Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea 14

Repaso Examen
1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- Los alumnos con excelente asistencia reemplaza las peores 3 tareas o controles, siendo excelente asistencia haber faltado a menos de tres clases/ayudantías hasta el viernes 30 de junio. Para los demás que la realizan en forma opcional reemplaza sólo el peor control o tarea.
- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final (contando fin de semana y festivos). Para esto, se debe enviar un correo al ayudante encargado avisando que se usará el comodín antes de que termine el plazo final original.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

Obtenga el diagrama de Bode de magnitud de la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s\left(1 + \frac{0{,}18s}{10} + \frac{s^2}{100}\right)}{100\left(1 + \frac{s}{0{,}01}\right)\left(1 + \frac{s}{1000}\right)^2}$$

Solución:

De la función de transferencia podemos darnos cuenta que existen 3 polos.

$$p_1 = 0{,}01 = 10^{-2}[rad/s]$$

$$p_2 = 1000 = 10^3[rad/s]$$

$$p_3 = 1000 = 10^3[rad/s]$$

De manera análoga, se observa que existen 3 ceros, uno en frecuencia cero y otros dos aportados por la ecuación cuadrática::

$$1 + \frac{0{,}18 \cdot s}{10} + \frac{s^2}{100} = 0$$

Esta tiene por soluciones $s_{1,2} = -0{,}9 \pm 9{,}95j$. Tomando su magnitud obtenemos los valores $|s_1| = |s_2| = 10$[rad/s]. De este modo los ceros se encuentran en:

$$c_1 = 0[rad/s]$$

$$c_2 = 10[rad/s]$$

$$c_3 = 10[rad/s]$$

Evaluando la función de transferencia en $s = jw$ obtenemos:

$$H(j\omega) = \frac{jw\left(1 + \frac{0{,}18jw}{10} + \frac{(j\omega)^2}{100}\right)}{100\left(1 + \frac{jw}{0{,}01}\right)\left(1 + \frac{jw}{1000}\right)^2}$$

Luego tomando su módulo:

$$|H(jw)| = \frac{|jw|\left|\left(1 - \frac{w^2}{100}\right) + \left(\frac{0{,}18j\omega}{10}\right)\right|}{|100||1 + \frac{j\omega}{0{,}01}\,||1 + \frac{j\omega}{1000}|\,|1 + \frac{j\omega}{1000}\,|}$$

Ahora para graficar el diagrama de magnitud consideramos lo siguiente:

- Al existir un cero en $c_1 = 0\ [rad/s]$, el gráfico comienza con una pendiente de crecimiento de 20 $[dB/dec]$, sin conocer explícitamente en qué valor comienza. Para obtener el punto de partida se evalúa en un valor de frecuencia cercano a $c_1 = 0\ [rad/s]$ y que se encuentre antes del polo $p_1 = 10^{-2}\ [rad/s]$. De este modo el valor elegido puede ser $w = 10^{-3}[rad/s]$, obteniendo el siguiente resultado:

$$|H(j\omega)|_{w=10^{-3}} \approx 9,95 \times 10^{-6}$$

$$20\log\left(9,95 \times 10^{-6}\right) \approx -100dB$$

- La gráfica comienza en $(\omega, 20log|H(j\omega)|) = (10^{-3}, -100)$, continuado con una pendiente de crecimiento de 20 $[dB/dec]$ hasta la década siguiente, alcanzando un valor de -80 $[dB]$. Década en donde se encuentra con el polo $p_1 = 10^{-2}\ [rad/s]$, el cual provoca un decrecimiento de 20 $[dB/dec]$, anulando la pendiente de crecimiento provocada por el cero, manteniéndose constante a partir de este valor de frecuencia.
- La gráfica se mantiene constante hasta que en $w = 10\ [rad/s]$, se encuentra con c_2 y c_3, donde cada uno provoca un aumento en la pendiente de crecimiento 20 $[dB/dec]$, de modo que ambos juntos generan una pendiente de crecimiento de 40 $[dB/dec]$.

- El aumento anterior, ocurre por dos décadas hasta $w = 10^3$ $[rad/s]$, es decir, que la magnitud de la función de transferencia alcanza el valor de 0 dB. Finalmente en esta década se encuentra con los polos p_2 y p_3, que en conjunto generan una pendiente de decrecimiento de 40 $[dB/dec]$, que anula la pendiente de crecimiento de 40 $[dB/dec]$ anterior, de modo que desde este valor de frecuencia en adelante la magnitud de la función de transferencia se mantiene constante.

- Ahora siendo más rigurosos, al haber dos ceros conjugados, estos generan un undershoot, cuya magnitud se puede obtener con $20log(Q)$, siendo Q el factor de calidad. Recordando la ecuación:

$$\left(\frac{s}{w_0}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{w_0}s\right) + 1 = 0$$

$$\frac{s^2}{100} + \frac{0{,}18s}{10} + 1 = 0$$

$$\frac{s^2}{100} = \left(\frac{s}{10}\right)^2 \Rightarrow w_0 = 10$$

$$\frac{2\zeta}{w_0} = \frac{0{,}18}{10} \Rightarrow \zeta = \frac{0{,}18 \cdot w_0}{2 \cdot 10} \Rightarrow \zeta = 0{,}09$$

Valor con el cual finalmente se obtiene Q y la magnitud del overshoot:

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}09} \approx 5{,}5$$

$$20\log(5{,}5) \approx 15dB$$

Con todas las consideraciones anteriores, el diagrama de Bode de magnitud final es el siguiente:

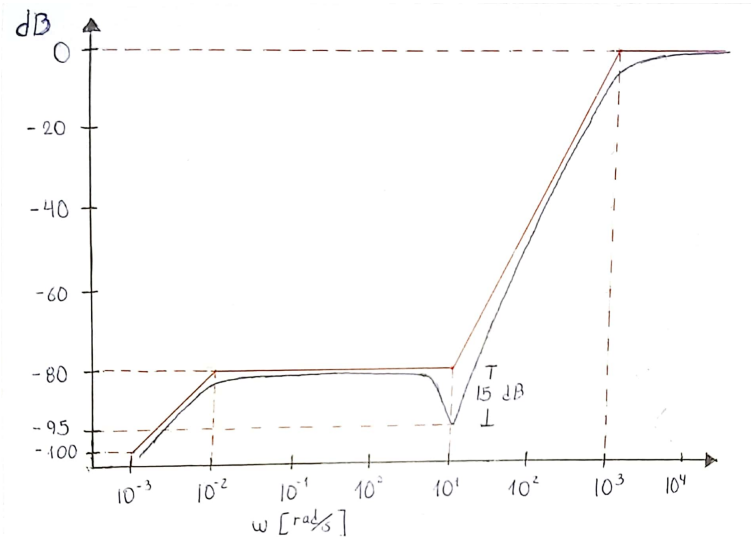


Diagrama de Bode de Magnitud

Criterios de corrección:

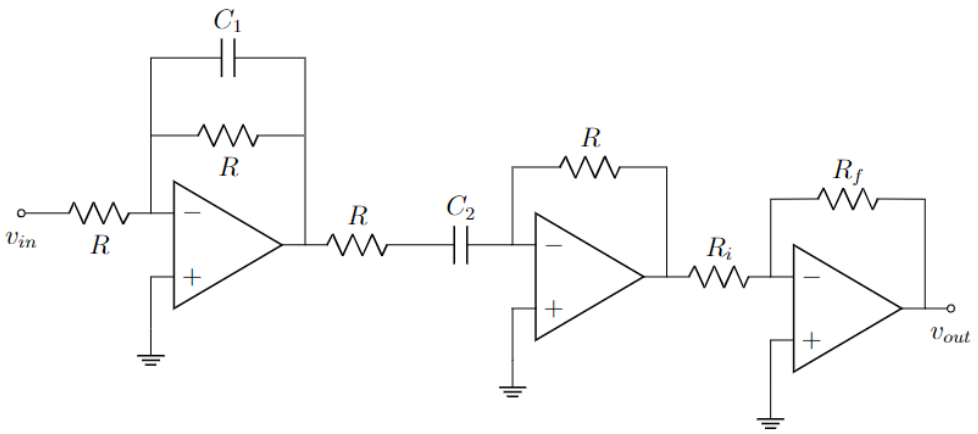
- 1 punto por efecto de s correcto.
- 1 punto por efecto de ceros con polinomio cuadrático (sin considerar Q).
- 1 punto por efecto y magnitud de Q.
- 1 punto por efecto de 100 (magnitud de inicio del Bode correcta).
- 1 punto por efecto de polo en 0,01.
- 1 punto por efecto de polo cuadrático en 1000.

Problema 2

Para el circuito de la figura que está compuesto por amplificadores operaciones ideales:

a) Determine paso a paso la función de transferencia v_{out}/v_{in} de la red.

b) Sabiendo que los valores de los componentes son $R = 1$ [kΩ], $C_1 = 50$ [nF], $C_2 = 5$ [μF], $R_i = 3$ [kΩ] y $R_f = 6$ [kΩ], indique a qué tipo de filtro corresponde, justificando su respuesta a partir del diagrama de Bode de magnitud.



Filtro desconocido

Solución:

a) Se observa que cada Opamp está en configuración de amplificador inversor, y que dada la topología del circuito, se puede calcular la función de transferencia de cada Opamp según la fórmula

$$H(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

y luego multiplicar las 3 funciones de transferencia para obtener la función de transferencia del filtro completo:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{v_{out}}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_1}{v_{in}}$$

En caso de no usar la fórmula, usando las propiedades de cortocircuito virtual y de impedancia de entrada infinita se puede plantear que:

$$v_1 = 0 - \frac{v_{in} - 0}{R} \cdot \frac{R}{1 + sRC_1}$$

Luego,

$$v_2 = 0 - \frac{v_1 - 0}{R + \frac{1}{sC_2}} \cdot R$$

y finalmente

$$v_{out} = 0 - \frac{v_2 - 0}{R_i} \cdot R_f$$

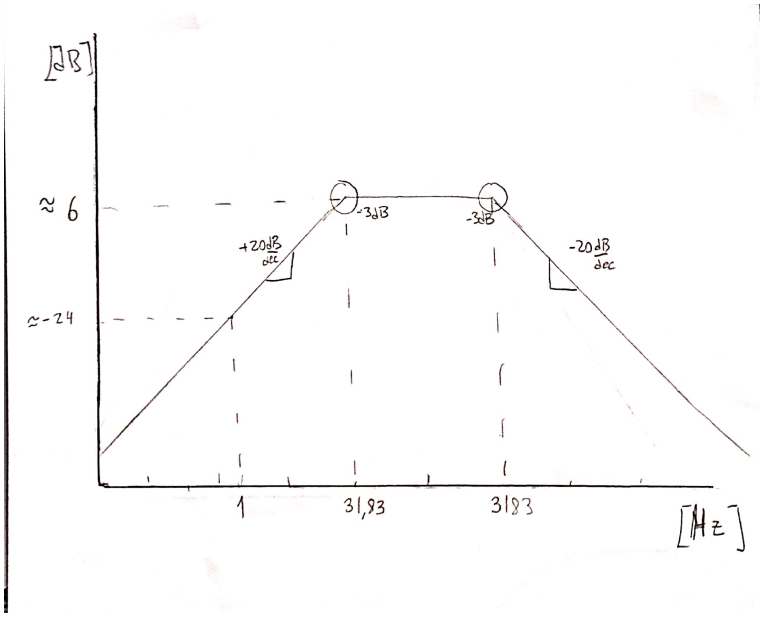
A partir de las expresiones anteriores, se puede reemplazar la primera en la segunda, y luego la segunda en la tercera para encontrar v_{out}/v_{in}, o se puede despejar v_1/v_{in}, v_2/v_1 y v_{out}/v_2 y luego multiplicar estas funciones de transferencia. El resultado sería:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{sC_2R^2R_f}{R(1 + sRC_1)(1 + sRC_2)(R_i)} = -\frac{sC_2RR_f}{s^2R^2R_iC_1C_2 + s(C_1RR_i + C_2RR_i) + R_i}$$

b) Al remplazar los valores, la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{40000s}{s^2 + 20200s + 4000000}$$

Esta función tiene un cero en $w_0 = 0(rad/s)$ y dos polos en $w_1 = 200(rad/s)$ y en $w_2 = 20000(rad/s)$, donde el diagrama de Bode viene dado por lo siguiente:



Se puede ver que el filtro es de tipo pasabanda. Para calcular la ganancia se puede usar la fórmula de $20Log(||H(s)||)$:

$$20Log(||H(s)||) = 20Log(40000w) - 20Log(\sqrt{(4000000000 - w^2)^2 + (20200w)^2})$$

Así, la ganancia en la banda pasante es $5{,}93dB$ (con $w = 2000(rad/s)$).

Criterios de corrección:

- 3 puntos por función de transferencia correcta.
- 3 puntos por indicar tipo de filtro y justificar con forma de Bode (bastaba con la forma).

Problema 3

Considere el circuito de la figura con inductancias acopladas magnéticamente.

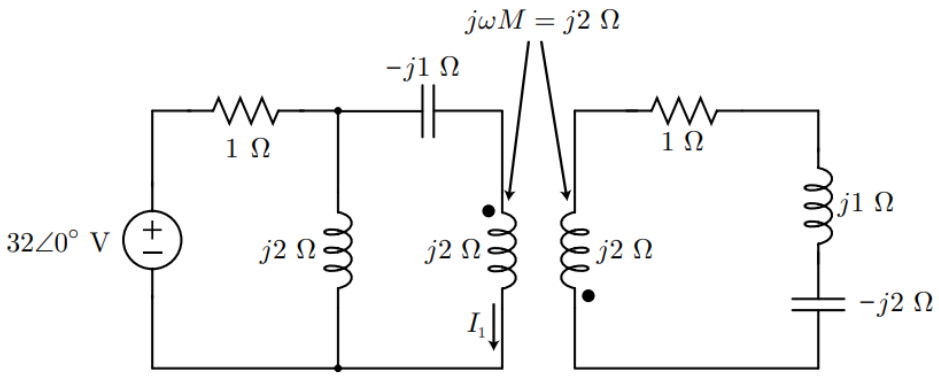


Figura 1: Circuito acoplado

a) Plantee las ecuaciones de malla del circuito.

b) Determine la corriente I_1 que se muestra en la figura.

Solución:

a) En cada malla se tiene:

Malla 1:

$$32\angle 0^o = 1i_1 + j2(i_1 - i_2)$$

Malla 2:

$$j2(i_2 - i_1) - j1i_2 + j2i_2 + j2i_3 = 0$$

Malla 3:

$$j2i_3 + j2i_2 + 1i_3 + j1i_3 - j2i_3 = 0$$

b) Para encontrar la corriente I_1 de la figura nos fijamos en que $I_1 = i_2$. Luego, resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a que:

$$i_2 = 7{,}80488 + 6{,}2439j = 9{,}995\angle 38{,}65^o$$

Por lo que finalmente la corriente pedida es:

$$I_1 = 9{,}995\angle 38{,}65^o \; A$$

Criterios de corrección:

- 1 punto por cada malla (3 en total).
- 3 puntos por valor de I1.

Problema 4

Determine los valores del parámetro T de la siguiente red.

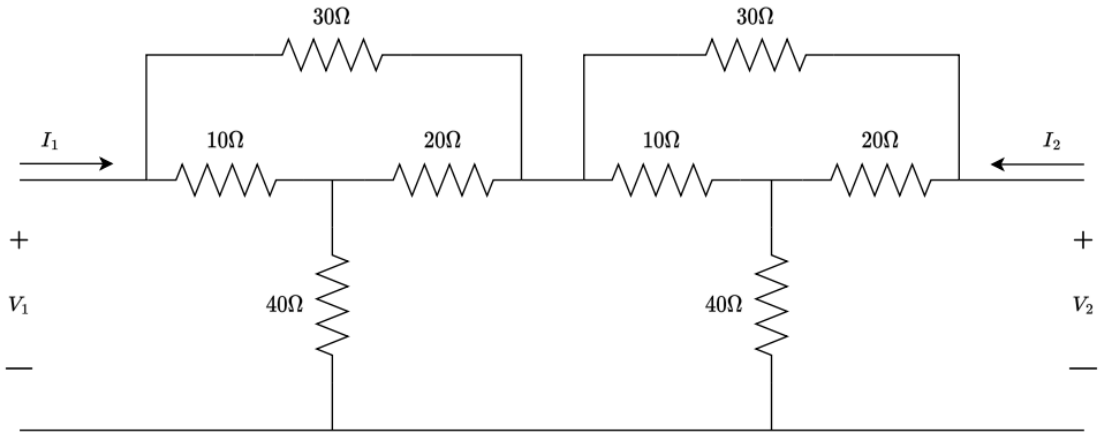


Figura 2: Circuito acoplado

Solución: Se observa que la red es una cascada de dos redes idénticas, por lo que el resultado de los parámetros T serán formados por el cuadrado de la matriz de parámetros T de la red duplicada.

Se sabe que los parámetros T vienen dado por las siguientes expresiones:

$$A = \frac{V_1}{V_2}|_{I_2=0}$$

$$B = -\frac{V_1}{I_2}|_{V_2=0}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2}|_{I_2=0}$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2}|_{V_2=0}$$

Considerando $I_2 = 0$:

$$V_1 = 10(I_1 - I_3) + 40I_1$$

$$10(I_3 - I_1) + 30I_3 + 20I_3 = 0$$

$$V_2 = V_1 - 30I_3$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$\frac{V_1 + 10I_3}{50} = I_1$$

Por lo que reemplazando en la segunda:

$$10I_3 + \frac{V_1}{5} - 2I_3 + 50I_3 = 0$$

$$I_3 = \frac{V_1}{290}$$

Así, reemplazando en la tercera ecuación:

$$V_2 = V_1 - V_1\frac{3}{29}$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{29}{26} = 1{,}11$$

Con la relación de I_3 y V_1, reemplazando en la primera ecuación se obtiene:

$$\frac{V_1 30/29}{50} = I_1$$

$$V_1 = I_1\frac{145}{3}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{29}{26} = \frac{I_1 145/3}{V_2}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{3}{130} = 0{,}023$$

Para $V_2 = 0$:

Se realiza un doble divisor de voltaje para encontrar la corriente por la resistencia de 40Ω y encontrar así I_2.

$$I_x = I_1\frac{30}{(40||20 + 10 + 30)} = I_1\frac{9}{16}$$

$$I_y = I_x \frac{20}{40+20} = I_1 \frac{3}{16}$$

Como I_1 es igual a $I_y - I_2$, por KCL:

$$I_1 = I_1 \frac{3}{16} - I_2$$

$$I_2 = -I_1 \frac{13}{16}$$

$$D = \frac{-I_1}{I_2} = \frac{16}{13} = 1{,}23$$

Se puede enontrar la impedancia de entrada con la resistencia equivalente del sistema:

$$\frac{V_1}{I_1} = R_{eq} = (40||20+10)||30 = \frac{105}{8}$$

Del resultado de C se puede obtener:

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{105}{8} = \frac{V_1}{-16/13 I_2}$$

$$B = \frac{-V_1}{I_2} = \frac{210}{13} = 16{,}15$$

$$\text{T}=\begin{pmatrix} 29/26 & 210/13 \\ 3/130 & 16/13 \end{pmatrix}$$

$$\text{T}=\begin{pmatrix} 1{,}11 & 16{,}15 \\ 0{,}023 & 1,23 \end{pmatrix}$$

$$T^2=\begin{pmatrix} 1093/676 & 6405/169 \\ 183/3380 & 319/169 \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- 1 punto por cada parámetro de T (4 en total).
- 1 punto por saber cómo obtener T final.
- 1 punto por tener T final correcta.

Problema 5

Encuentre el valor de V_x considerando el Opamp ideal.

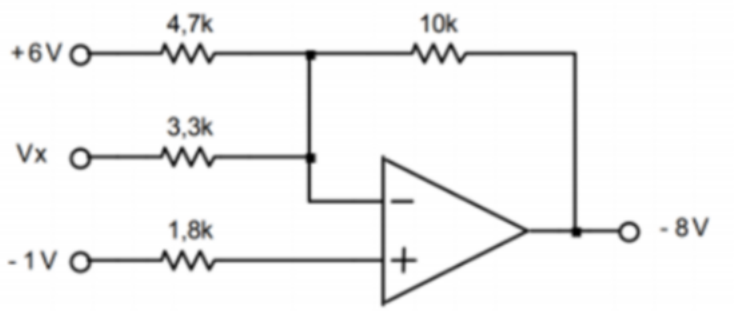


Figura 3: Circuito acoplado

Solución: Debido a que la impedancia a la entrada del Opamp es infinita, entonces la corriente en la entrada inversora y no inversora es cero. A partir de lo anterior se tiene:

$$V^+ = -1V$$

Luego, por cortocircuito virtual,

$$V^- = V^+$$

Por nodos:

$$\frac{6 - -1}{4{,}7k} + \frac{V_x - -1}{3{,}3k} = \frac{-1 - -8}{10k}$$

Despejando V_x:

$$V_x = -3{,}604$$

Criterios de corrección:

- 1 punto por saber que $V^- = -1$.
- 4 puntos por ecuación de nodos correcta.
- 1 punto por obtener V_x.