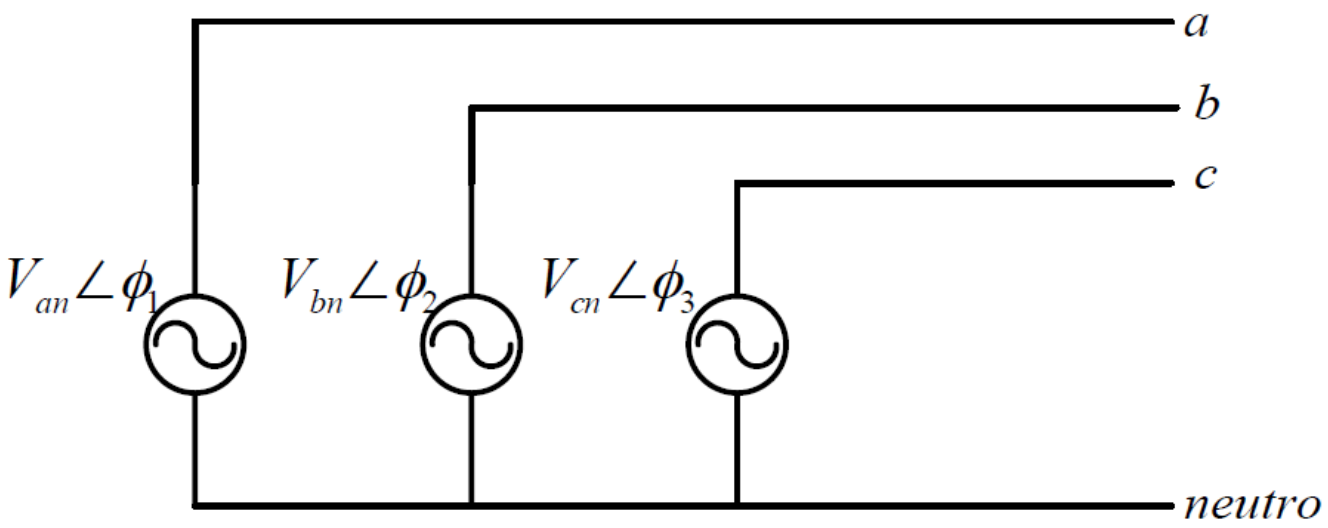
Profesor Álvaro Lorca

IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2018

Agradecimientos material: Daniel Olivares, Tomás Tapia, David Watts

Introducción

- **Circuito Trifásico:** extensión del caso monofásico de CA, su función forzante es un sistema de 3 voltajes cuya frecuencia y magnitud son iguales, y sus ángulos de fase son diferentes:



$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

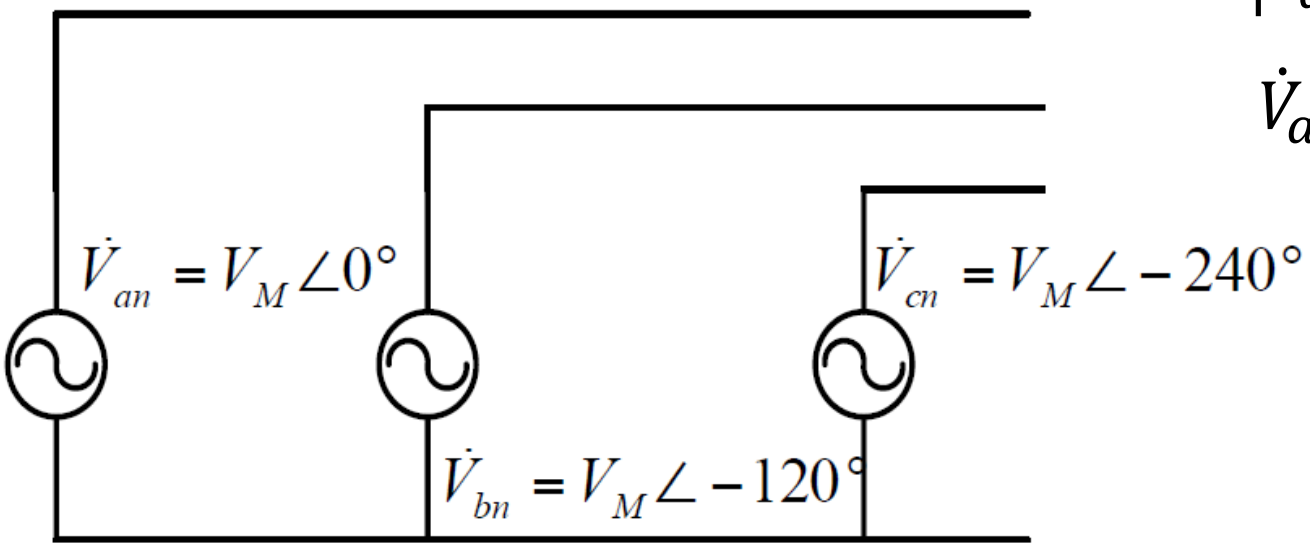
$$\phi_1 \neq \phi_2 \neq \phi_3$$

Introducción

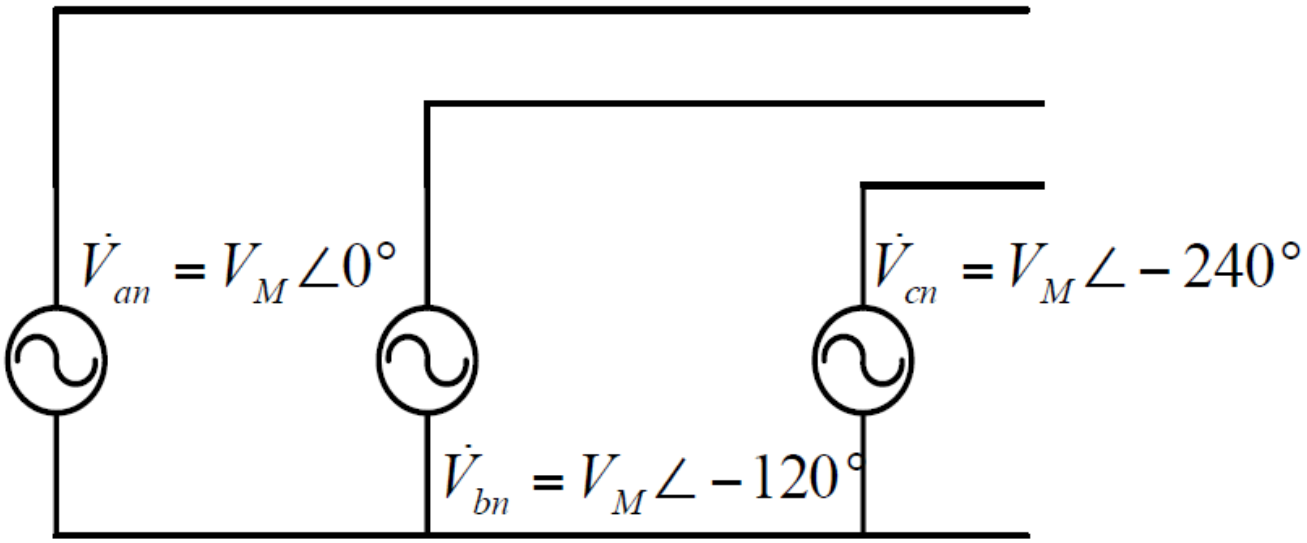
- **Sistema trifásico de voltajes balanceados**: consta de tres voltajes sinusoidales que tienen la misma magnitud y frecuencia y cada voltaje está desfasado en 120° respecto a los otros dos.
- Si las cargas son tales que las corrientes producidas por los voltajes están también balanceadas → **circuito trifásico balanceado.**

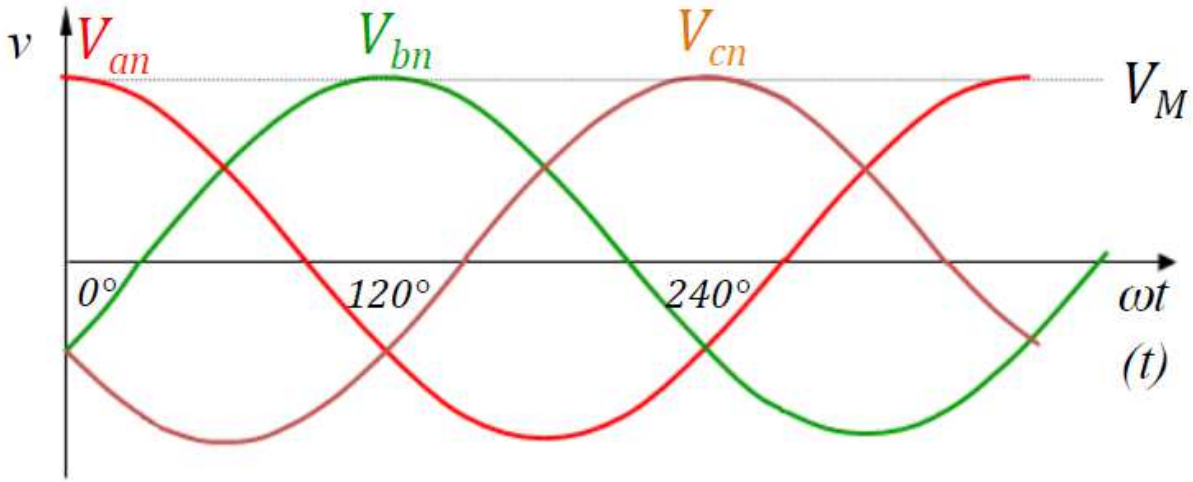
$$|\dot{V}_{an}| = |\dot{V}_{bn}| = |\dot{V}_{cn}|$$

$$\dot{V}_{an} + \dot{V}_{bn} + \dot{V}_{cn} = 0$$



Introducción





Dominio del tiempo

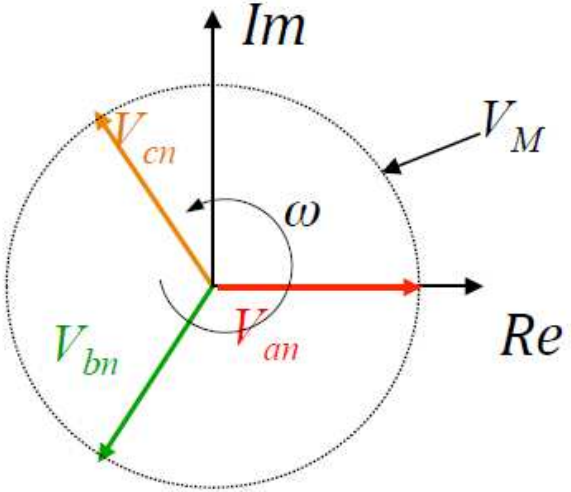
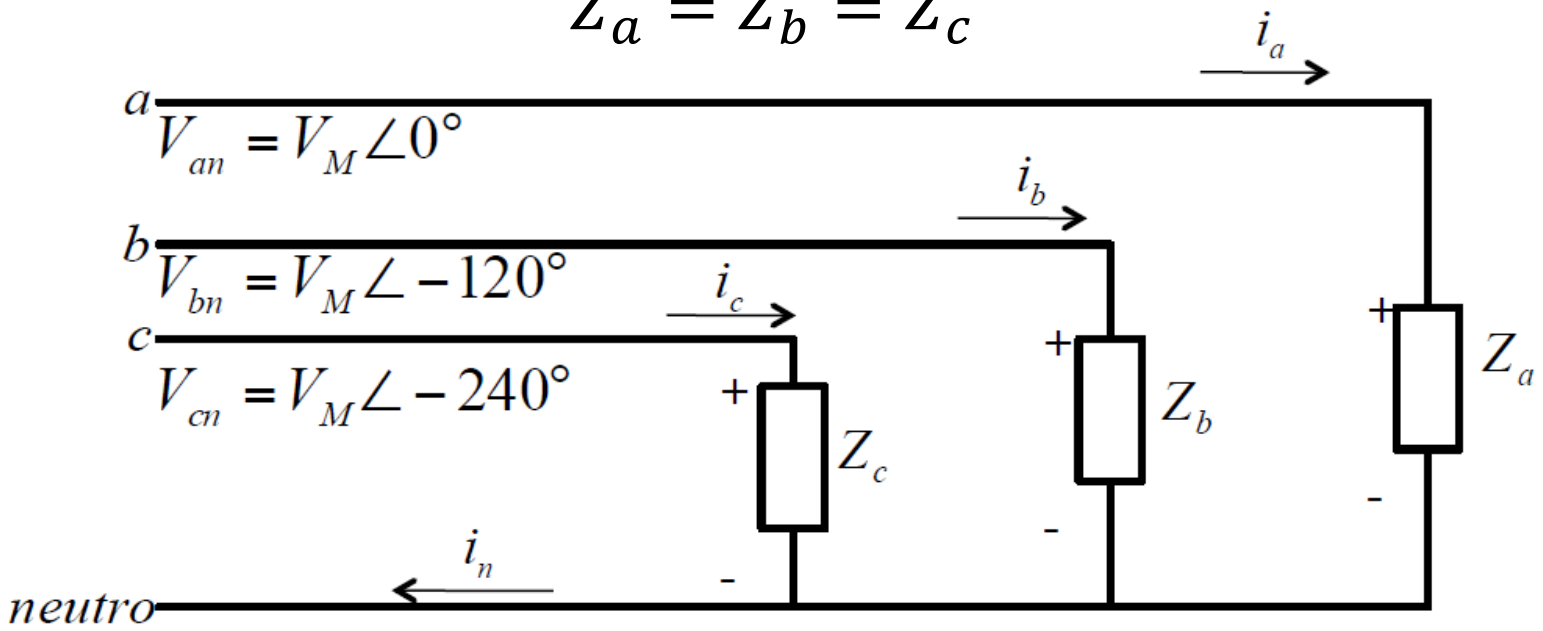


Diagrama fasorial

Introducción

- **Sistema de cargas balanceado**

$$Z_a = Z_b = Z_c$$



- Fuente de tensión y carga balanceada:

$$i_a + i_b + i_c = i_n = 0$$

Introducción

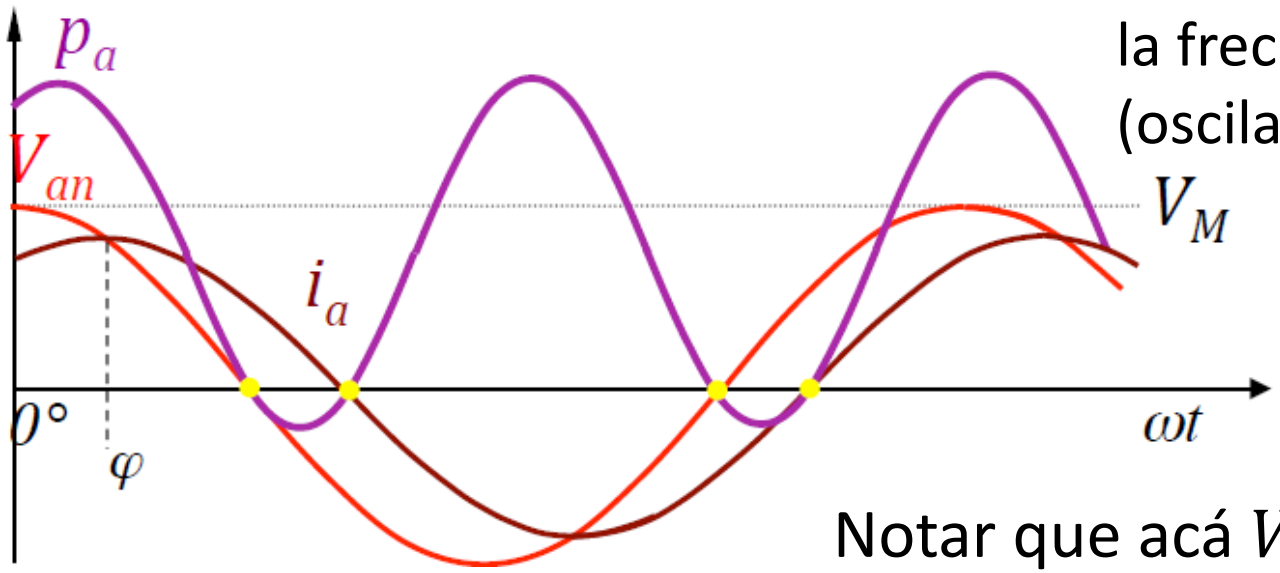
- **Potencia monofásica instantánea:** oscilante o pulsante

$$p_a(t) = v_{an}(t) \cdot i_a(t) = V_M \cos(\omega t) \cdot I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

$$p_a(t) = \frac{V_M \cdot I_M}{2}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

$$\boxed{p_a(t) = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cos(\varphi) + V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cos(2\omega t + \varphi)}$$

Dependiente del tiempo y de la frecuencia con media nula (oscilante)



Notar que acá V_M e I_M son Peak

Introducción

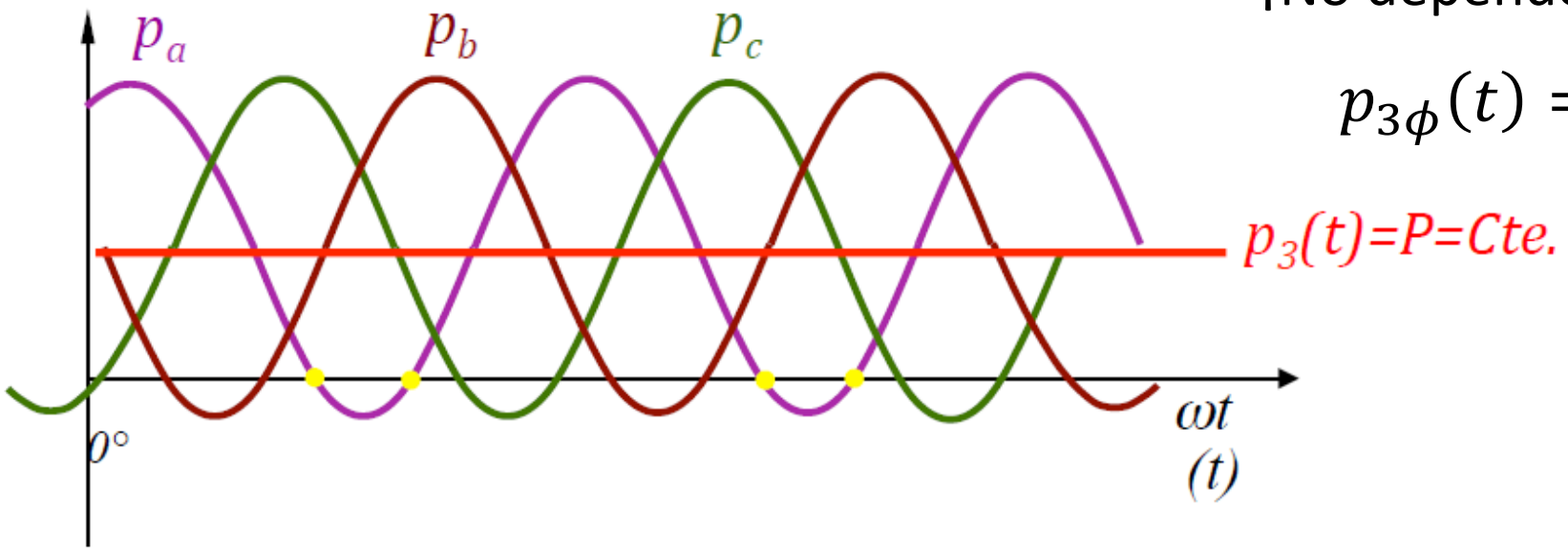
- **Potencia trifásica instantánea:** no oscilante o constante

$$p_{3\phi}(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

$$p_{3\phi}(t) = \frac{3}{2} V_M I_M \cos(\varphi) = 3 V_{RMS} I_{RMS} \cos(\varphi) = 3 p_{1\phi}$$

¡No depende del tiempo!

$$p_{3\phi}(t) = P = cte$$



Introducción

- Demostración

$$V_{an}(t) = V_M \cos(\omega t) \qquad i_{an}(t) = I_M \cos(\omega t - \theta)$$
$$V_{bn}(t) = V_M \cos(\omega t - 120°) \qquad i_{bn}(t) = I_M \cos(\omega t - \theta - 120°)$$
$$V_{cn}(t) = V_M \cos(\omega t + 120°) \qquad i_{cn}(t) = I_M \cos(\omega t - \theta + 120°)$$

$$p_{3\phi}(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

- Reemplazando

$$p_{3\phi}(t) = V_M I_M [\cos(\omega t)\cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120°)\cos(\omega t - \theta - 120°) + \cos(\omega t + 120°)\cos(\omega t - \theta + 120°)]$$

- Utilizamos

$$2cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

Introducción

- Luego

$$p_{3\phi}(t) = \frac{V_M I_M}{2}\,[\cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240°) + \cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta + 240°)]$$

- Además

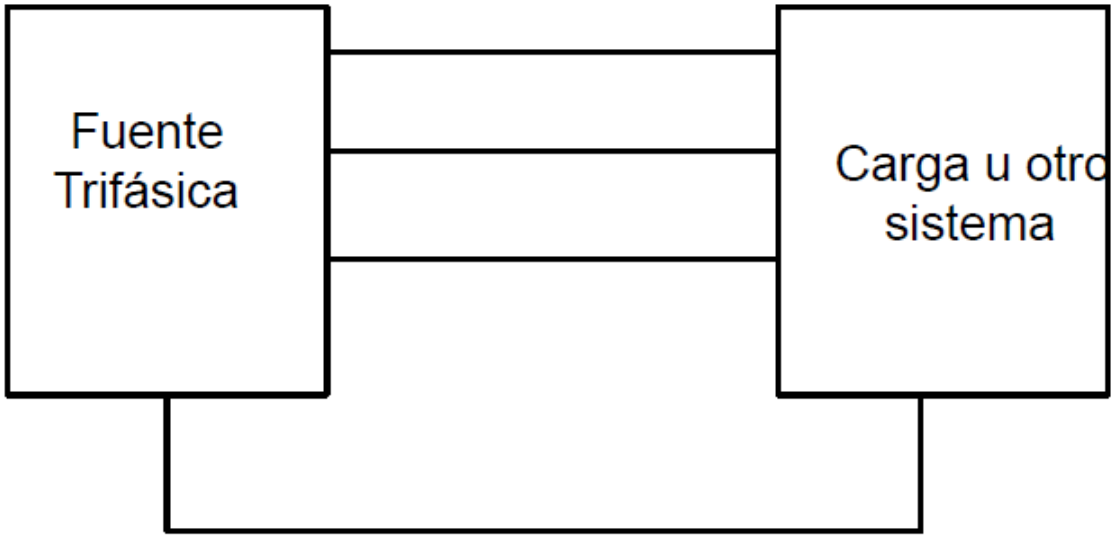
$$\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240°) + \cos(2\omega t - \theta + 240°) = 0$$

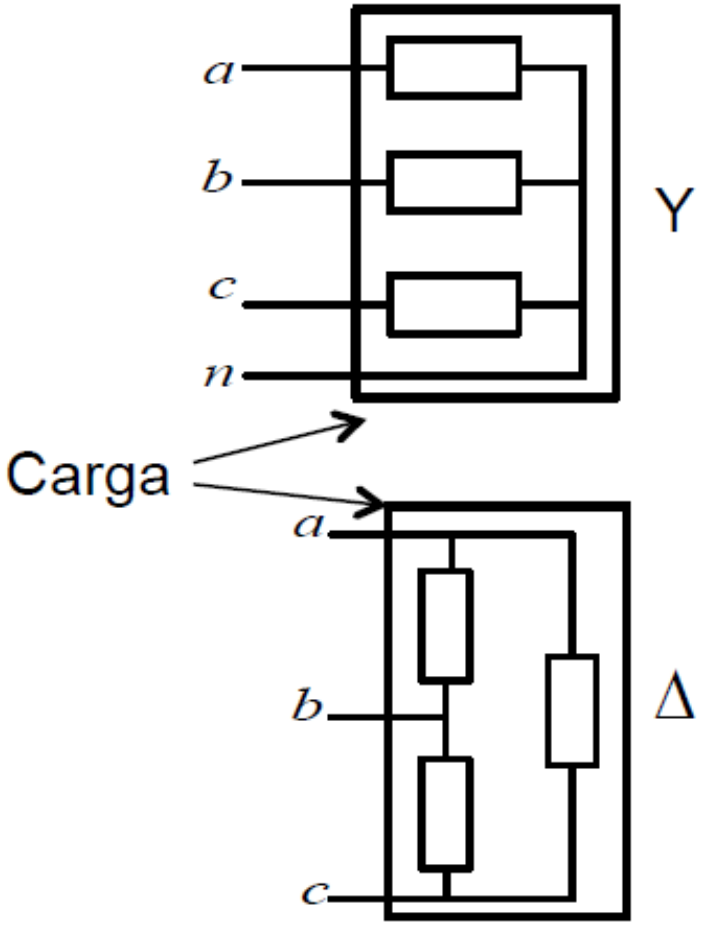
- Por lo tanto

$$p_{3\phi}(t) = \frac{3}{2} V_M I_M \cos(\theta) = 3 V_{RMS} I_{RMS} \cos(\theta) = 3 p_{1\phi}$$

Sistemas trifásicos balanceados

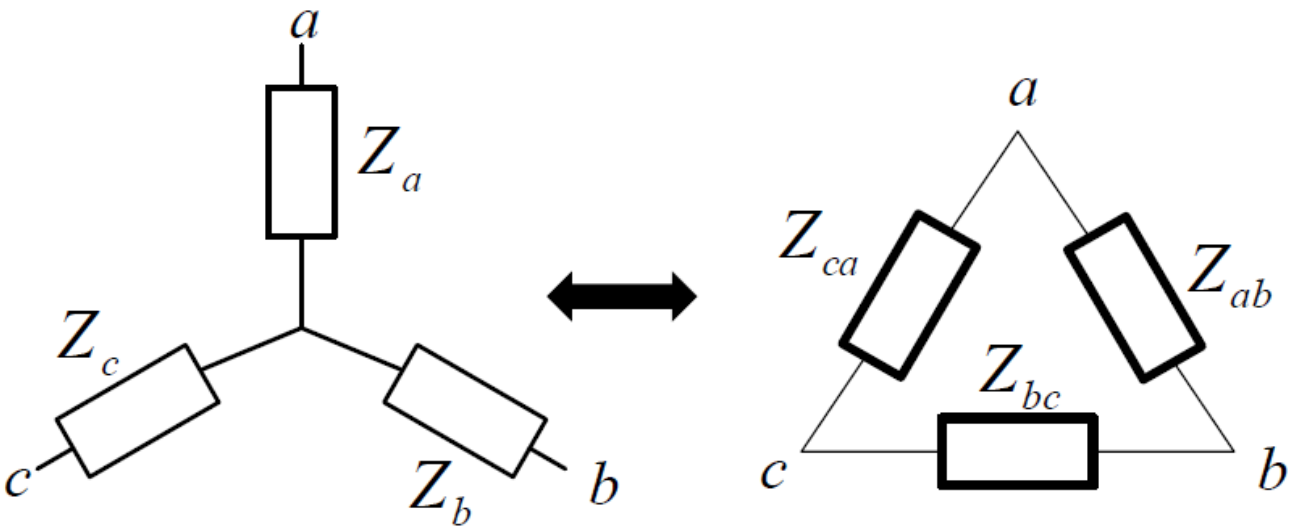
- Ejemplos: Interconexión de sistemas





Conexiones trifásicas: Carga Y-Δ

- Equivalencia entre impedancia conectadas en Y-Δ



Carga balanceada:

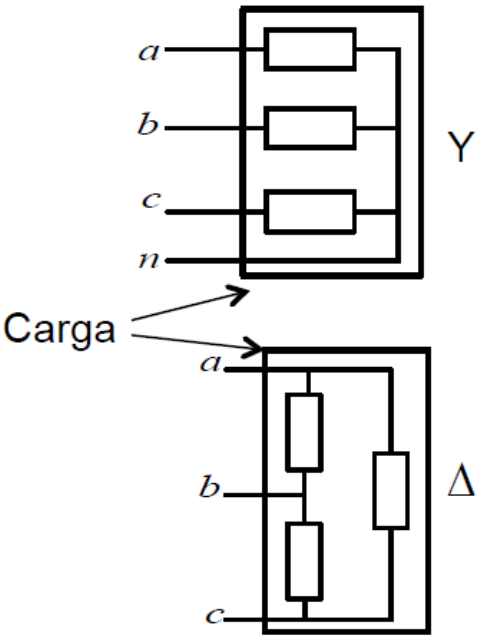
$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta$$

$$Z_\Delta = 3 Z_Y$$

$$\boldsymbol{Z}_a = \frac{Z_{ab} \cdot Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \qquad \boldsymbol{Z}_{ab} = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_c}$$

$$\boldsymbol{Z}_b = \frac{Z_{ab} \cdot Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \qquad \boldsymbol{Z}_{bc} = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_c}$$

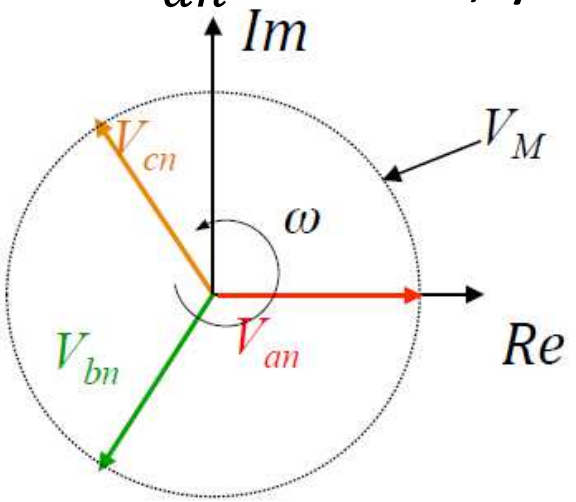
$$\boldsymbol{Z}_c = \frac{Z_{bc} \cdot Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \qquad \boldsymbol{Z}_{ca} = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_c}$$



Conexiones trifásicas: Secuencias fases

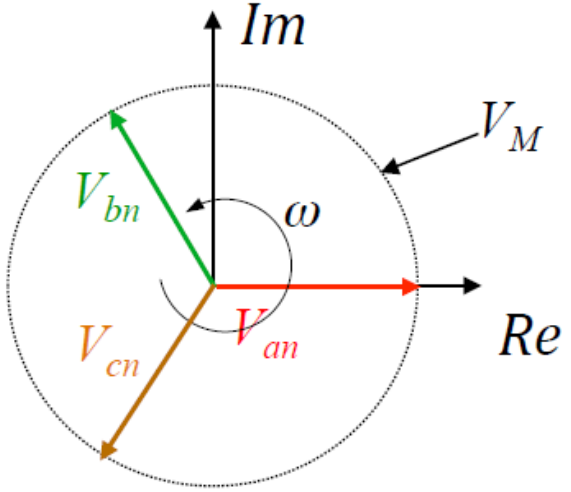
- Secuencia de fases positiva: abc, V_{bn} retrasa a V_{an} en 120°, y V_{cn} retrasa en 240° a V_{an}.

$$V_{an}(t) = V_M\angle 0°$$
$$V_{bn}(t) = V_M\angle -120°$$
$$V_{cn}(t) = V_M\angle 120°$$



- Secuencia de fases negativa: acb, V_{bn} adelanta a V_{an} en 120°, y V_{cn} retrasa en 120° a V_{an}.

$$V_{an}(t) = V_M\angle 0°$$
$$V_{bn}(t) = V_M\angle 120°$$
$$V_{cn}(t) = V_M\angle -120°$$



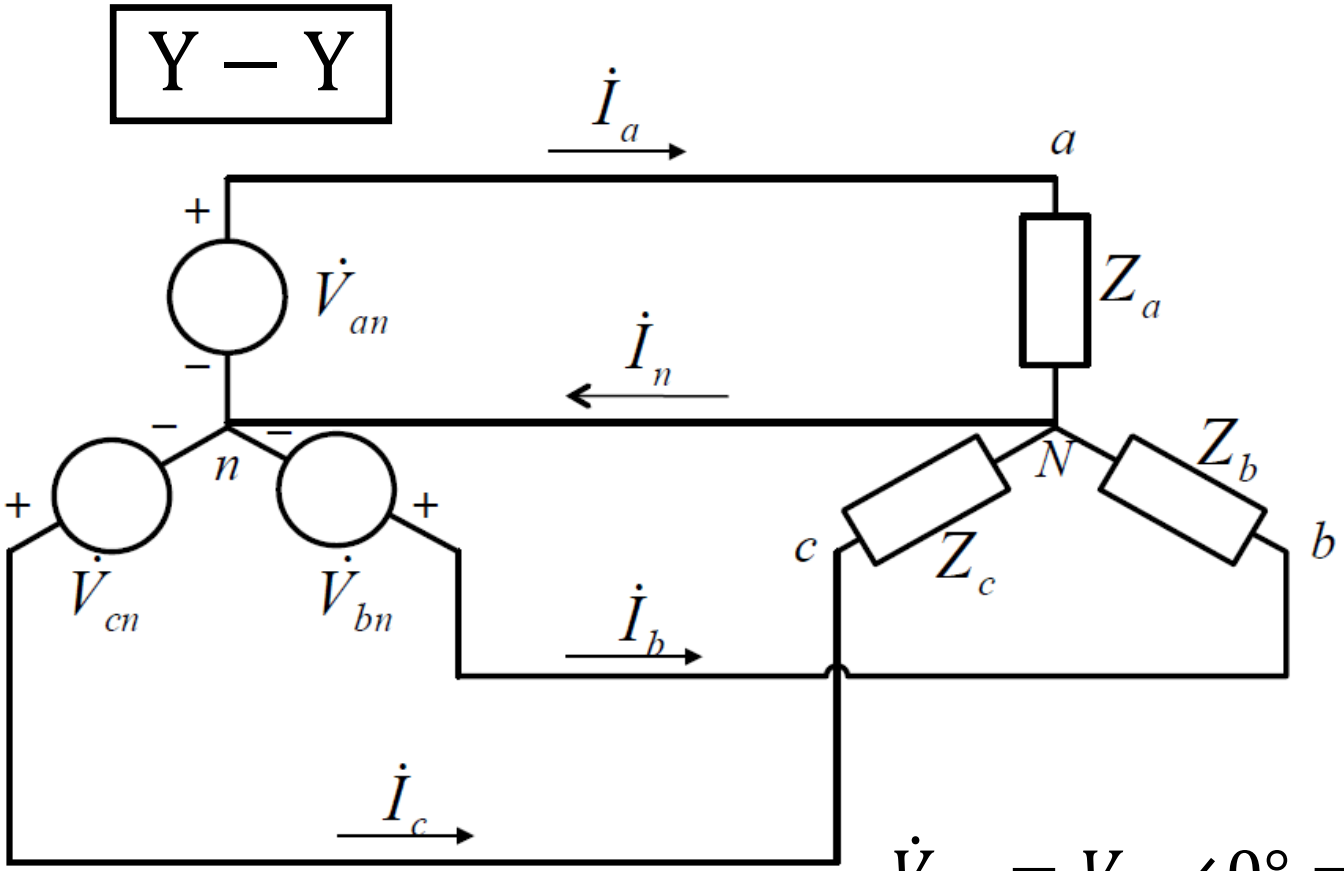
Conexiones trifásicas: Fuente-carga

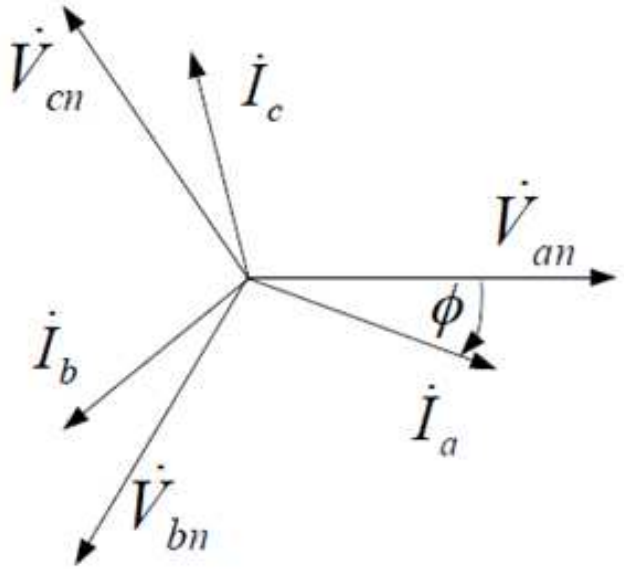
- **Conexiones Simples:** Dado que las fuentes y las cargas pueden conectarse en estrella o en delta, los circuitos trifásicos pueden conectarse en múltiples combinaciones, en el caso más simple de una carga y una fuente estas son las siguientes.

$$\mathrm{Y}-\mathrm{Y} \qquad \mathrm{Y}-\Delta \qquad \Delta-\mathrm{Y} \qquad \Delta-\Delta$$

- Estudiaremos el caso $Y-Y$ y $\Delta-\Delta$, ya que bastan para deducir los demás.
- Como se conectarían múltiples cargas?

Conexiones trifásicas: Fuente-carga





Voltajes de fase

$$\dot{V}_{an} = V_{fn}\angle 0° = V_M$$

$$\dot{V}_{bn} = V_{fn}\angle -120° = V_M[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$\dot{V}_{cn} = V_{fn}\angle 120° = V_M[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

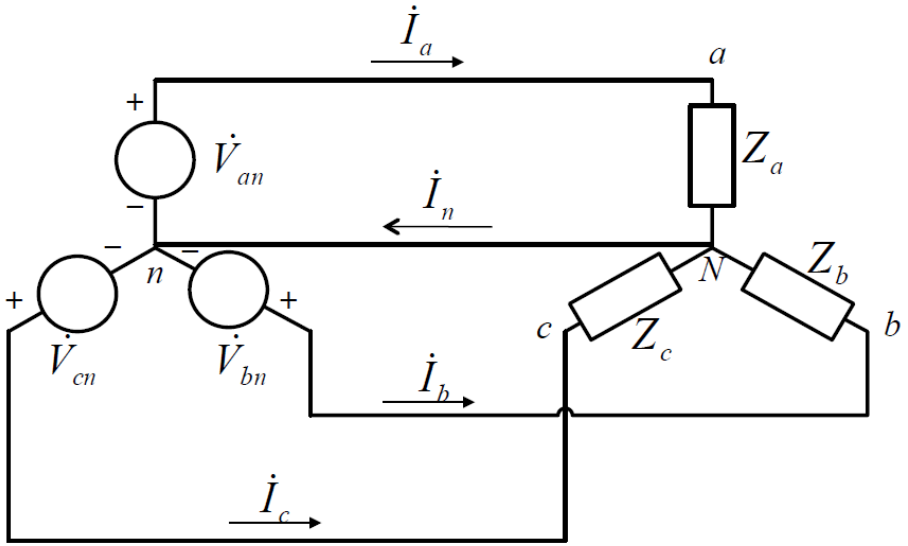
Conexiones trifásicas: Fuente-carga

¿Cuánto vale V_{ab} (*voltaje de línea*)?

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{an} - \dot{V}_{bn} = V_{fn}\angle 0° - V_{fn}\angle -120°$$

$$= V_{fn} - V_{fn}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = V_{fn}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{V}_{ab} = V_{fn}\sqrt{3}\angle 30°}$$



Análogamente:

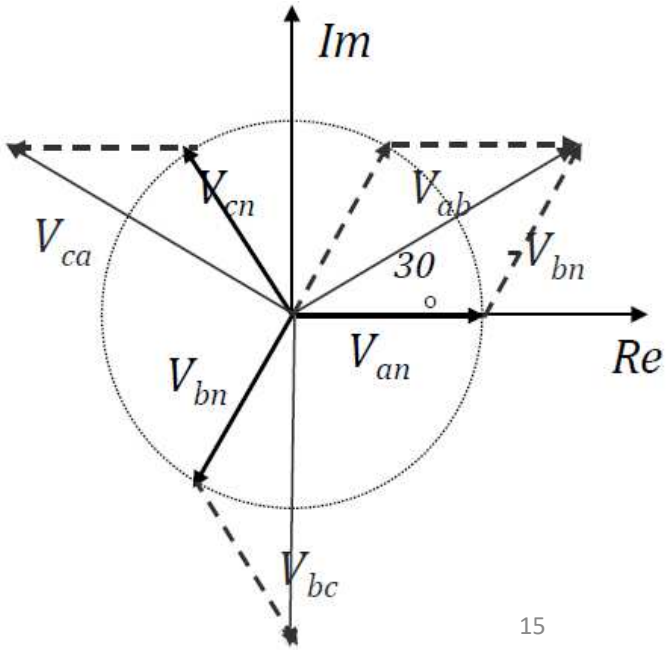
$$\dot{V}_{ab} = V_{ff}\angle 30°$$

$$\dot{V}_{bc} = V_{ff}\angle -90°$$

$$\dot{V}_{ca} = V_{ff}\angle -210°$$

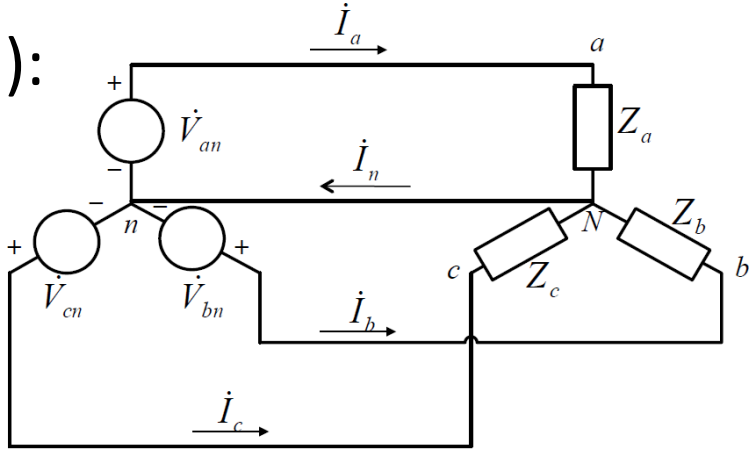
$$V_{ff} = V_{fn}\sqrt{3} \rightarrow \text{fase-fase}$$

¡Gráficamente era evidente! →



Conexiones trifásicas: Fuente-carga

En caso de las **corrientes** (corriente de línea):



$$\dot{I}_a = \frac{\dot{V}_{an}}{Z_a} = \frac{V_{fn}\angle 0°}{Z_a} = \frac{V_{fn}}{|Z_a|}\angle -\phi$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{V}_{bn}}{Z_b} = \frac{V_{fn}\angle -120°}{Z_b} = \frac{V_{fn}}{|Z_b|}\angle -120 -\phi$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{V}_{cn}}{Z_c} = \frac{V_{fn}\angle 120°}{Z_c} = \frac{V_{fn}}{|Z_c|}\angle -240 -\phi$$

En circuitos balanceados:

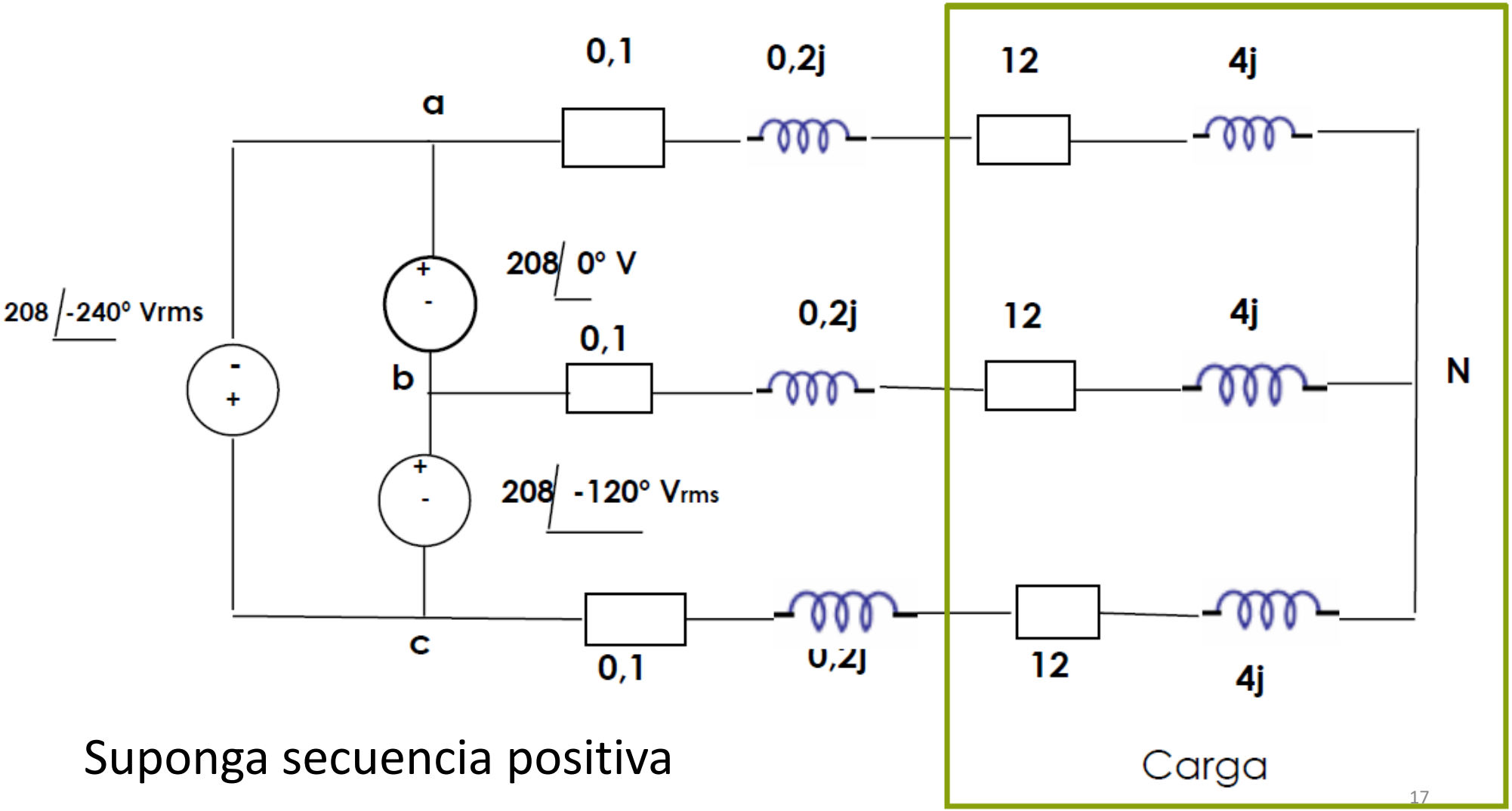
$$\rightarrow \quad \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \dot{I}_n = 0$$

$$V_{Nn} = 0$$

- En $\mathrm{Y}-\mathrm{Y}$ la **corriente en la línea** que conecta la fuente con la carga es la **misma** que la **corriente de fase que fluye a través de la impedancia de carga $\mathbf{Z_i}$**, con $i = a, b\ y\ c$.
- **Receta:** en un circuito balanceado se puede analizar **una fase** y con la **secuencia** de fase se determinan las demás.
- **Ojo:** Qué pasa si el conductor neutro tiene impedancia Z_0?

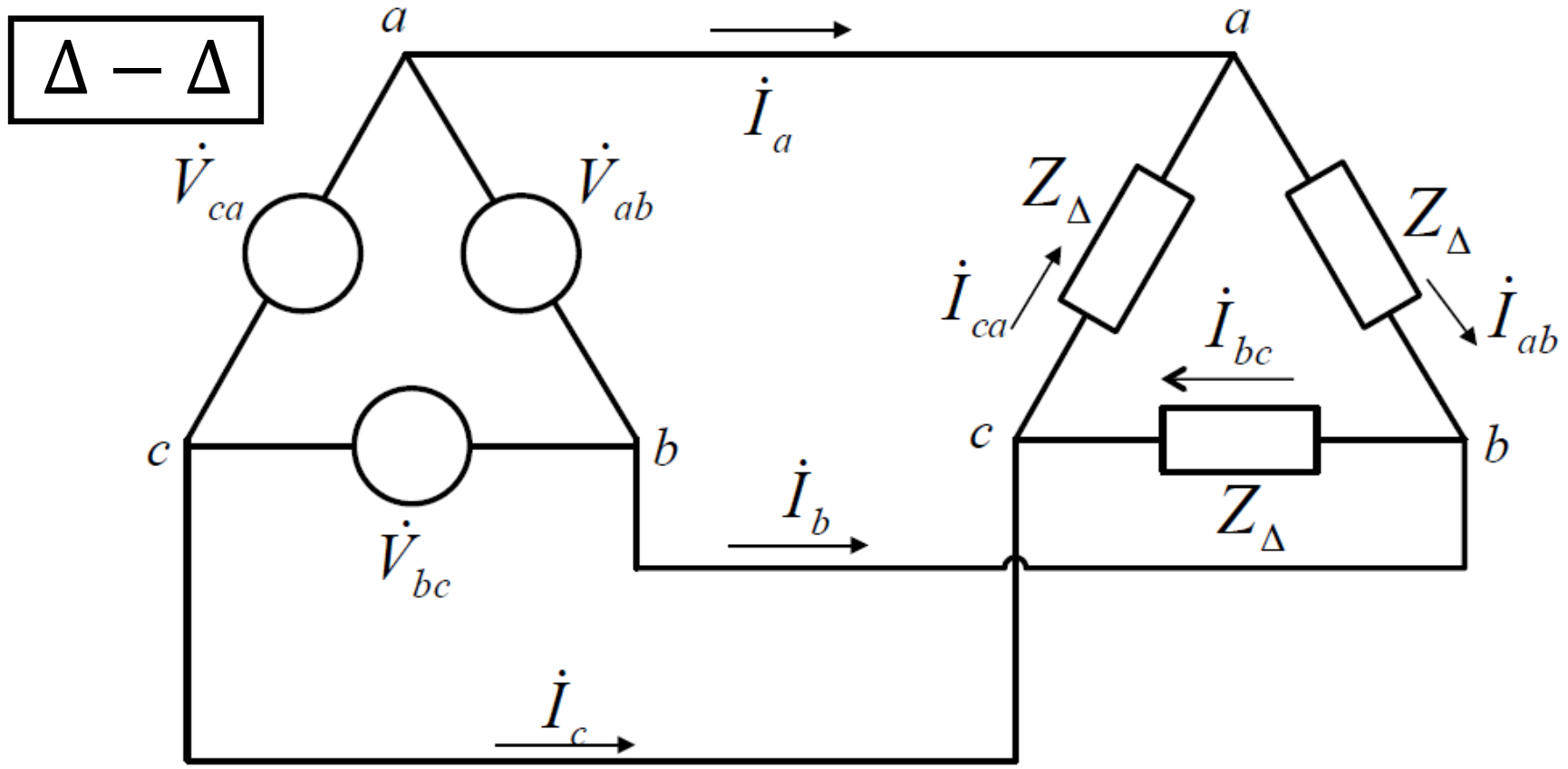
Conexiones trifásicas: Fuente-carga

- Calcular corrientes de línea, voltajes de línea en la carga, caída de tensión en la línea.



Suponga secuencia positiva

Conexiones trifásicas: Fuente-carga



- **Fuentes en delta:**

$\dot{V}_{ab} = V_{ff}\angle 0°$

$\dot{V}_{bc} = V_{ff}\angle -120°$

$\dot{V}_{ca} = V_{ff}\angle 120°$

De lo deducido anteriormente

$\Delta - \mathrm{Y}$

$\dot{V}_{an} = V_{fn}\angle -30°$

$\dot{V}_{bn} = V_{fn}\angle -150°$

$\dot{V}_{cn} = V_{fn}\angle 90°$

$V_{fn} = \frac{V_{ff}}{\sqrt{3}}$

Conexiones trifásicas: Fuente-carga

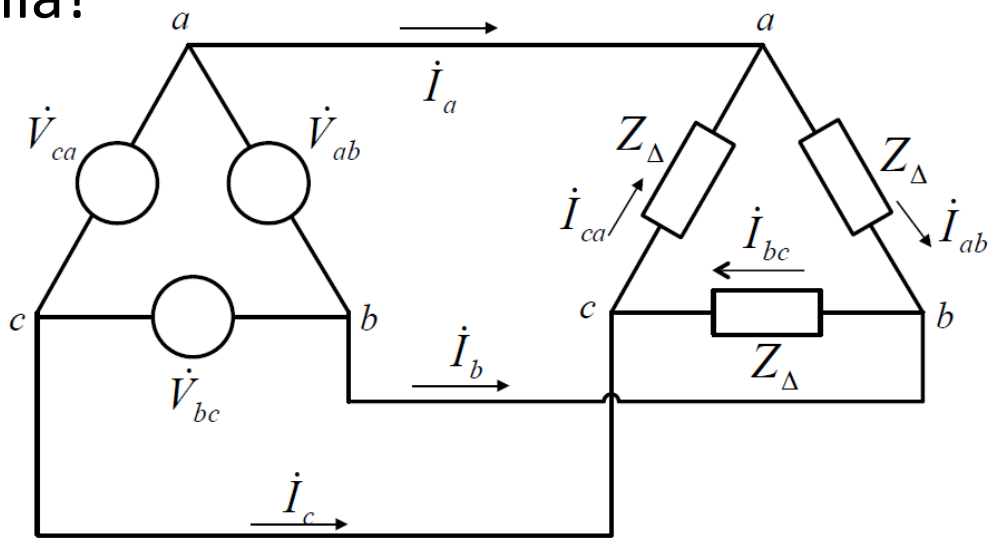
¡Una fuente trifásica en delta se puede transformar en una fuente en estrella!

- **Cargas en delta:**

$$I_{\text{Ln}} = \sqrt{3} I_{\Delta}$$

Corriente de línea

Corriente en el Δ



- **Demostración:**

Por LKC $\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}$

Si $\dot{I}_{ab} = I_\Delta \angle \varphi°$ entonces $\dot{I}_{ca} = I_\Delta \angle \varphi° + 120°$

$$\rightarrow \dot{I}_a = I_\Delta \angle \varphi° - I_\Delta \angle \varphi° + 120°$$

Conexiones trifásicas: Fuente-carga

Desarrollamos:

$$\dot{I}_a = I_\Delta[\cos(\varphi) + j\, sin(\varphi) - \cos(\varphi + 120°) - j\cos(\varphi + 120°)]$$

$$\dot{I}_a = 2I_\Delta[sin(\varphi + 60°)\sin(60°) - j\cos(\varphi + 60°)\sin(60°)]$$

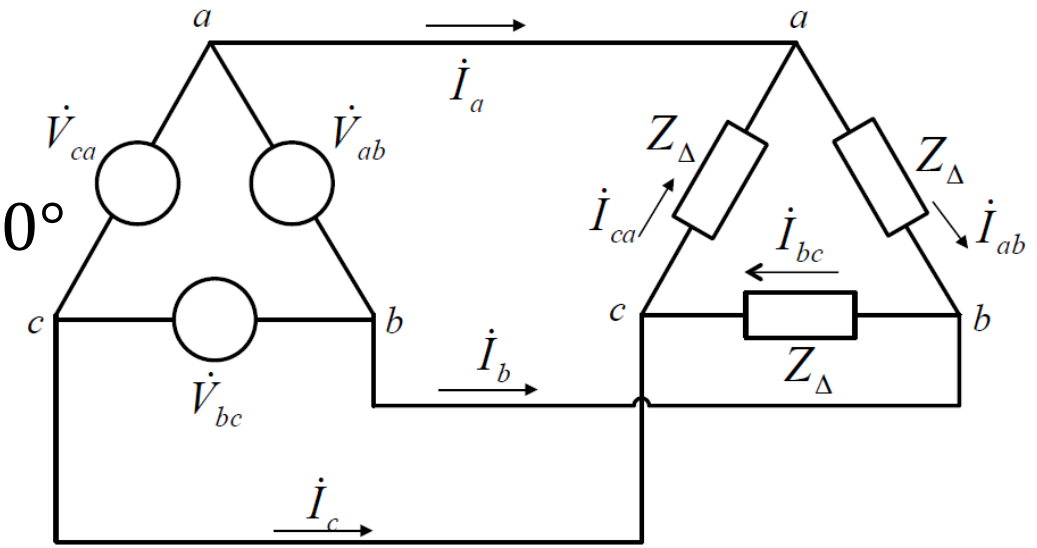
$$\dot{I}_a = \sqrt{3}I_\Delta[sin(\varphi + 60°) - j\cos(\varphi + 60°)]$$

$$\dot{I}_a = \sqrt{3}I_\Delta[cos(\varphi - 30°) + j\, sin(\varphi - 30°)]$$

Por lo tanto:

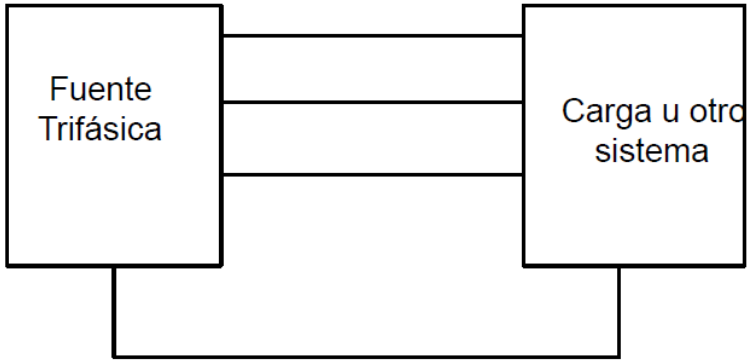
$$\dot{I}_a = \sqrt{3}I_\Delta\angle\varphi - 30° = I_{\mathrm{Ln}}\angle\varphi - 30°$$

$$\boxed{I_{\mathrm{Ln}} = \sqrt{3}I_\Delta}$$



Conexiones trifásicas: Potencia compleja

$$\dot{S} = \sqrt{3} V_{ff} I_{Linea} \angle \varphi$$



$S_{consumida}$! $V_{ff} = V_{Linea}$? $I_{Linea} = ?$

Sabemos que: $\dot{S} = \dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c$

Reemplazando:

$$\dot{S}_Y = V_{fn}\angle 0° \cdot (I_{Ln}\angle -\varphi°)^* + V_{fn}\angle -120° \cdot (I_{Ln}\angle -\varphi° - 120°)^* + V_{fn}\angle 120° \cdot (I_{Ln}\angle -\varphi° + 120°)^*$$

Dado que la carga es balanceada:

$$\dot{S}_Y = 3 V_{fn} I_{Ln} \angle \varphi$$
$$\dot{S}_\Delta = 3 V_{ff} I_\Delta \angle \varphi$$

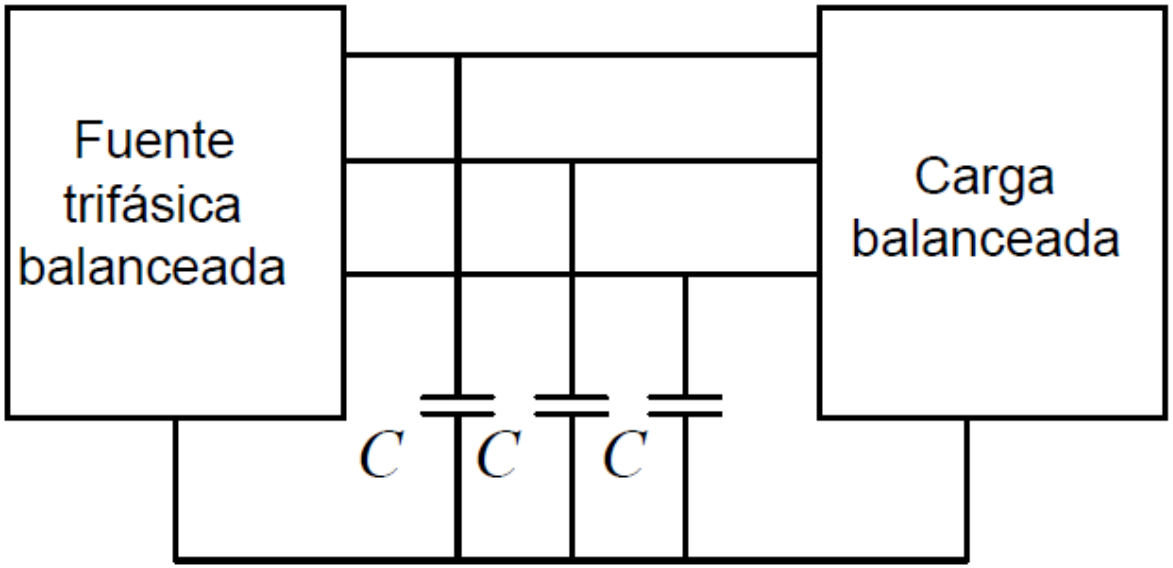
→ $\boxed{\dot{S} = \sqrt{3} V_{ff} I_{Ln} \angle \varphi}$

Conexiones trifásicas: Corrección factor de potencia

- Por cada fase corrige individualmente, igual que en el caso monofásico.

  Luego $$\dot{S}_c = jQ_c = -j\omega C V_c^2$$

  es provista por 3 condensadores (uno por cada fase), siendo V_c la diferencia de voltaje en los terminales de cada condensador.



Conexiones trifásicas: Corrección factor de potencia

Algunas definiciones:

- **Corrientes:**
  - Corrientes trifásicas NO!, Corrientes en sistemas trifásicos si!
  - A) Corriente de Línea
  - B) Corriente de Carga
- **Voltajes:**
  - Voltaje de Línea (DATO) = Voltaje de Fase (OJO!) = Voltaje Fase – Voltaje entre fases = V_{ab}
  - Voltaje Fase – Neutro = V_{an} (Se utiliza para los cálculos)
- **Factor de potencia en atraso** = corriente atrasada respecto de voltaje (misma fase)
- **Secuencia:** positiva o negativa