IEE 2123 Circuitos Eléctricos
Prof. David Watts, PUC
Clase 16 y 17: Potencia en RSP

Contenidos:

1. Potencia instantánea y promedio
2. Valores efectivos
3. Máxima transferencia de potencia promedio
4. Potencia aparente y compleja
5. Factor de potencia
6. Superposición de potencia

Capítulo 11 Dorf 6ª Edición

1. Potencia instantánea y promedio

- **Potencia instantánea:**

$$\boxed{p(t) = v(t) \cdot i(t)}$$

En régimen permanente sinusoidal (RSP):

$$v(t) = V_{peak} \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_{peak} \cos(\omega t + \theta_i)$$

Luego:

$$p(t) = V_{peak} \cos(\omega t) \cdot I_{peak} \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = \frac{V_{peak} I_{peak}}{2} \left(\cos(\theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_i) \right)$$

- Cos(θ) es siempre positivo, por lo que absorbe energía.
- Cos(2ωt+ θ_i) depende de t y cambia con frecuencia 2ω, pudiendo ser negativo o positivo, por lo que absorbe y entrega energía.

1. Potencia instantánea y promedio

- **Potencia promedio (para funciones periódicas):**

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt$$

Corresponde al promedio de la potencia instantánea en un período.
Para en caso de RSP:

$$P = \frac{V_{peak}\, I_{peak}}{2T}\int_{0}^{T}\left[\cos(\theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_i)\right]dt$$

$\cos(2\omega t + \theta_i) \rightarrow 0$

$\cos(\theta_i)$: Cte. Independiente de t

Entonces (definiendo $\theta_{v\text{-}i} = \theta_v - \theta_i$) :

$$P = \frac{1}{2} V_{peak}\, I_{peak}\, \cos(\theta_{v-i}) \rightarrow \boxed{P = V_{eff}\, I_{eff}\, \cos(\theta_{v-i})}$$

$$V_{eff} = V_{peak}/\sqrt{2};\quad I_{eff} = I_{peak}/\sqrt{2}$$

1. Potencia instantánea y promedio

- **En general:**

$$P = \frac{1}{2} V_{peak} I_{peak} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

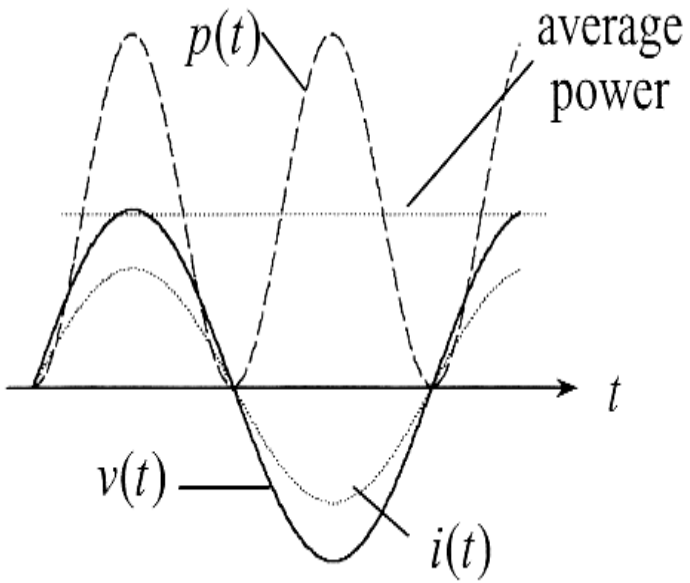
  - Si el circuito es puramente resistivo (R), $cos\ (\theta_v - \theta_i) = 1$
  - Si el circuito es puramente reactivo (L y C), $cos\ (\theta_v - \theta_i) = 0$

	$\theta_v - \theta_i$	I	P
R	0°	En fase	$V_{eff} \cdot I_{eff}$
L	90°	En atraso	0
C	-90°	Adelanto	0

- **Régimen sinusoidal permanente:** la potencia promedio absorbida por una impedancia es igual a la potencia promedio absorbida en las resistencias.

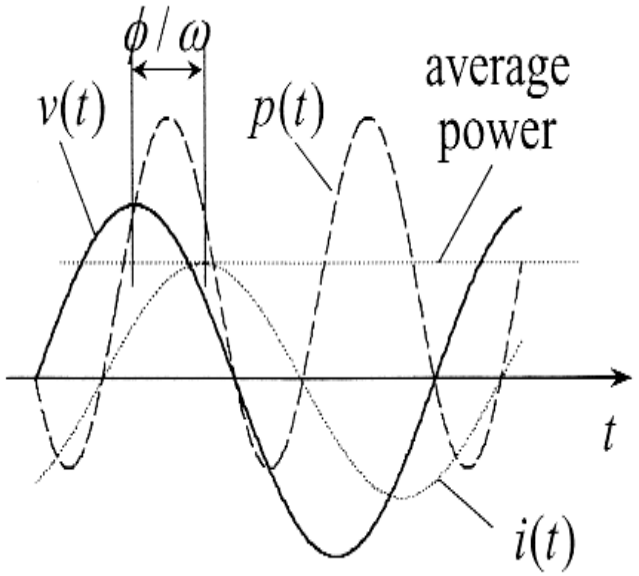
1. Potencia instantánea y promedio

Caso resistivo puro:



- V e I en fase ($\theta_v = \theta_i$)
- La potencia circula en una dirección pero pulsante.
- Máxima potencia promedio para un Voltaje y corriente dados.

Caso no resistivo puro:



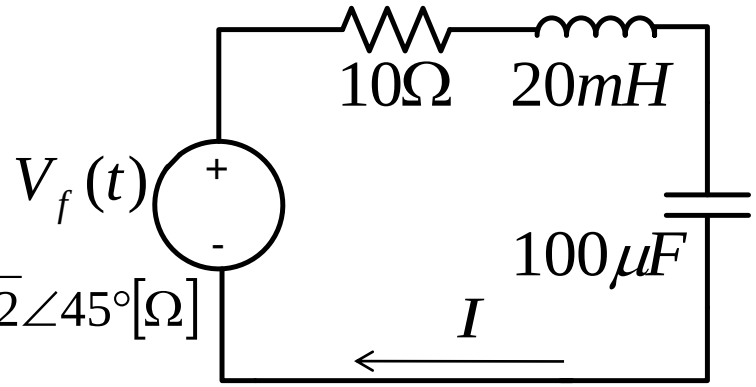
- V e I en desfase ($\theta_v \neq \theta_i$) debido a la acción de **Ls** y Cs.
- El flujo de potencia cambia periódicamente de dirección.
- Potencia promedio menor a la máxima potencia posible.

Fasores RMS

- Desde ahora fasores son RMS o efectivos
- Potencia es mas fácil así!

1. Potencia instantánea y promedio:
Ejemplo.

El circuito opera en régimen sinusoidal permanente. Calcular la P promedio consumida por la impedancia equivalente con $V_f(t) = 100\cos(1000t)\ [V]$.



Solución:

$$Z_{eq} = 10 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 10 + j(20-10) = 10\sqrt{2}\angle 45°\,[\Omega]$$

$$V_f = 100/\sqrt{2}\,\angle 0°\,[V]\ \text{efectivo!}$$

$$I = \frac{V_f}{Z_{eq}} = 5\angle -45°\,[A]\ \text{efectivo!}$$

$$P = V_{eff}\, I_{eff}\, \cos(\theta_{v-i}) = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot 5\cos(45°) = 250[W]$$

$$P_R = V_R\, I_R = R I_R{}^2 = 10 \cdot 5^2 = 250[W]$$

La potencia promedio se disipa en R, no en L o C.

2. Valores efectivos(RMS)

- **Valor efectivo(RMS):**
  - En el caso de un voltaje o corriente , consiste en una **medida de su efectividad para entregar potencia** a una resistencia de carga.

  - Se deriva de la conveniencia de contar con un voltaje (o corriente) sinusoidal que entregue a una resistencia de carga la misma potencia promedio que un voltaje (o corriente) equivalente de CC, luego:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt = {I_{eff}}^2 R \longrightarrow$$

Potencia entregada por una corriente directa I_{eff}.

$$\rightarrow I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt} = I_{RMS}$$

2. Valores efectivos(RMS)

Para el voltaje:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 / R\, dt = V_{eff}{}^2 / R$$

$$\rightarrow V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt} = V_{RMS}$$

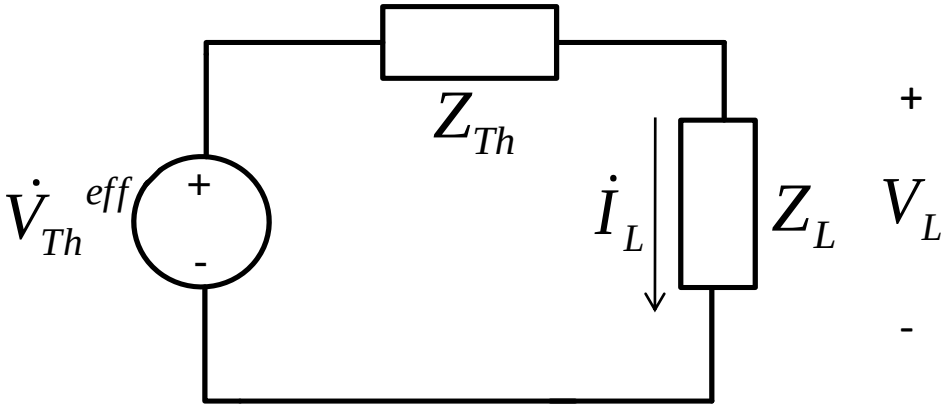
- **Caso sinusoidal: $v(t) = V_p\cos(\omega t)$**

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_{peak}{}^2 \cos^2(\omega t)dt} = \sqrt{\frac{V_{peak}{}^2}{2T}\int_0^T \left(1+\cos(2\omega t)\right)dt} = \boxed{\frac{V_{peak}}{\sqrt{2}} = V_{RMS}}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{peak}{}^2 \cos^2(\omega t)dt} = \sqrt{\frac{I_{peak}{}^2}{2T}\int_0^T \left(1+\cos(2\omega t)\right)dt} = \boxed{\frac{I_{peak}}{\sqrt{2}} = I_{RMS}}$$

$$P = \frac{1}{2} V_{peak}\, I_{peak}\, \cos(\theta) \rightarrow P = V_{RMS}\, I_{RMS}\, \cos(\theta)$$

3. Máxima transferencia de potencia promedio



$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$
$$Z_L = R_L + jX_L$$

¿Cuál debe ser el valor de Z_L para que la transferencia de potencia de la fuente V_{Th} a la carga Z_L sea máxima?

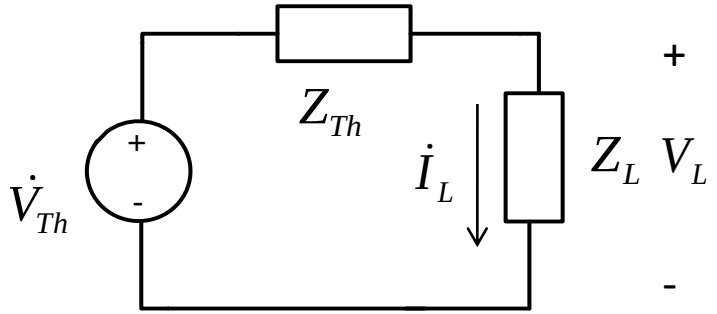
$$P = V_{L(eff)} I_{L(eff)} \cos\left(\theta_{V_L} - \theta_{I_L}\right)$$

$$Divisor\,de\,Voltaje \rightarrow |V_L| = \frac{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}} \cdot V_T$$

$$Ley\ de\ \ Ohm \rightarrow |I_L| = \frac{1}{\sqrt{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}} \cdot V_T$$

3. Máxima transferencia de potencia promedio

$$\cos\left(\theta_{V_L} - \theta_{I_L}\right) = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}$$



Luego:

$$P = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \cdot V_T^{\,2}$$

Para maximizar P es claro que se debe escoger X_L=-X_{Th} , quedándonos la misma expresión que en el caso resistivo puro, donde ya se demostró que se debe escoger R_L=R_{Th} , luego, para **máxima transferencia de potencia**:

$$\boxed{Z_L = Z_{Th}^* = R_{Th} - jX_{Th}}$$

4. Potencia aparente y compleja

- **Potencia compleja:**

Complejo conjugado de la corriente

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^{*} \left[volt - ampéres \right]$$

$$\dot{S} = V_{RMS} \angle \theta_V \cdot I_{RMS} \angle -\theta_I = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \angle \theta_V - \theta_I$$

- **Potencia aparente:**

$$S = \left| \dot{S} \right| \left[VA \right]$$

Al ser un complejo, la potencia compleja se puede escribir como:

$$\dot{S} = P + jQ$$

Potencia promedio o activa

Potencia reactiva o imaginaria

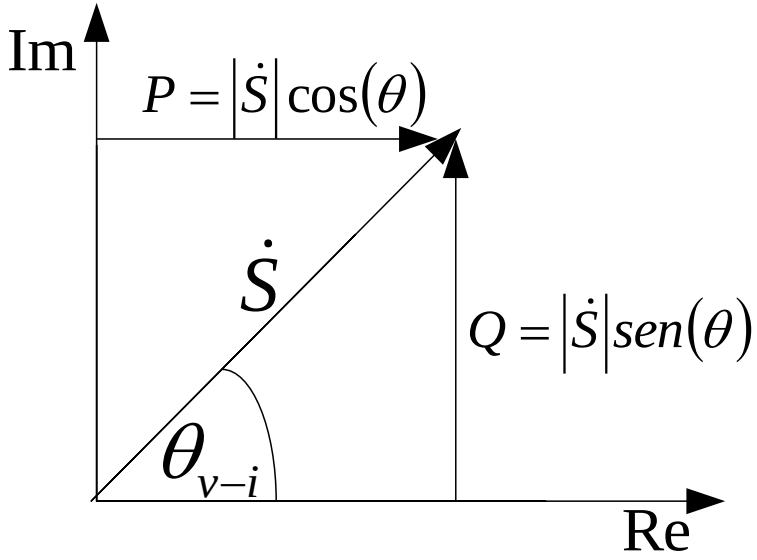
4. Potencia aparente y compleja

$$\dot{S} = P + jQ$$

$$P = \mathrm{Re}\{\dot{S}\} = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cos(\theta_V - \theta_I)[W]$$

$$Q = \mathrm{Im}\{\dot{S}\} = V_{RMS} \cdot I_{RMS} sen(\theta_V - \theta_I)[VAR]$$

- **Triángulo de potencias:**



$$\tan(\theta_{v-i}) = \frac{Q}{P}$$

5. Factor de potencia(fp)

- **Factor de potencia (fp):** parámetro que permite conocer la naturaleza de un consumo eléctrico y **relaciona su potencia activa con su potencia aparente (y a su vez con su p. reactiva)**.

- Es importante en los circuitos reales debido al impacto económico que tiene en los usuarios en general, y en particular en los consumidores de grandes cantidades de potencia. **Por que?**

$$fp = \frac{P}{|\dot{S}|} = \cos(\theta_V - \theta_I) = \cos(\theta_z) = \cos(\theta)$$

Factor de potencia

5. Factor de potencia(fp)

$$fp = \cos(\theta_Z) = \cos(\theta)$$

Ángulo de la impedancia de carga

- **Factor de Potencia:**
  - **Capacitivo**:

Si -90° < θ < 0°, la carga es capacitiva y el fp está en adelanto.

$\theta_Z = \theta_V - \theta_I < 0 \rightarrow \theta_V < \theta_I \rightarrow I_L$ adelanta a V_L (similar al condensador).

  - **Inductivo (típico):**

Si 0° < θ < 90°, la carga es inductiva y el fp está en atraso.

$\theta_Z = \theta_V - \theta_I > 0 \rightarrow \theta_V > \theta_I \rightarrow I_L$ retrasa a V_L (similar a la inductancia).

5. Factor de potencia(fp):
Ejemplos.

- **Ejemplo 1:**

$$\text{Carga}: Z_L = 1 - j$$

¿Cómo es este consumo?

$$Z_L = \sqrt{2}\angle -45°$$

Su factor de potencia está en **adelanto**. Es decir, dado un voltaje, la corriente que consumiría adelantaría a este en 45º, es una carga capacitiva.

- **Ejemplo 2:**

$$\text{Carga}: Z_L = 2 + j$$

¿Cómo es este consumo?

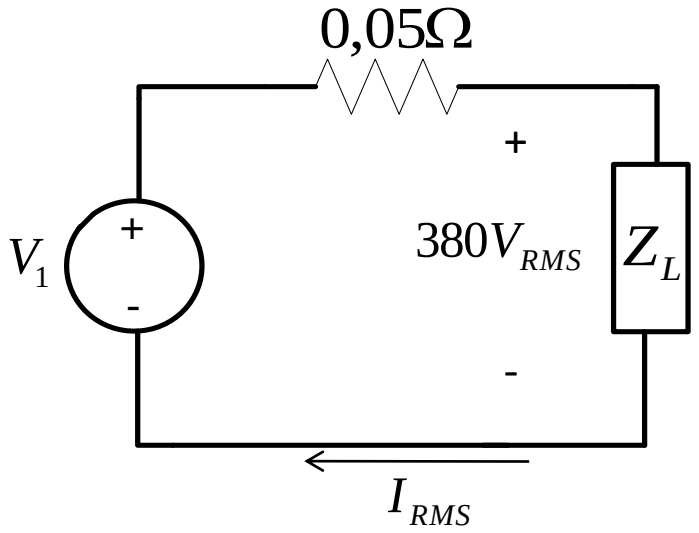
$$Z_L = \sqrt{5}\angle 26{,}6°$$

En este caso, el factor de potencia está en **atraso** o retrasado (inductivo).

¿Qué fp es mejor?

5. Factor de potencia(fp):
Ejemplos.

- **Ejemplo 3:** Abastecer una carga industrial que consume P_L = 70 kW, con un fp = 0,7 en atraso. ¿Cuánta potencia deberá entregar el generador? ¿Qué pasaría si el consumo fuera menos reactivo (fp=0,93)?



$$Z_L = Z_L \angle \theta$$

$$I_{RMS} = \frac{P_L}{V_{RMS}\cos(\theta)} = \frac{70000}{380 \cdot 0{,}7} = 263{,}2[A]$$

La potencia que deberá entregar el generador será:

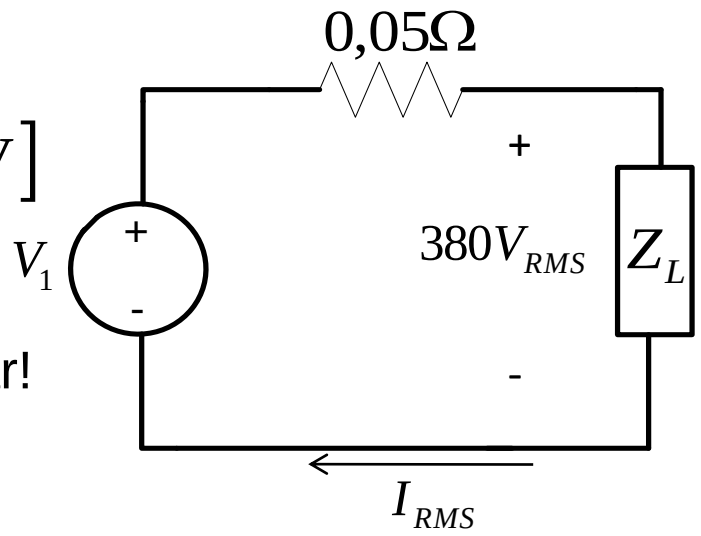
$$P_f = P_L + 0{,}05 \cdot I_{RMS}^2 = 73.500[W]$$

5. Factor de potencia(fp):
Ejemplos.

Repetimos los cálculos para fp=0,93:

$$I_{RMS} = \frac{70000}{380 \cdot 0{,}93} = 198{,}1[A]$$

$$P_f = 70000 + 0{,}05 \cdot (198{,}1)^2 = 71.900[W]$$



¡Baja la corriente y la potencia a suministrar!

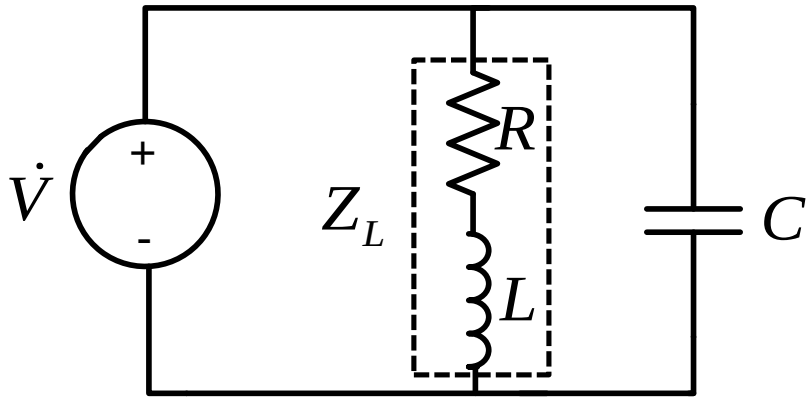
- **Mejor (o mayor) factor de potencia:**
  - Menores exigencias para generadores y líneas de transmisión.
  - Menores caídas de tensión.
  - Menores pérdidas de potencia.

5. Factor de potencia(fp):
Corrección del fp.

- Lo óptimo es un consumo puramente resistivo (**fp = 1**) ya que en estas condiciones se **minimizan las pérdidas**.

- En un carga alimentada por un voltaje V_L y de una potencia P_L, ambos constantes, la cantidad de corriente que se debe suministrar dependerá del fp de dicho consumo.

- Para corregir el fp se debe tratar de **anular la reactancia de la carga**, por ejemplo:



$$RL:\ \mathrm{Z_L} = R + jX_L$$

$$RLC:\ \mathrm{Z_L} = R + jX'_L$$

$$\left|X'_L\right| < \left|X_L\right|$$

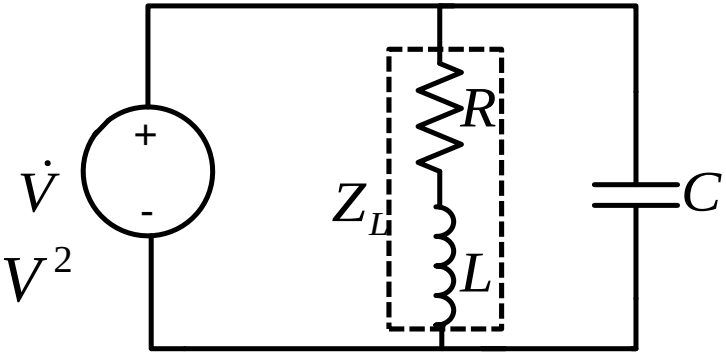
5. Factor de potencia(fp):
Corrección del fp.

$$RL: \dot{S}_L = P_L + jQ_L$$

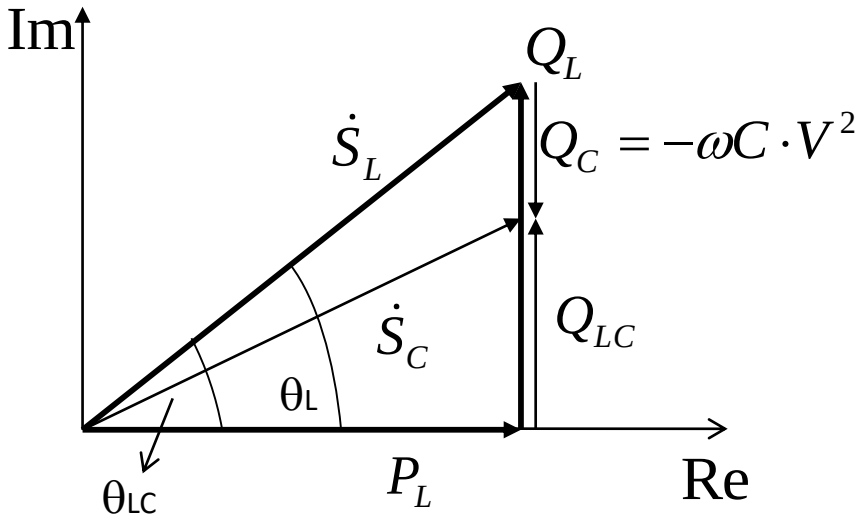
$$C: \dot{S}_C = -j\omega C \cdot V^2$$

$$RLC: \dot{S}_{LC} = \dot{S}_L + \dot{S}_C = P_L + jQ_L - j\omega C \cdot V^2$$

$$\therefore \dot{S}_{LC} = P_L + j\left(Q_L - \omega C \cdot V^2\right)$$



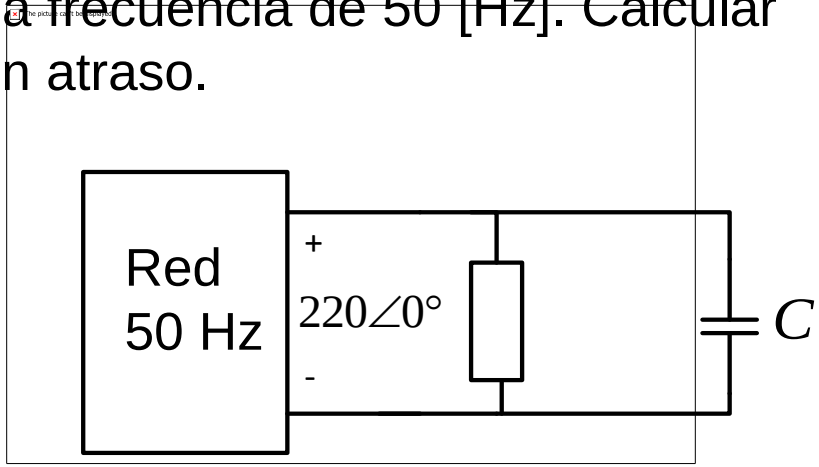
Visto en el triángulo de potencias:



¿Por qué C se conecta en paralelo y no en serie?¿Cuándo se usan inductancias?

5. Factor de potencia(fp):
Corrección del fp.

- **Ejemplo:** Un consumo de 60 [kW] tiene un fp de 0,8 en atraso. Su alimentación es de 220 V_{RMS}, con una frecuencia de 50 [Hz]. Calcular el valor de C para tener un fp=0,95 en atraso.



$$\text{fp} = 0{,}8 \; atraso \rightarrow \theta = 36{,}9^{o}$$

$$Q_L = P_L \tan(\theta) = 45000 \; [VA]$$

$$S_L = 60 + j45 \; [kVA]$$

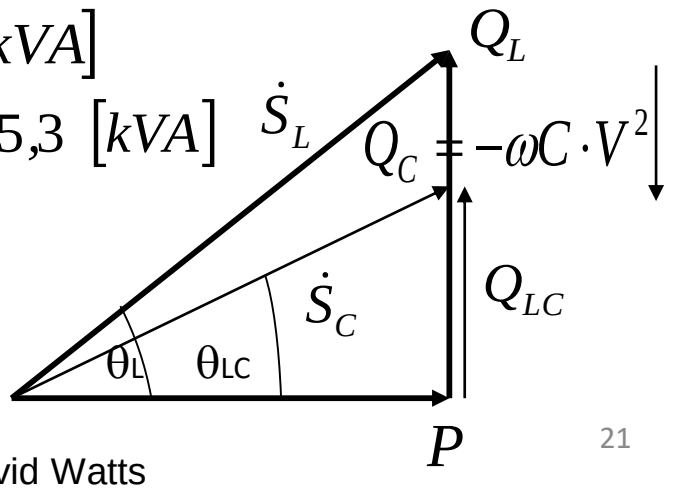
Para un fp=0,95 tenemos:

$$\text{fp} = 0{,}95 \rightarrow \theta_{LC} = \cos^{-1}(0{,}95) = 18{,}2^{o}$$

$$S_{LC} = 60 + j60\tan(18{,}2^{o}) = 60 + j19{,}7 \; [kVA]$$

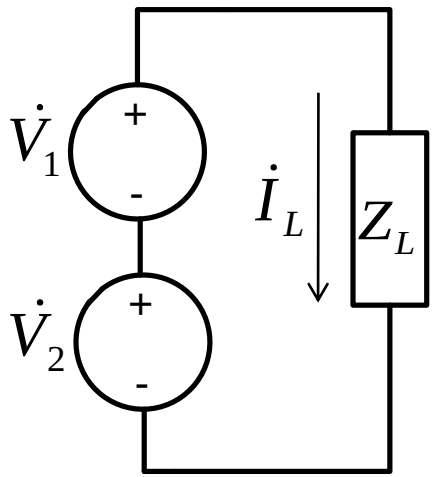
$$Q_{LC} = Q_L + Q_C \rightarrow Q_C = 19{,}7 - 45 = -25{,}3 \; [kVA]$$

$$C = -\frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{25{,}3}{2\pi 50 \cdot 220^2} = 1{,}66 \; [mF]$$



6. Superposición de potencia

- **Superposición de potencia:** recordemos que el principio de superposición es válido para calcular corrientes y voltajes, pero no para potencias, ya que ésta no es lineal.



$$P_L = V_L\, I_L \cos\theta = |Z_L|\, I_L^2 \cos\theta = R_L\, I_L^2$$

Por superposición de corrientes:

$$I_L = I_L^1 + I_L^2$$

Entonces:

$$P_L = R_L\,(I_L^1 + I_L^2)^2 = R_L\left[(I_L^1)^2 + (I_L^2)^2 + 2\,I_L^1\,I_L^2\right]$$

$$P_L \neq P_1 + P_2 = R_L\left[(I_L^1)^2 + (I_L^2)^2\right]$$

¡Claramente la superposición de P es inválida!

6. Superposición de potencia

Existe un caso particular donde **se cumple la superposición de Potencias Promedio (o Activa)** pero no de potencia instantánea, y es cuando se tiene una red excitada por dos o mas fuentes de distinta frecuencia angular (no nulas) **armónicamente** relacionadas. Si tenemos lo siguiente con n y m enteros:

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2); \quad \omega_1 \neq \omega_2 \neq 0$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\frac{T}{m}} \quad y \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{\frac{T}{n}}$$

Entonces:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T R\, i^2(t)\, dt = \frac{I_1^2}{2} R + \frac{I_2^2}{2} R$$