ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
IEE 2123
Circuitos Eléctricos
Segundo Semestre 2025

Tarea 8

Fecha Entrega: Lunes 17 de Noviembre hasta las 18:00 Hrs.

- La tarea debe ser entregada en un archivo `.pdf` y cargada en el cuestionario de Canvas habilitado, antes del plazo. El formato del archivo debe ser `TX_Apellido_Nombre.pdf`
- Debe indicar claramente su desarrollo en cada ejercicio, puesto que problemas sin desarrollos no serán considerados corregidos.
- Las tareas deben ser entregas en en algún editor de texto como Word o LaTeX. En particular, se recomienda LaTeX(Overleaf) por su facilidad para manejar ecuaciones.
- Libros, papers o cualquier material usado debe ser referenciado apropiadamente. Material no debidamente referenciado será penalizado mediante descuentos en la nota.
- Esta tarea tiene como objetivos la revisión de ciertos temas específicos vistos en clases, los cuales son indicados en el apartado "Tema de la Tarea". La utilización de métodos distintos a los solicitados en cada ejercicio no está permitido, y resultarán en la no correcciónn del ejercicio.
- En caso de utilizar herramientas de Inteligencia Artificial (IA), estas solo deben emplearse como apoyo en la búsqueda de información o en la redacción, sin incluir directamente en las respuestas una reproducción literal del contenido generado. Además, no se debe proporcionar a la IA la pregunta ni una variación de esta como instrucción directa. **En el caso de usar IA sin la debida citación, se asignará nota 1.0 en la tarea.**
- Se atenderán dudas mediante Foro en Canvas UC, el cual estará habilitado hasta 1 día antes de la fecha de entrega de la tarea.

Problema 1 (10 pts)

1. Determine las funciones de transferencia de los circuitos de la Fig. 1 y la Fig. 2. ¿Por qué las funciones de transferencia son distintas?

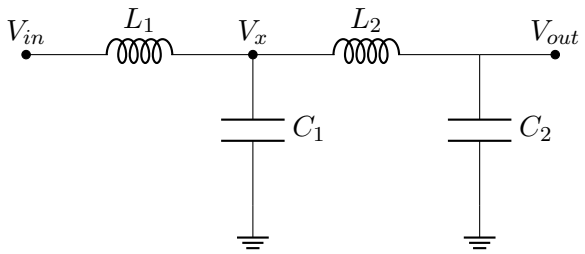


Figura 1: Primer circuito del problema 1.1.

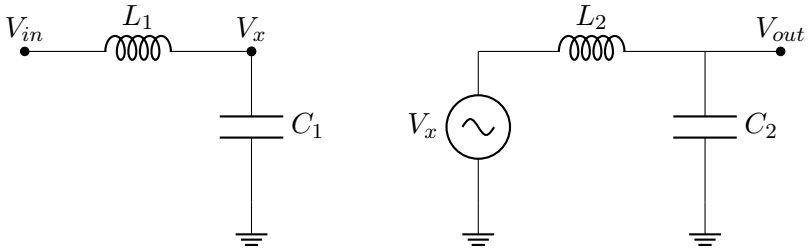


Figura 2: Segundo circuito del problema 1.1.

2. Investigue el filtro pasivo de Notch *Twin-T*, cuyo circuito se presenta en la Fig. 3. Explique que tipo de filtro es, para que se utiliza y escriba su función de transferencia. Finalmente, obtenga el diagrama de Bode mediante `LTSpice`, considerando los valores $R_1 = 1{,}62\text{k}\Omega$, $R_2 = 79{,}57\text{k}\Omega$, $R_3 = 1{,}59\text{k}\Omega$, $C_1 = 100\text{nF}$, $C_2 = 98\text{nF}$ y $C_3 = 2\text{nF}$.

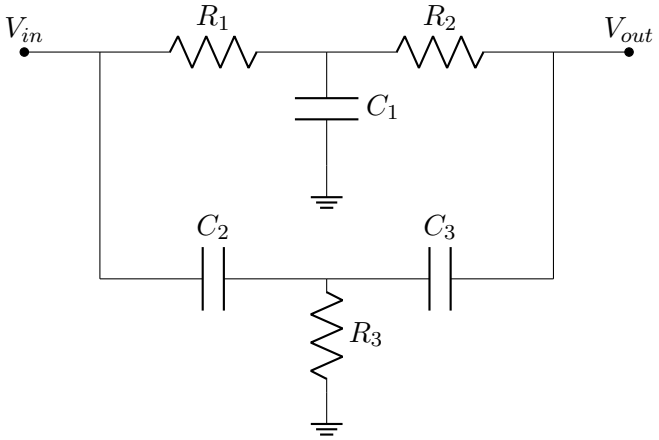


Figura 3: Circuito del problema 1.2.

Solución (10 pts):

Transversalmente, para ambas funciones de transferencia se debe considerar la impedancia de los inductores y de los capacitores como sL y $\frac{1}{sC}$ respectivamente.

1. La función de transferencia del primer circuito se puede determinar aplicando KCL para el nodo de voltaje V_x, según la ecuación 1, y aplicando un divisor de voltaje que permite obtener V_{out} a partir de V_x, según la ecuación 2.

$$\frac{V_{in} - V_x}{sL_1} = \frac{V_x}{1/sC_1} + \frac{V_x - V_{out}}{sL_2} \tag{1}$$

$$V_{out} = \frac{V_x \cdot 1/sC_2}{1/sC_2 + sL_2} = \frac{V_x}{1 + s^2C_2L_2} \tag{2}$$

Dada la ecuación 2, se puede despejar V_x en función de V_{out} según la ecuación 3.

$$V_x = V_{out}(1 + s^2C_2L_2) \tag{3}$$

Reemplazando la expresión en la ecuación 1, se obtiene la ecuación 4, la cual es equivalente a la ecuación 5.

$$\frac{V_{in} - (V_{out}(1 + s^2C_2L_2))}{sL_1} = (V_{out}(1 + s^2C_2L_2))sC_1 + \frac{V_{out}(1 + s^2C_2L_2) - \cancel{V_{out}}}{sL_2} \tag{4}$$

$$\frac{V_{in} - (V_{out}(1 + s^2C_2L_2))}{sL_1} = (V_{out}(1 + s^2C_2L_2))sC_1 + V_{out}sC_2 \tag{5}$$

Agrupando los términos asociados a V_{out}, se obtiene la ecuación 6, concluyendo en la función de transferencia de la ecuación 7.

$$V_{in} = V_{out}(s^4C_2C_1L_2L_1 + s^2C_1L_1 + s^2C_2L_1 + s^2C_2L_2 + 1) \tag{6}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{s^4C_2C_1L_2L_1 + s^2C_1L_1 + s^2C_2L_1 + s^2C_2L_2 + 1} \tag{7}$$

Ahora, para la función de transferencia del segundo circuito basta con aplicar dos divisores de voltaje según la ecuación 8 y la ecuación 2, empleada para la función de transferencia del primer circuito.

$$V_x = \frac{V_{in} \cdot 1/sC_1}{1/sC_1 + sL_1} = \frac{V_{in}}{1 + s^2L_1C_1} \tag{8}$$

Reemplazando V_x según la ecuación 8 en la ecuación 2, se obtiene la ecuación 9, concluyendo en la función de transferencia de la ecuación 10.

$$V_{out} = \frac{V_{in}}{(1 + s^2L_1C_1)(1 + s^2C_2L_2)} \tag{9}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + s^2C_2L_2 + s^2L_1C_1 + s^4C_2C_1L_2L_1} \tag{10}$$

Las funciones de transferencia son distintas, específicamente, la primera función de transferencia cuenta con el término $s^2C_2L_1$, mientras que la segunda función de transferencia carece de este. Esto se debe a que en el segundo circuito el voltaje V_x se replica entre un circuito y otro, debido a que la fuente de voltaje equivale a un buffer. Mientras que en el primer circuito el inductor y capacitor que se conectan al voltaje V_x carga al circuito, modificando la función de transferencia.

2. El filtro pasivo de Notch *Twin-T* corresponde a un filtro rechazabanda que se caracteriza por eliminar una determinada banda de frecuencia. Este se utiliza en diferentes aplicaciones, por ejemplo, para eliminar el zumbido de la red eléctrica en aplicaciones de audio. Su función de transferencia se presenta en la figura 4[1].

$$\frac{vo}{vi}(s) = \frac{s^3 + s^2\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2}\right) + s\left(\frac{1}{C_1C_3R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}\right) + \frac{1}{C_1C_2C_3R_1R_2R_3}}{s^3 + s^2\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2} + \frac{1}{C_2R_3} + \frac{1}{C_3R_2}\right) + s\left(\frac{1}{C_1C_3R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_3} + \frac{1}{C_1C_2R_2R_3} + + \frac{1}{C_2C_3R_2R_3}\right) + \frac{1}{C_1C_2C_3R_1R_2R_3}}$$

Figura 4: Función de transferencia de filtro pasivo Notch *Twin-T*.

Reemplazando en la función de transferencia los parámetros $R_1 = 1{,}62\text{k}\Omega$, $R_2 = 79{,}57\text{k}\Omega$, $R_3 = 1{,}59\text{k}\Omega$, $C_1 = 100\text{nF}$, $C_2 = 98\text{nF}$ y $C_3 = 2\text{nF}$, se obtiene la función de trasferencia de la ecuación 11.

$$\frac{v_{out}}{v_{in}}(s) = \frac{s^3 + 6298{,}52s^2 + 3{,}96 \cdot 10^7 s + 2{,}49 \cdot 10^{11}}{s^3 + 19218{,}2s^2 + 1{,}2 \cdot 10^8 s + 2{,}49 \cdot 10^{11}} \tag{11}$$

```
R1 = 1.62*10^3
R2 = 79.57*10^3
R3 = 1.59*10^3
C1 = 100*10^-9
C2 = 98*10^-9
C3 = 2*10^-9

(*Numerador*)
a2 = 1/(C1*R1) + 1/(C1*R2)
a1 = 1/(C1*C3*R1*R2) + 1/(C1*C2*R1*R2)
a0 = 1/(C1*C2*C3*R1*R2*R3)

(*Denominador*)
b2 = 1/(C1*R1) + 1/(C1*R2) + 1/(C2*R2) + 1/(C2*R3) + 1/(C3*R2)
b1 = 1/(C1*C3*R1*R2) + 1/(C1*C2*R1*R2) + 1/(C1*C2*R1*R3) +
  1/(C1*C2*R2*R3) + 1/(C2*C3*R2*R3)
b0 = 1/(C1*C2*C3*R1*R2*R3)
```

Empleando el esquemático de `LTSpice` de la figura 5, se realiza una simulación `.ac`.

[1]Electronica, W. (2019, 16 octubre). Filtro rechaza banda pasivo RC Twin-T. *Wilaeba Electronica.* `https://wilaebaelectronica.blogspot.com/2018/06/filtro-rechaza-banda-pasivo-rc-twin-t.html`

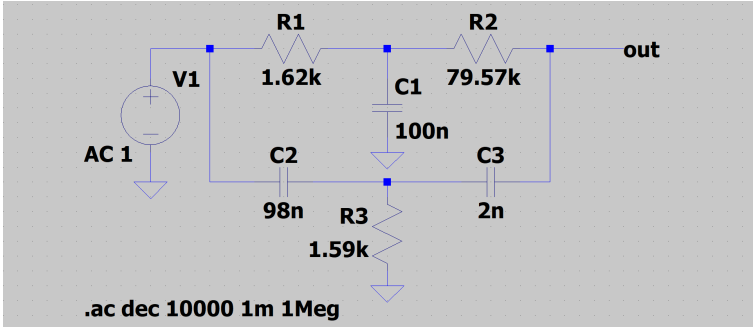


Figura 5: Esquemático de filtro pasivo de Notch *Twin-T* en `LTSpice`.

Con ello, se obtiene el diagrama de Bode de la figura 6. En este se aprecia claramente que el filtro rechaza la frecuencia de 1kHz.

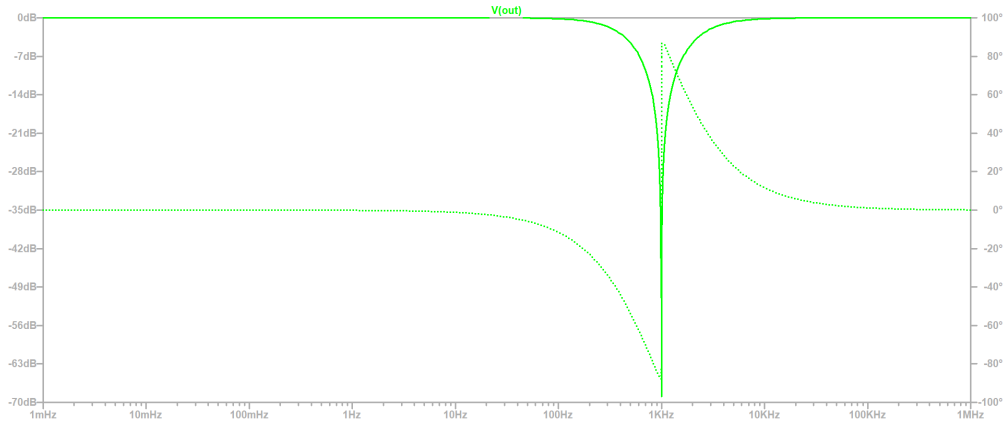


Figura 6: Diagrama de Bode del filtro pasivo de Notch *Twin-T*.

Asignación de puntaje:

- **4 ptos** Funciones de transferencia en la primera parte (2 ptos por cada función de transferencia).
- **1 pto** Explicación de por qué las funciones de transferencia son distintas.
- **1 pto** Explicar acerca del filtro pasivo de Notch *Twin-T* que tipo de filtro es y para que se utiliza.
- **2 ptos** Indicar la función de transferencia del filtro. Idealmente, los parámetros del circuito deben reemplazarse en la función de transferencia. Sin embargo, si no se realizó, no asignar descuento.
- **2 ptos** Simular el circuito en `LTSpice` para obtener el diagrama de Bode.

Problema 2 (10 pts)

Considere el circuito de la Fig. 7, la entrada corresponde a la corriente de entrada, mientras que salida corresponde al voltaje del capacitor.

a. Exprese la función de transferencia $H(s) = \frac{v_{out}}{i_{in}}$.

b. ¿Cuántos polos y ceros tiene la función de transferencia?

c. Mediante un software de cómputo obtenga las raíces del numerador y denominador, es decir, los ceros y polos respectivamente.

d. Dibuje a mano (asintóticamente) el diagrama de Bode. Recuerde dibujar tanto magnitud como fase e indicar las pendientes en decibeles por década en cada trazo.

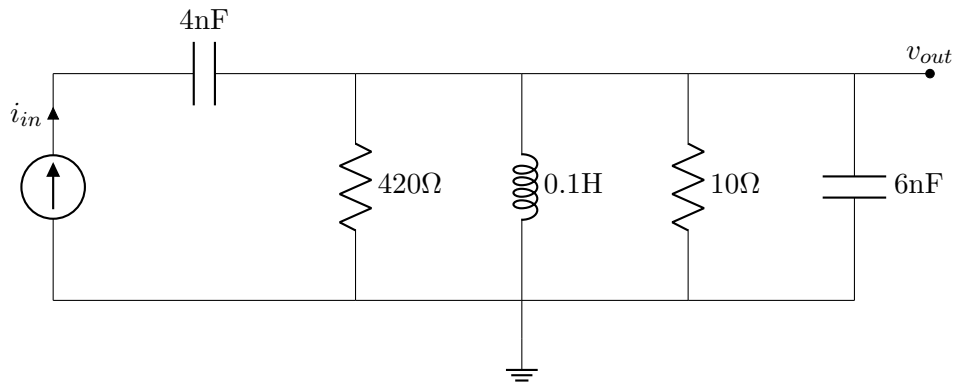


Figura 7: Circuito del problema 2.

Solución (10 pts):

a. La función de transferencia se puede obtener a través de un divisor de corriente entre la impedancia equivalente de las resistencias de 420Ω y 10Ω y el inductor 0,1H, y el capacitor de 6nF. De esta manera, se obtiene la corriente del capacitor que ponderada por su impedancia entrega el voltaje v_{out}. Esto se expresa en la ecuación 12.

$$v_{out} = i_{in} \cdot \frac{(420\Omega||10\Omega||s0{,}1\text{H})}{(420\Omega||10\Omega||s0{,}1\text{H}) + 1/(6 \cdot 10^{-9}s)} \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^{-9}s} \tag{12}$$

La impedancia equivalente de las resistencias e inductor, se expresa en la ecuación 13.

$$420\Omega||10\Omega||s0{,}1\text{H} = \frac{9{,}767s}{97{,}674 + s} \tag{13}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación 12, se obtiene la ecuación 14.

$$v_{out} = i_{in} \cdot \frac{\left(\frac{9{,}767s}{97{,}674 + s}\right)}{\left(\frac{9{,}767s}{97{,}674 + s}\right) \cdot (6 \cdot 10^{-9}s) + 1} \tag{14}$$

Finalmente, se concluye con la función de transferencia de la ecuación 15.

$$\frac{v_{out}}{i_{in}} = \frac{1{,}667 \cdot 10^8 s}{1{,}667 \cdot 10^9 + 1{,}706 \cdot 10^7 s + s^2} \tag{15}$$

b. Dado que el numerador es un polinomio de primer orden y el denominador es un polinomio de segundo orden, se desprende que la función de transferencia cuenta con un cero y dos polos.

c. La obtención de los ceros no requiere emplear un software, ya que al igualar el polinomio a cero, se concluye que el cero se encuentra en el origen. En cuanto a la obtención de los polos, se emplea `Wolfram Mathematica` mediante el siguiente comando:

```
Solve[1.667 * 10^9 + 1.706 * 10^7s + s^2 == 0,s]
```

Con ello, se obtienen dos polos distintos, reales y negativos ubicados en las frecuencias $\omega_1 = 97{,}675$ rad/s y $\omega_2 = 1{,}706 \cdot 10^7$ rad/s.

d. La ubicación del cero y los polos, analizados en el apartado anterior, permite clasificar el circuito como un filtro pasabanda. Esto se confirme mediante el análisis asintótico de la magnitud $|G(j\omega)|$, primero el cero en el origen define una pendiente inicial de +20 dB/dec, la cual es neutralizada por el primer polo en $\omega_1 = 97{,}675$ rad/s, creando así la banda pasante. Subsecuentemente, el segundo polo en $\omega_2 = 1{,}706 \cdot 10^7$ rad/s introduce la atenuación final de -20 dB/dec.

A partir de esta deducción, se determina la magnitud en la banda pasante. Esta ganancia es prácticamente constante entre ω_1 y ω_2, y puede calcularse evaluando la función en una frecuencia dentro de esta banda, por ejemplo, en la frecuencia central geométrica $\omega_0 \approx 40{,}8$ krad/s, o usando un valor cercano como $\omega_c = 40 \cdot 10^3$ rad/s.La ecuación 16 muestra el resultado de esta evaluación

$$\frac{v_{out}}{i_{in}}(j\omega_c) = \frac{1{,}667 \cdot 10^8 \cdot (j40 \cdot 10^3)}{1{,}667 \cdot 10^9 + 1{,}706 \cdot 10^7 \cdot (j40 \cdot 10^3) + (j40 \cdot 10^3)^2} \approx 9{,}721 \tag{16}$$

Al expresar este valor en decibelios se obtiene $20\log(9{,}721) = 19{,}754$ dB. Se concluye que el sistema tiene una ganancia de 19,754 dB en su banda pasante, la cual está delimitada por pendientes de +20 dB/dec (bajas frecuencias) y -20 dB/dec (altas frecuencias). De esta manera, se obtiene el gráfico de la figura 8 para la magnitud.

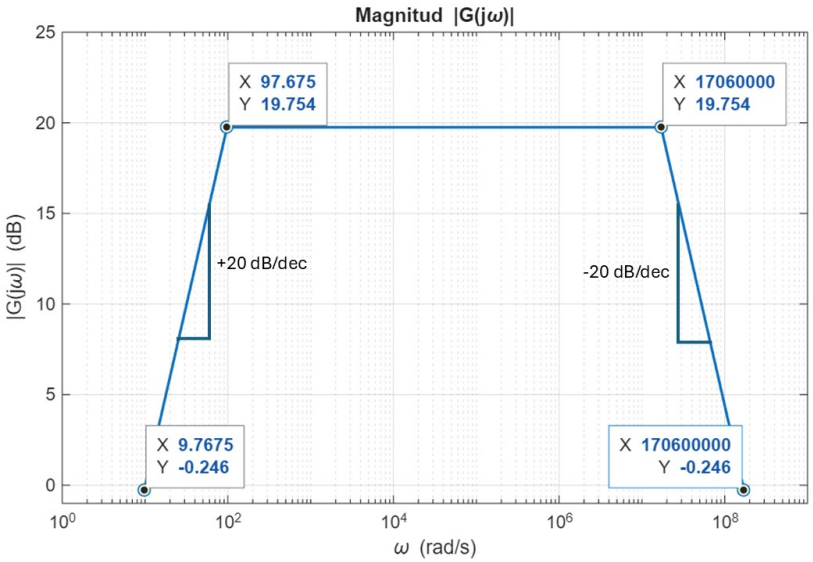


Figura 8: Diagrama de Bode de Magnitud del problema 2.

En cuanto a la fase del diagrama de Bode, se considera que el cero en el origen aporta una fase constante de $+90°$. A esta se le suma el efecto de los polos: cada uno genera un decaimiento lineal de fase de $-90°$ a lo largo de dos décadas (centradas en la frecuencia del polo), provocando un desfase de $-45°$ en dicha frecuencia. La superposición de estos efectos resulta en el gráfico de fase de la figura 9.

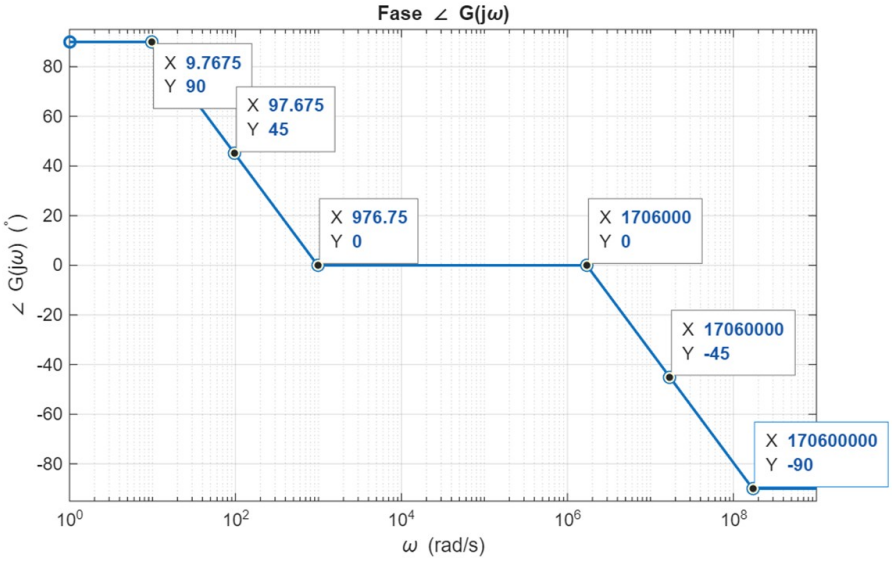


Figura 9: Diagrama de Bode de Fase del problema 2.

Asignación de puntaje:

- **3 pts** Función de transferencia.
- **0.5 ptos** Indicar cuántos polos y ceros tiene la función de transferencia.
- **0.5 pto** Obtener los valores para los polos y ceros.
- **3 ptos** Diagrama de Bode de Magnitud.
- **3 ptos** Diagrama de Bode de Fase.

Problema 3 (10 pts)

Considere el circuito de la Fig. 10, la entrada corresponde a la corriente de entrada, mientras que salida corresponde al voltaje del capacitor.

a. Exprese la función de transferencia $H(s) = \dfrac{v_{out}}{v_{in}}$.

b. ¿Cuántos polos y ceros tiene la función de transferencia?

c. Mediante un software de cómputo obtenga las raíces del numerador y denominador, es decir, los ceros y polos respectivamente.

d. Dibuje a mano (asintóticamente) el diagrama de Bode. Recuerde dibujar tanto magnitud como fase e indicar las pendientes en decibeles por década en cada trazo.

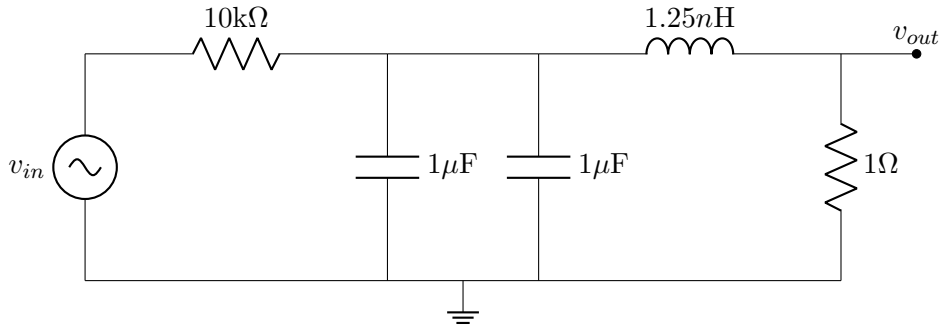


Figura 10: Circuito del problema 3.

Solución (10 pts):

a. Primero, se suman las capacitancias de los capacitores al encontrarse en paralelo. Con ello, se obtiene el circuito de la figura 11.

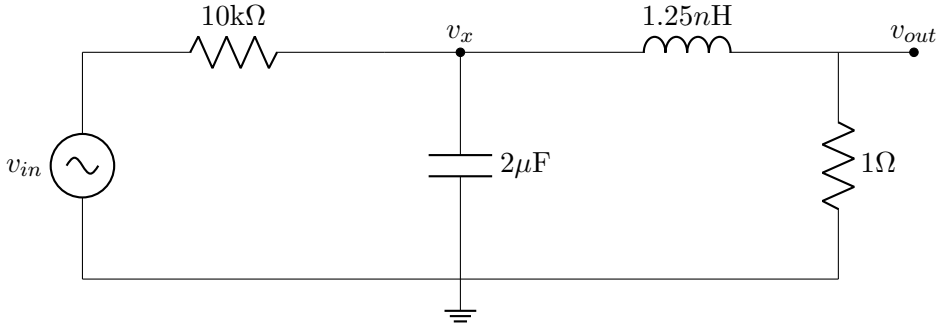


Figura 11: Simplificación del circuito del problema 3.

A continuación, la función de transferencia se puede determinar aplicando KCL para el nodo de voltaje v_x según la ecuación 17 y aplicando divisor de voltaje que permite obtener v_{out} a partir de v_x, según la ecuación 18.

$$\frac{v_{in} - v_x}{10 \cdot 10^3 \Omega} = \frac{v_x}{1/(2 \cdot 10^{-6} s\text{F})} + \frac{v_x - v_{out}}{1{,}25 \cdot 10^{-9} s\text{H}} \tag{17}$$

$$v_{out} = \frac{v_x \cdot 1\Omega}{1\Omega + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s\mathrm{H}} \tag{18}$$

Dada la ecuación 18, se puede despejar v_x en función de v_{out} según la ecuación 19.

$$v_x = v_{out} \cdot (1\Omega + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s\mathrm{H}) \tag{19}$$

Reemplazando en la ecuación 17, la expresión de la ecuación 19, se obtiene la ecuación 20.

$$\begin{aligned} \frac{v_{in} - (v_{out} \cdot (1\Omega + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s\mathrm{H}))}{10 \cdot 10^3 \Omega} &= v_{out} \cdot (1\Omega + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s\mathrm{H}) \cdot (2 \cdot 10^{-6} s\mathrm{F}) \\ &\quad + \frac{(v_{out} \cdot (\cancel{1\Omega} + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s\mathrm{H})) - \cancel{v_{out}}}{1{,}25 \cdot 10^{-9} s\mathrm{H}} \end{aligned} \tag{20}$$

Agrupando v_{out} y v_{in}, se obtiene la ecuación 21.

$$v_{in} = v_{out} \cdot (1 + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s) + v_{out} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot (1 + 1{,}25 \cdot 10^{-9} s) \cdot (2 \cdot 10^{-6} s) + v_{out} \cdot 10 \cdot 10^3 \tag{21}$$

Finalmente, se concluye con la función de transferencia de la ecuación 22.

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{1}{10001 + 2 \cdot 10^{-2} s + 2{,}5 \cdot 10^{-11} s^2} \tag{22}$$

b. Dado que el denominador es un polinomio de segundo orden, se desprende que la función de transferencia cuenta con dos polos y ningún cero.

c. Empleando `Wolfram Mathematica` mediante el siguiente comando:

```
Solve[10001 + 2*10^-2*s + 2.5*10^-11*s^2 == 0, s]
```

Con ello, se obtiene dos polos distintos, reales y negativos ubicados en las frecuencias $\omega_1 = 7{,}995 \cdot 10^8$ rad/s y $\omega_2 = 500363$ rad/s.

d. Dado que la ubicación de los polos es conocida, solo resta determinar la ganancia estática. En este caso, esta se puede calcular evaluando la función en $s = 0$. Esto es posible ya que no hay ceros en el origen, a diferencia del apartado anterior. Con ello, se obtiene:$K = \frac{1}{10001} \approx 9{,}999 \cdot 10^{-5}$. Este valor, expresado en decibeles, corresponde a $K_{\mathrm{dB}} = 20 \log(9{,}999 \cdot 10^{-5}) \approx -80$ dB. A partir de este valor, cada polo introduce una caída de -20 dB/dec en la magnitud (desde su frecuencia de corte) y un desfase total de -90°. Este desfase se aproxima linealmente sobre dos décadas (centradas en la frecuencia del polo), lo que provoca un desfase de -45° exactamente en dicha frecuencia. Con estas consideraciones, se construyen los gráficos de las figuras 12 y 13 correspondientes a la magnitud y la fase del sistema, respectivamente.

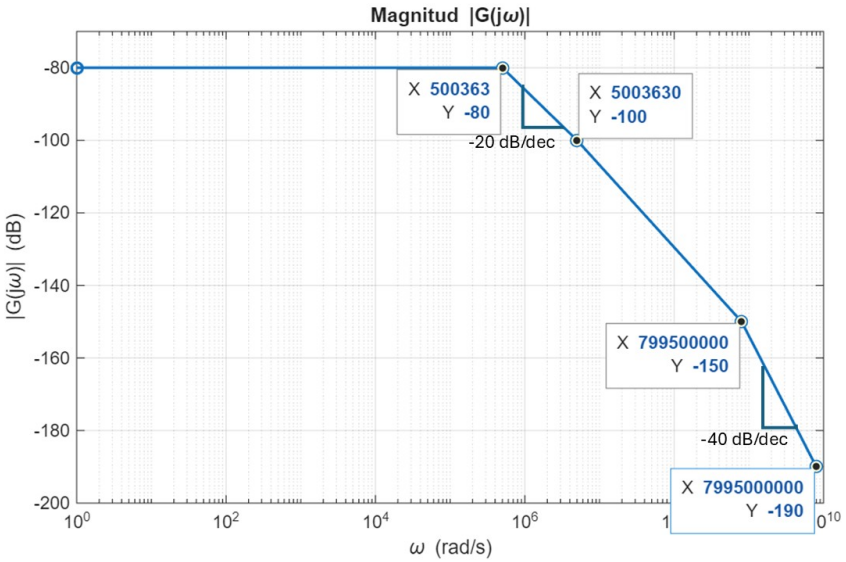


Figura 12: Diagrama de Bode de Magnitud del problema 3.

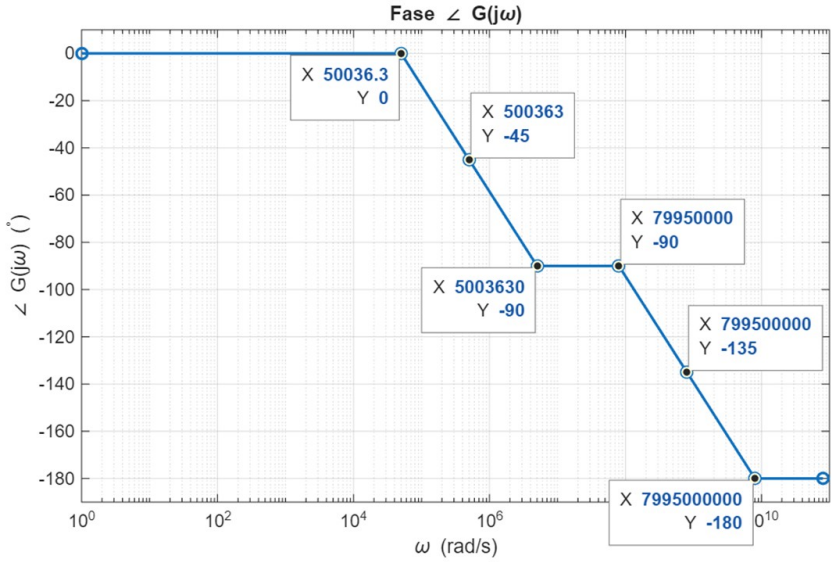


Figura 13: Diagrama de Bode de Fase del problema 3.

Asignación de puntaje:

- **3 pts** Función de transferencia.
- **0.5 ptos** Indicar cuántos polos y ceros tiene la función de transferencia.
- **0.5 pto** Obtener los valores para los polos y ceros.
- **3 ptos** Diagrama de Bode de Magnitud.
- **3 ptos** Diagrama de Bode de Fase.

Problema 4 (15 pts)

a. Elabore los diagramas de Bode de Magnitud y de Fase, especificando polos, ceros y constantes importantes, además de indicar las pendientes en decibeles por década, a partir de las siguientes funciones de transferencia.

$$a)\ G_1(s) = \frac{s+5}{s^2 - 10s + 8}$$

$$b)\ G_2(s) = \frac{s+2}{s(s^2 + s + 4)(s+1)}$$

b. Determine la función de transferencia a partir del diagrama de Bode de la Fig. 14, cuyos puntos principales se especifican en la Fig. 15.

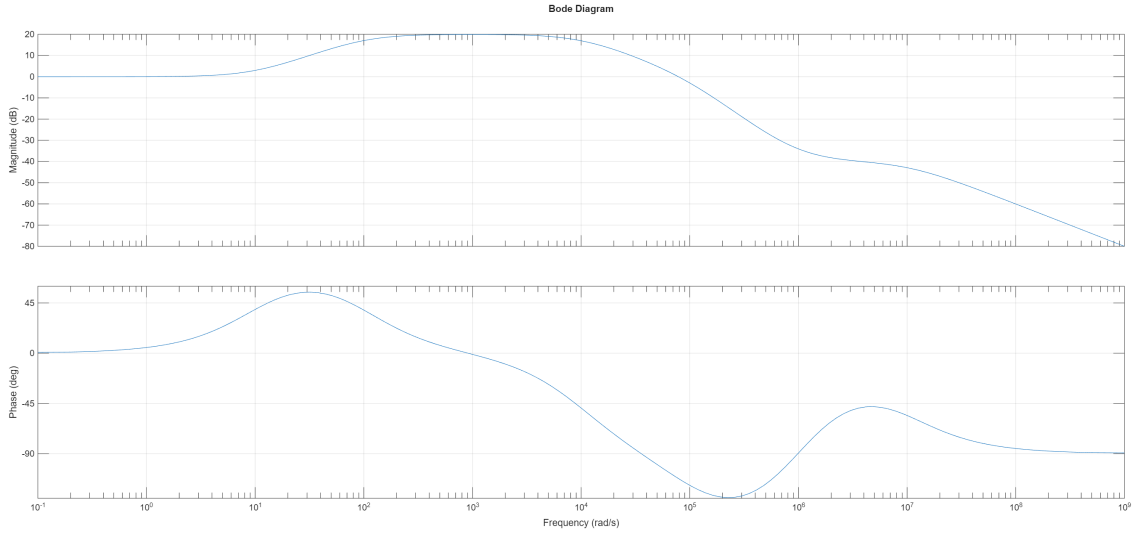


Figura 14: Diagrama de Bode del problema 4 (sin puntos principales).

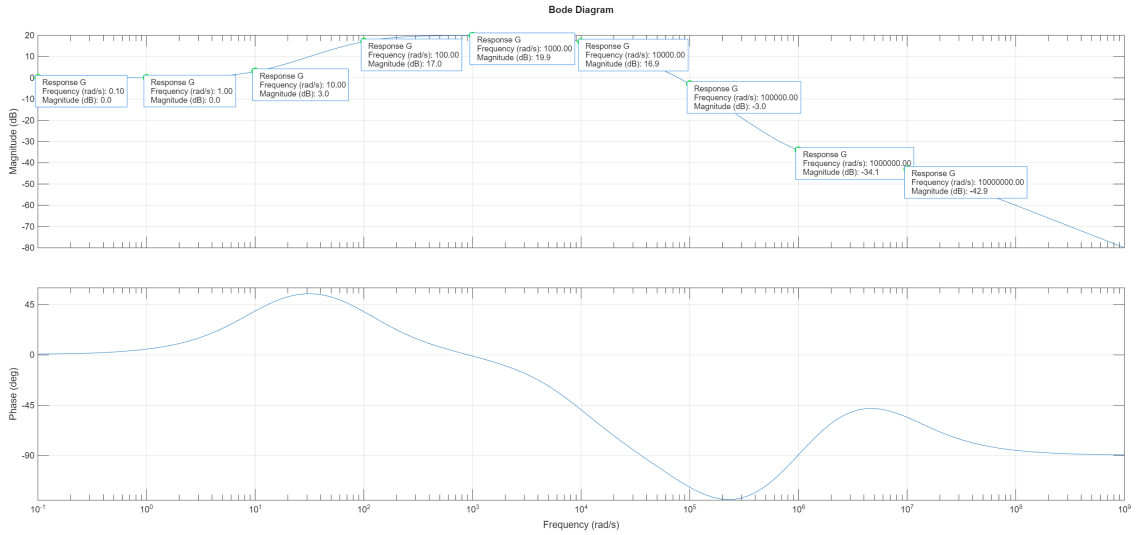


Figura 15: Diagrama de Bode del problema 4 (con puntos principales).

Los puntos destacados en el diagrama de Bode de la Fig. 15 también se presentan en la Cuadro. 1.

Frecuencia (rad/s)	Magnitud (dB)
0.1	0
1	0
10	3
100	17
1000	19.9
10000	16.9
100000	-3
1000000	-34.1
10000000	-42.9

Cuadro 1: Puntos relevantes en el diagrama de Bode.

Solución (15 pts):

a. a) Primero, se determinan los polos y ceros de la función de transferencia. El único cero se ubica en la frecuencia $\omega_{z_1} = 5$ rad/s. En cuanto a los polos, se obtienen al igualar el denominador a cero, lo cual implica que los polos se ubican en: $\omega_{p_1} = 5 - \sqrt{17} = 0{,}877$ rad/s y $\omega_{p_2} = 5 + \sqrt{17} = 9{,}123$ rad/s. Con ello, la función de transferencia puede escribirse según la ecuación 23.

$$G_1(s) = 0{,}625 \cdot \frac{1 - s/5}{(1 - s/0{,}877)(1 - s/9{,}123)} \tag{23}$$

La ganancia estática expresada en decibeles corresponde a $K_{\text{dB}} = 20\log(0{,}625) = -4{,}0824$ dB. Cada polo generará un decaimiento de -20 dB/dec, mientras que el cero generará un aumento en la pendiente de 20 dB/dec, obteniendo el diagrama de Bode para la magnitud de la figura 16.

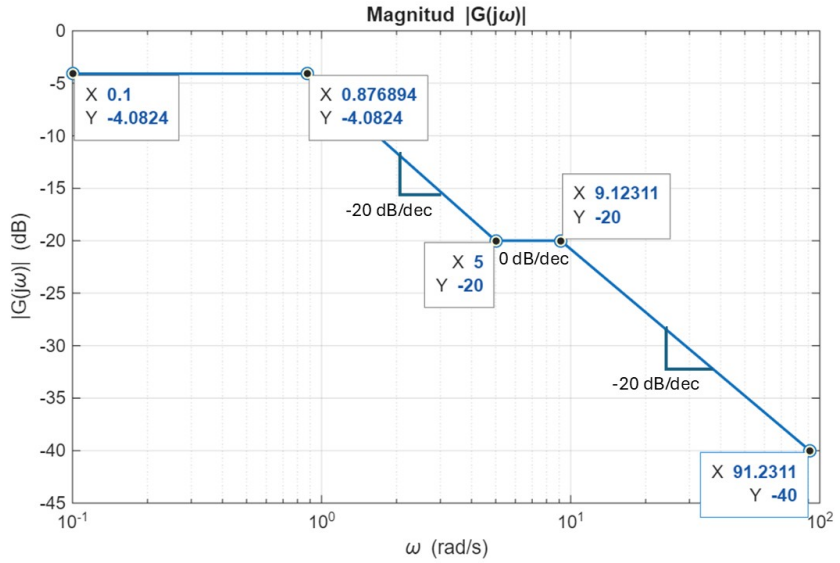


Figura 16: Diagrama de Bode de Magnitud del problema 4a.1.

En cuanto a la fase, por un lado, cada cero genera un aumento lineal de fase de 90° a lo largo de dos décadas (centradas en la frecuencia del polo), provocando un desfase de 45° en dicha frecuencia. Por otro lado, cada polo genera un decaimiento lineal de fase de - 90° a lo largo de dos décadas (centradas en la frecuencia del polo), provocando un desfase de -45° en dicha frecuencia. La figura 17 presenta el aporte de cada polo y cero y la figura 18 contempla la superposición de todos estos efectos.

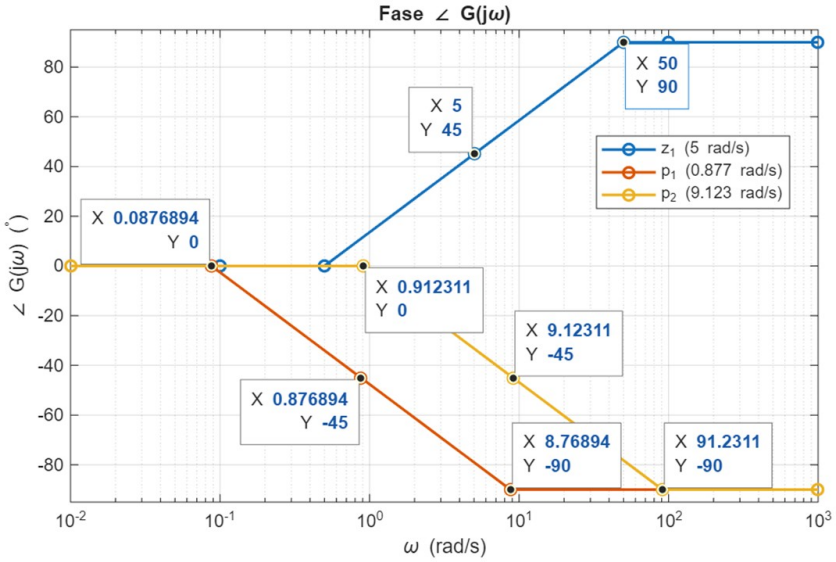


Figura 17: Aporte de cada polo y cero en el diagrama de Bode de Fase del problema 4a.1.

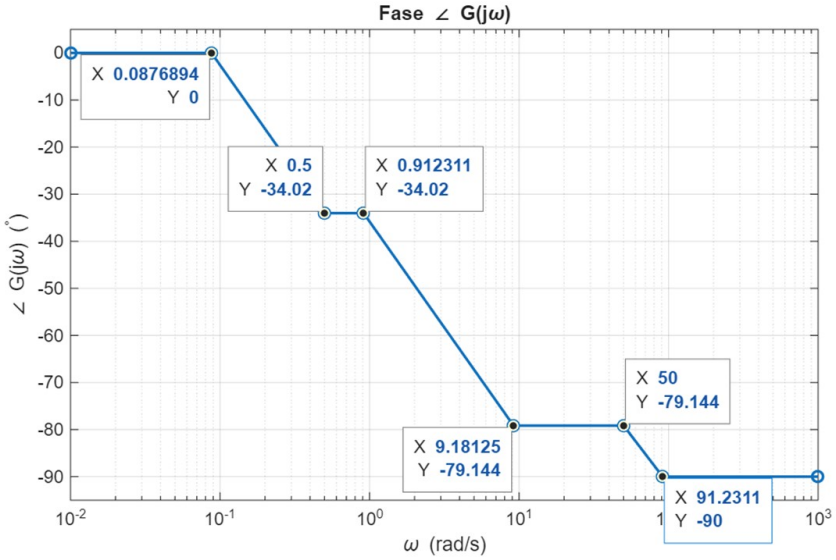


Figura 18: Diagrama de Bode de Fase del problema 4a.1.

b) Primero, se determinan los polos y ceros de la función de transferencia. El único cero se ubica en la frecuencia $\omega_{z_1} = 2$ rad/s. En cuanto a los polos, uno se ubica en el origen, otro en $\omega_{p_1} = 1$ rad/s y un par de polos conjugados complejos asociados al polinomio $s^2 + s + 4$.

Para analizar el par de polos conjugados, se normaliza el término para llevarlo a la forma estándar $\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + 1$, factorizando por el último término del polinomio según la ecuación 24.

$$s^2 + s + 4 = 4\left(\frac{s^2}{4} + \frac{s}{4} + 1\right) = 4\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)s + 1\right] \tag{24}$$

De esta manera, se desprende una frecuencia natural $\omega_0 = 2$ rad/s y un factor de amortiguamiento ζ obtenido mediante la ecuación 25.

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{1}{4} \implies \frac{2\zeta}{2} = \frac{1}{4} \implies \zeta = 0{,}25 \tag{25}$$

El factor de calidad es $Q = \dfrac{1}{2\zeta} = \dfrac{1}{2(0{,}25)} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$. Con todos los términos identificados, se reescribe la función de transferencia $G_2(s)$ en su forma estándar de Bode, obteniendo la expresión de la ecuación 26.

$$G_2(s) = \frac{s+2}{s(s^2+s+4)(s+1)} = \frac{2(1-s/2)}{s \cdot 4\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s}{4} + 1\right] \cdot (1-s/1)}$$

$$G_2(s) = \frac{0{,}5 \cdot (1-s/2)}{s \cdot (1-s/1) \cdot \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s}{4} + 1\right]} \tag{26}$$

Gracias a la expresión de la ecuación 26, se desprende que a baja frecuencia existe una asíntota constante que expresada en decibeles corresponde a $K_{\text{dB}} = 20\log(0{,}5) = -6{,}0206$ dB. Los polos reales (incluido el del origen) generan un decaimiento de -20 dB/dec cada uno, mientras que los polos conjugados generan un decaimiento de -40 dB/dec. Por su parte, el cero genera un aumento en la pendiente de +20 dB/dec. Cabe destacar que el cero y los polos conjugados coinciden en la frecuencia natural $\omega_0 = 2$ rad/s. Por ende, el cambio neto en la pendiente en esta frecuencia es de -20 dB/dec. Por último, el factor de calidad $Q = 2$ ($\zeta = 0{,}25$) genera un pico de resonancia. La ganancia en $\omega_0 = 2$ rad/s es $20\log(Q) \approx 6{,}0206$ dB por encima de la asíntota de la magnitud en ese punto. Dadas todas estas consideraciones, se obtiene el diagrama de Bode para la magnitud de la figura 19.

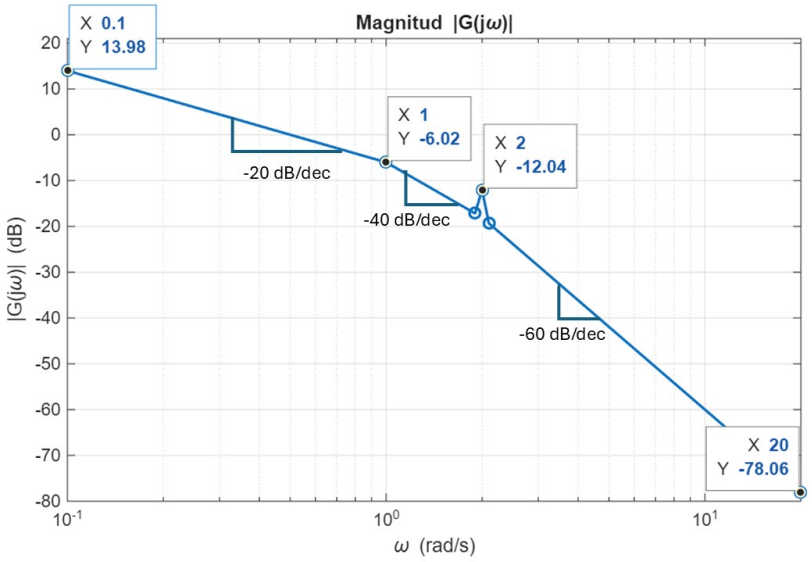


Figura 19: Diagrama de Bode de Magnitud del problema 4a.2.

En cuanto a la fase, el polo en el origen introduce un desfase constante de -90° y los polos reales generan un decaimiento lineal de fase de -90° a lo largo de dos décadas (centradas en la frecuencia del polo), provocando un desfase de -45° en dicha frecuencia. El cero genera un aumento lineal de fase de 90° a lo largo de dos décadas (centradas en la frecuencia del cero), provocando un desfase de 45° en dicha frecuencia. Finalmente, los polos conjugados generan un introducen un desfase abrupto de -180° , observando una fase exacta de -90° en la frecuencia de interés. Dadas todas estas consideraciones, se obtiene el diagrama de Bode para la fase de la figura 20.

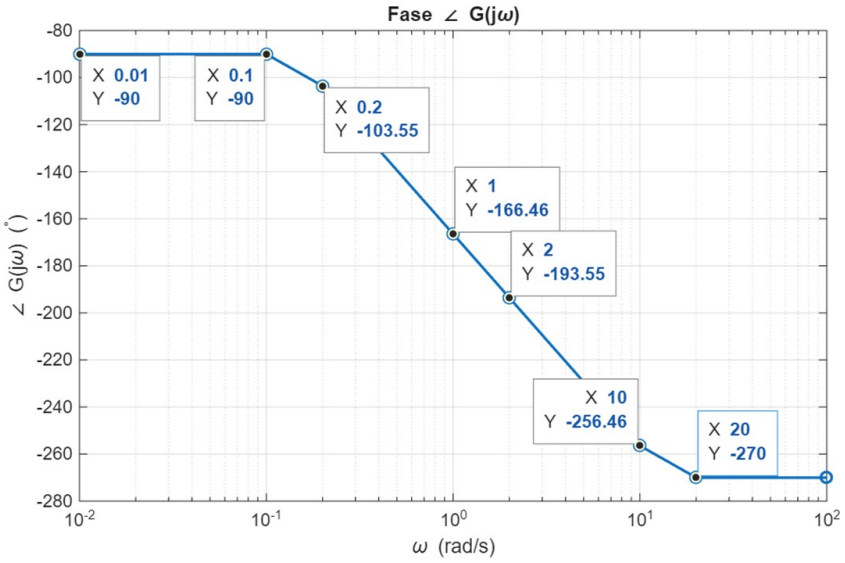


Figura 20: Diagrama de Bode de Fase del problema 4a.2.

b. Observando el diagrama de Bode y sus puntos clave, se aprecia que:

- En $\omega = 10$ rad/s, se observa un punto de +3 dB, lo que indica un cero que introduce una pendiente de +20 dB/dec.
- En $\omega = 10^2$ rad/s, un descenso de 3 dB marca la presencia de un polo. Este aporta -20 dB/dec, neutralizando la pendiente anterior y creando una asíntota plana (0 dB/dec) entre 10^2 y 10^4 rad/s.
- En $\omega = 10^4$ rad/s, otro descenso de 3 dB indica un segundo polo, que cambia la pendiente neta a -20 dB/dec.
- La pendiente de -20 dB/dec proyecta una ganancia de 0 dB en $\omega = 10^5$ rad/s (asumiendo 20 dB en 10^4). Sin embargo, el diagrama muestra -3 dB en este punto, lo que delata un tercer polo en $\omega = 10^5$ rad/s. La pendiente ahora es de -40 dB/dec.
- Siguiendo la pendiente de -40 dB/dec, se esperaría una ganancia de -40 dB en $\omega = 10^6$ rad/s. El diagrama, en cambio, muestra -34 dB. Esta desviación de +6 dB revela un doble cero en esta frecuencia, que aporta +40 dB/dec y vuelve a aplanar la pendiente a 0 dB/dec.
- Finalmente, en $\omega = 10^7$ rad/s, una caída de 3 dB indica un cuarto polo, estableciendo la pendiente final de -20 dB/dec.

Gracias a estas observaciones, se construye la función de transferencia de la ecuación 27, donde K es la ganancia estática.

$$H_t(s) = K\frac{(s+10)\cdot(s+10^6)^2}{(s+10^2)\cdot(s+10^4)\cdot(s+10^5)\cdot(s+10^7)} \tag{27}$$

Para determinar la ganancia K, se utiliza el dato de la banda pasante: la magnitud es de 20 dB en $\omega_c = 10^3$ rad/s.

El método consiste en calcular la ganancia de la función $H_t(s)$ sin K (es decir, con $K = 1$) en esa frecuencia, y luego encontrar el valor de K (en dB) que ajusta ese resultado a los 20 dB deseados.

La ganancia de la función base (con $K = 1$) en $\omega_c = 10^3$ rad/s es:

$$20\log|H_{t,K=1}(j10^3)| \approx 20\log(10^{-4}) = -80 \text{ dB} \tag{28}$$

Sabiendo que la ganancia total debe ser 20 dB, se puede despejar K mediante la ecuación 29, aprovechando las propiedades del logaritmo.

$$20 \text{ dB} = 20\log(K) + 20\log|H_{t,K=1}(j10^3)| \tag{29}$$

Reemplazando con el resultado de la ecuación 28, se desprende la ecuación 30, obteniendo una ganancia $K = 10^5$.

$$20 \text{ dB} = 20\log(K) - 80 \text{ dB} \tag{30}$$

$$100 \text{ dB} = 20\log(K)$$
$$K = 10^{(100/20)} = 10^5$$

Finalmente, se concluye la función de transferencia de la ecuación 31.

$$H(s) = 10^5 \frac{(s+10)\cdot(s+10^6)^2}{(s+10^2)\cdot(s+10^4)\cdot(s+10^5)\cdot(s+10^7)} \tag{31}$$

Asignación de puntaje:

- **2.5 pts** Diagrama de Bode de la primera función de transferencia.
- **4.5 ptos** Diagrama de Bode de la segunda función de transferencia.
- **6 pts** Obtener las frecuencias en rad/s de todos los polos y ceros.
- **1 pto** Determinar la ganancia estática de la función de transferencia.
- **1 pto** Concluir correctamente en la función de transferencia.

Problema 5 (15 pts)

Naturalmente, los diagramas de Bode se obtienen a partir de una función de transferencia; sin embargo, muchas veces esta función es desconocida y se debe trabajar con "cajas negras". A pesar de este inconveniente, los diagramas de Bode se pueden determinar experimentalmente, variando la frecuencia de una señal de entrada y monitoreando la magnitud y desfase de la señal de salida. Por ejemplo, este video emplea un sistema masa-resorte para caracterizar su respuesta en magnitud y fase.

Este problema se enfoca en desarrollar un trabajo similar sobre el circuito de la Fig. 21. El objetivo principal es construir los diagramas de Bode de magnitud y fase de forma experimental, punto por punto. Para ello, se deben realizar simulaciones transitorias (`.tran`) empleando una señal sinusoidal de amplitud 1V en el nodo `IN` para las siguientes frecuencias: 7.25 kHz, 7.75 kHz, 8 kHz, 10 kHz, 12 kHz, 12.65 kHz y 13.25 kHz.

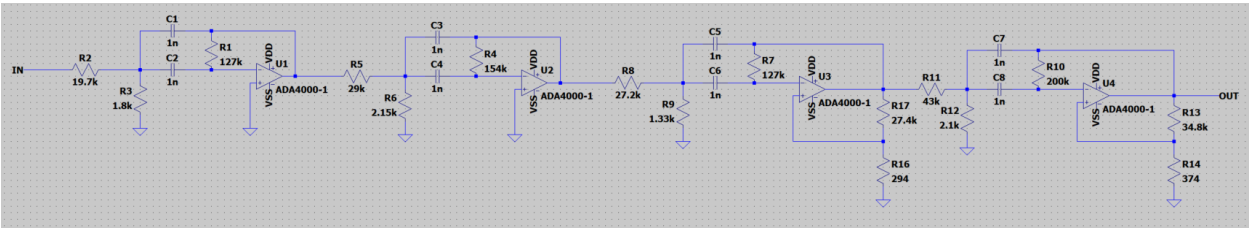


Figura 21: Circuito del problema 5.

Una vez realizadas las simulaciones solicitadas, se deben medir la magnitud y la fase comparando las señales de entrada y salida mediante los cursores del software `LTSpice`. La Fig. 22 presenta un ejemplo para una señal sinusoidal de 1V y 9 kHz. La ventana emergente al usar los cursores presenta:

- Un valor vertical útil para medir la amplitud de salida y analizar la magnitud (ganancia).
- Un valor horizontal útil para calcular el desfase entre la entrada y la salida (fase).

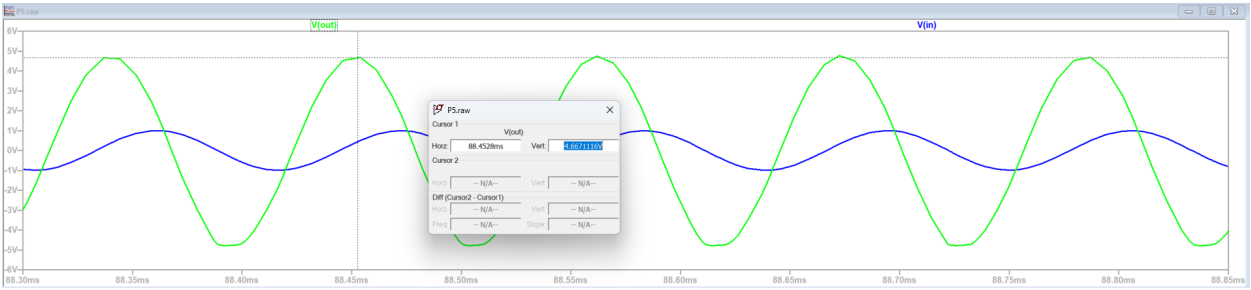


Figura 22: Cursores de `LTSpice`.

Finalmente, con los valores obtenidos para cada frecuencia simulada, el resultado final a entregar es la construcción y gráfica de los diagramas de Bode del circuito solicitado, la magnitud debe ser expresada en decibeles y la fase en grados. Estos gráficos representarán la caracterización experimental de la respuesta en frecuencia del sistema.

Solución (15 pts):

Las figuras 23, 24, 25, 26, 27, 28 y 29 presentan los voltajes de entrada y salida del circuito para las frecuencias 7.25 kHz, 7.75 kHz, 8 kHz, 10 kHz, 12 kHz, 12.65 kHz y 13.25 kHz respectivamente. En cada una se ubican los cursores en los puntos máximos de ambas señales, obteniendo la separación temporal (Δt). Con ello, se determina la fase en grados mediante la ecuación 32, donde f_{in} es la frecuencia del voltaje de entrada. Además, el cursor en el punto máximo de la señal V_{out} permite determinar la magnitud en decibeles según la ecuación 33, asumiendo amplitud unitaria para V_{in}.

$$\angle H(f_{in}) = f_{in} \cdot \Delta t \cdot 360 \tag{32}$$

$$|H(f_{in})|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\text{máx}(V_{out})\right) \tag{33}$$

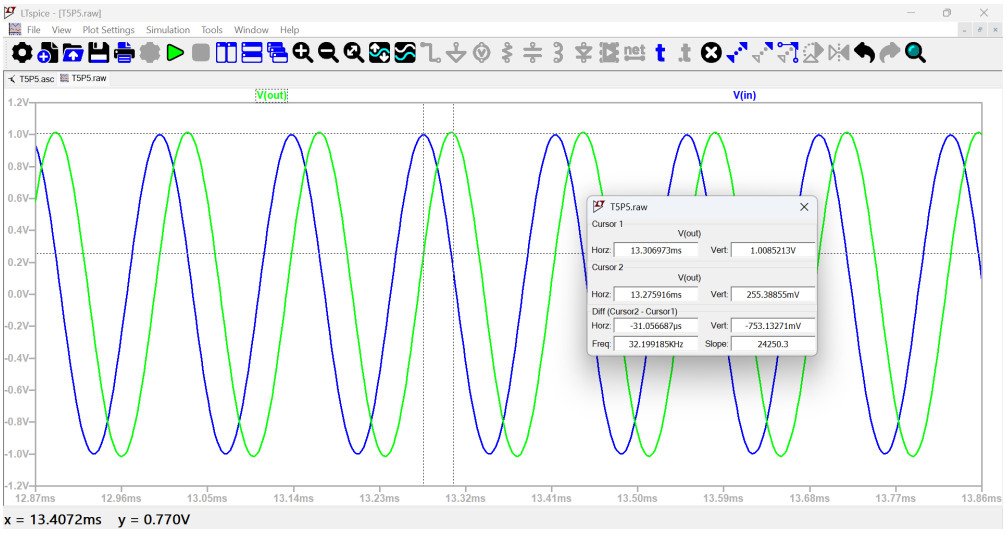


Figura 23: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 7{,}25$ kHz.



Figura 24: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 7{,}75$ kHz.

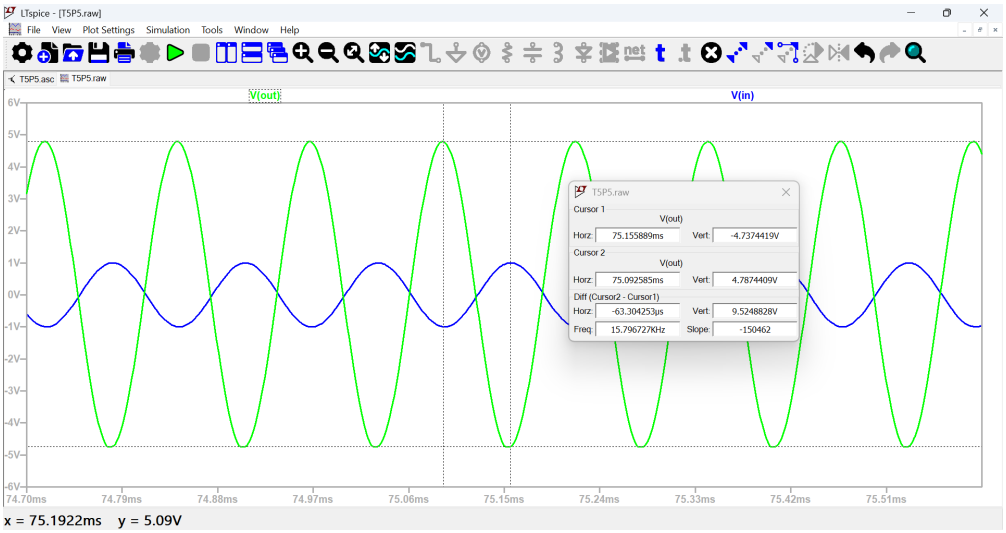


Figura 25: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 8$ kHz.

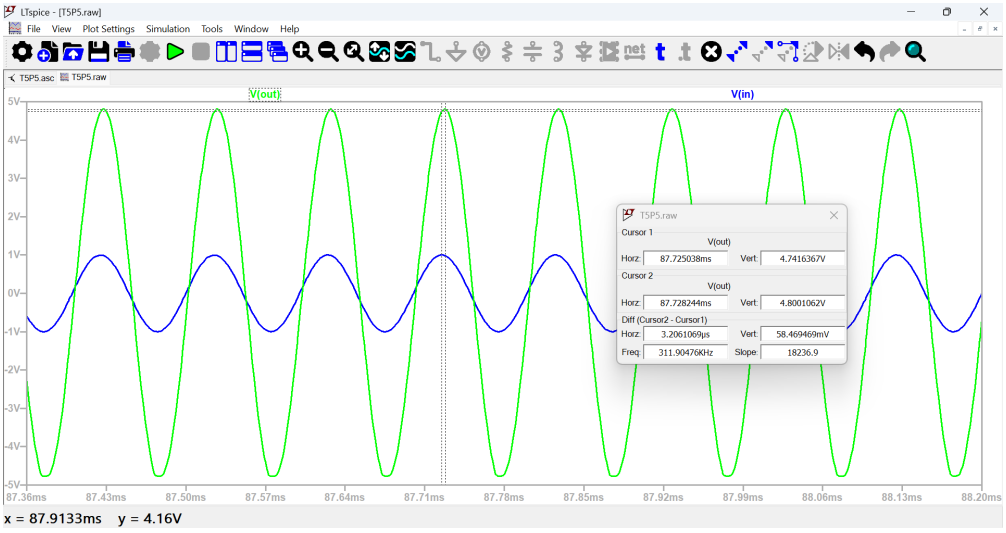


Figura 26: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 10$ kHz.

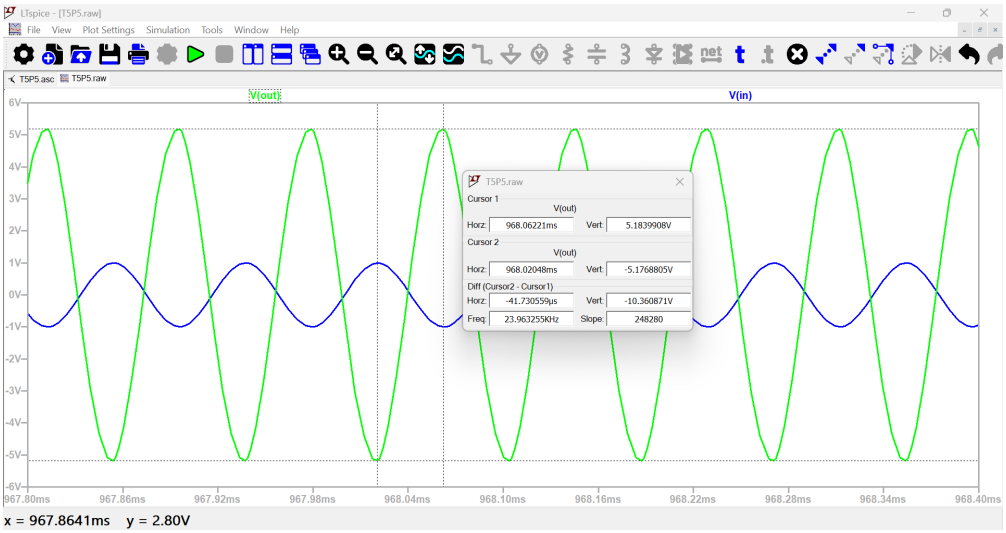


Figura 27: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 12$ kHz.

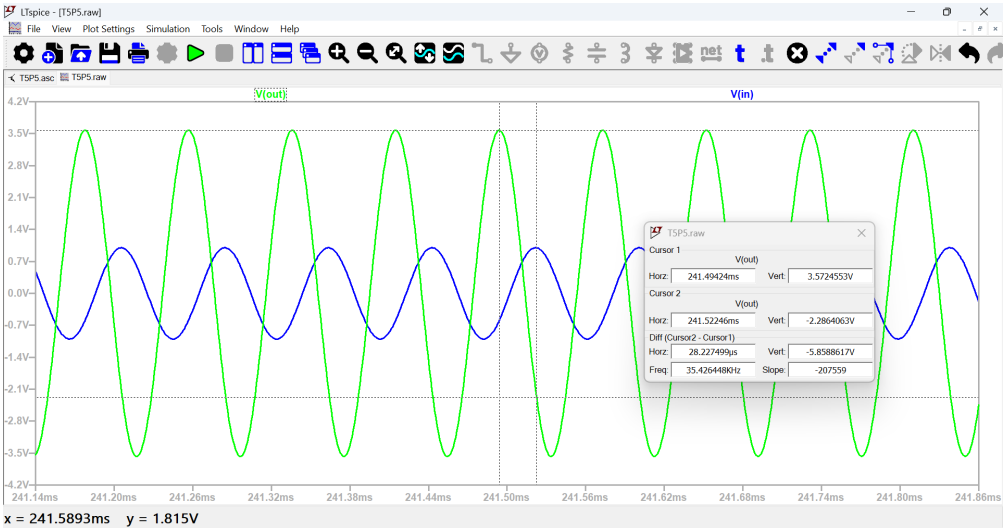


Figura 28: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 12{,}65$ kHz.

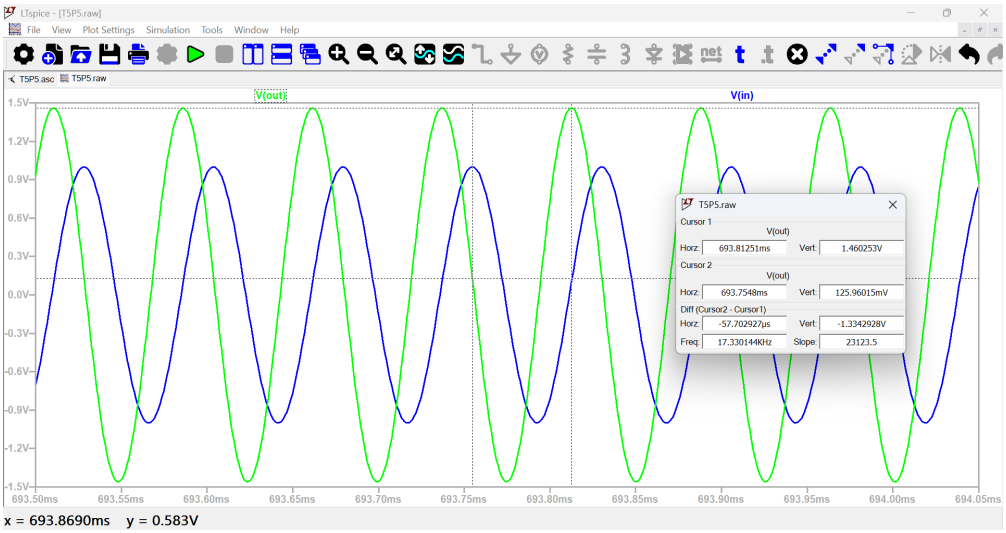


Figura 29: Simulación temporal para una frecuencia $f_{in} = 13{,}25$ kHz.

La tabla 2 registra las separaciones temporales (Δt) y su respectivo valor en grados, y el valor máximo de V_{out} y su respectivo valor en decibeles.

f_{in} (kHz)	máx(V_{out}) (V)	$\lvert H(f_{in})\rvert$ (dB)	Δt (μs)	$\angle H(f_{in})$ (°)
7.25	1.0085	73.518 m	-31.0566	-81.0577
7.75	3.5567	11.021	-45.2229	-126.1719
8	4.7874	13.602	-63.3043	-182.3163
10	4.8001	13.625	3.2061	11.542
12	5.184	14.2932	-41.7306	-180.2761
12.65	3.5725	11.0594	28.2275	128.548
13.25	1.4603	3.2884	-57.7029	-275.2428

Cuadro 2: Resumen de resultados obtenidos.

Con el objetivo de que el gráfico del diagrama de Bode decrezca en la fase conforme aumenta la frecuencia, se procede a restar múltiplos de 360°. Con ello, se obtiene la tabla 3.

f_{in} (kHz)	máx(V_{out}) (V)	$\lvert H(f_{in})\rvert$ (dB)	Δt (μs)	$\angle H(f_{in})$ (°)
7.25	1.0085	73.518 m	-31.0566	-81.0577
7.75	3.5567	11.021	-45.2229	-126.1719
8	4.7874	13.602	-63.3043	-182.3163
10	4.8001	13.625	3.2061	-348.458
12	5.184	14.2932	-41.7306	-540.2761
12.65	3.5725	11.0594	28.2275	-591.452
13.25	1.4603	3.2884	-57.7029	-635.2428

Cuadro 3: Resumen de resultados obtenidos decreciendo en fase.

Finalmente, se consideran los gráficos de la tabla 3 para obtener el diagrama de Bode de magnitud en la figura 30 y de fase en la figura 31. Estos evidencian que el circuito corresponde a filtro pasabanda.

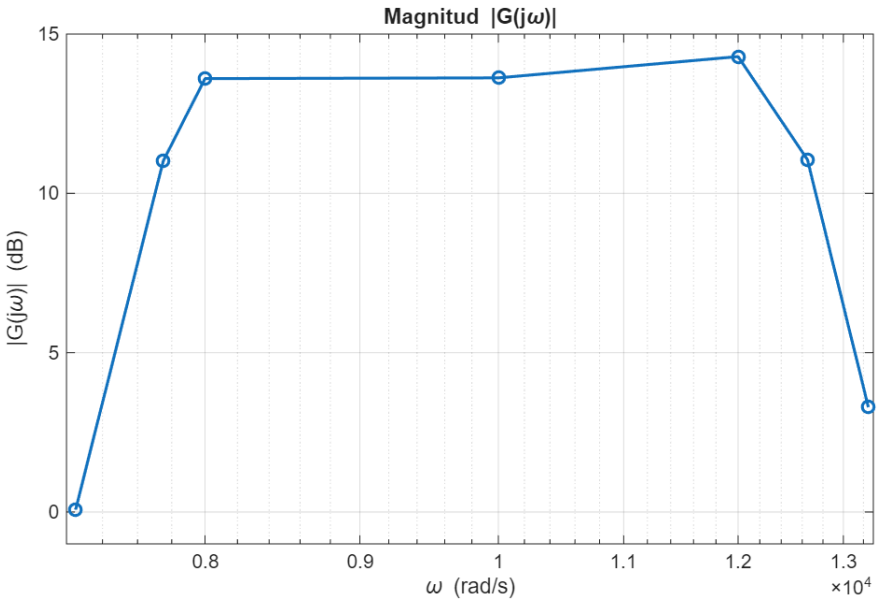


Figura 30: Diagrama de Bode de Magnitud del problema 5.

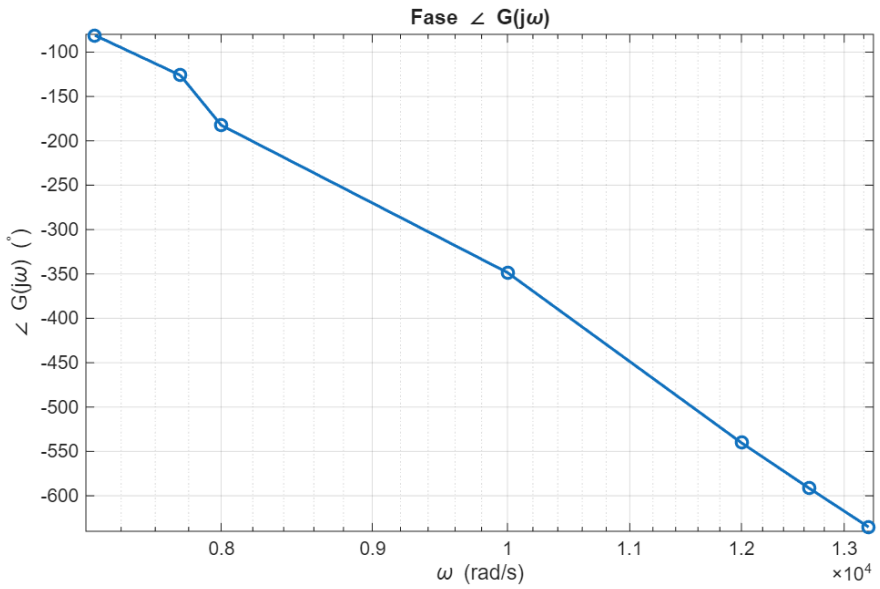


Figura 31: Diagrama de Bode de Fase del problema 5.

Estos gráficos se asemejan al diagrama de Bode obtenido mediante una simulación `.ac` registrado en la figura 32.

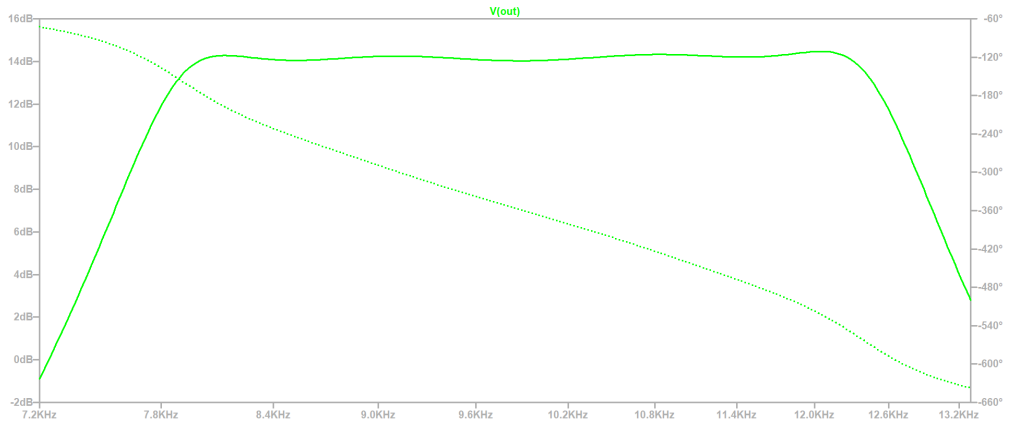


Figura 32: Diagrama de Bode del circuito del problema 5.

Asignación de puntaje: Este problema busca evaluar que los estudiantes comprendan el procedimiento para construir un diagrama de Bode experimental, sin priorizar que el diagrama obtenido sea exacto al de `LTSpice`.

- **10.5 ptos** Simular en el tiempo los voltajes de salida V_{out}, evaluando en las frecuencias solicitadas (1.5 ptos por cada gráfico).
- **4 ptos** Expresar la magnitud y fase en decibeles y grados, empleando correctamente las fórmulas.
- **0.5 ptos** Concluye correctamente en el diagrama de Bode en magnitud y fase.