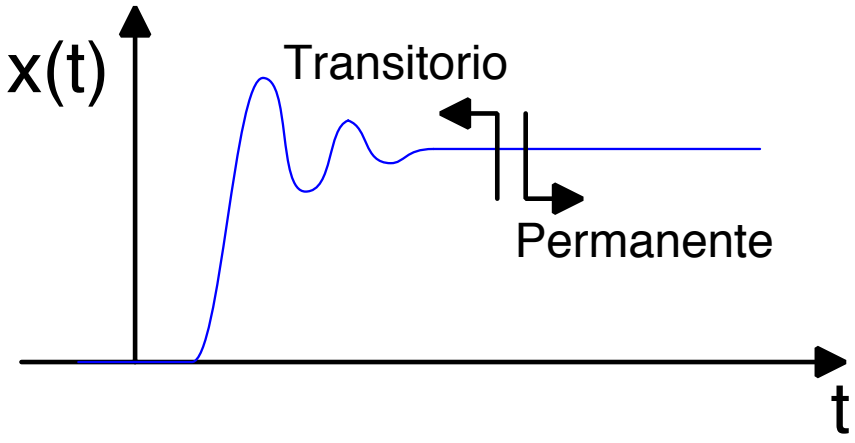
FASORES E IMPEDANCIA

Introducción

En esta clase introduciremos el concepto de *fasor*, útil para trabajar con circuitos en régimen sinusoidal permanente, y también introduciremos oficialmente (de una vez por todas) el concepto de *impedancia* en circuitos representados en el dominio fasorial. Veremos que tanto capacitores como inductores pueden ser utilizados para hacer divisores de voltaje y de corriente, así como también reformularemos el teorema de máxima transferencia de potencia considerando impedancias en general y no sólo impedancias puramente resistivas.

Régimen permanente

- En la repuesta de un circuito de orden mayor a cero se distinguen dos regímenes: el transitorio y el permanente.
  - El régimen transitorio se asocia a la superposición de la respuesta homogénea y la respuesta forzada del sistema.
  - El régimen permanente se asocia a lo que queda una vez que la respuesta homogénea ha desaparecido, es decir, sólo la respuesta forzada.

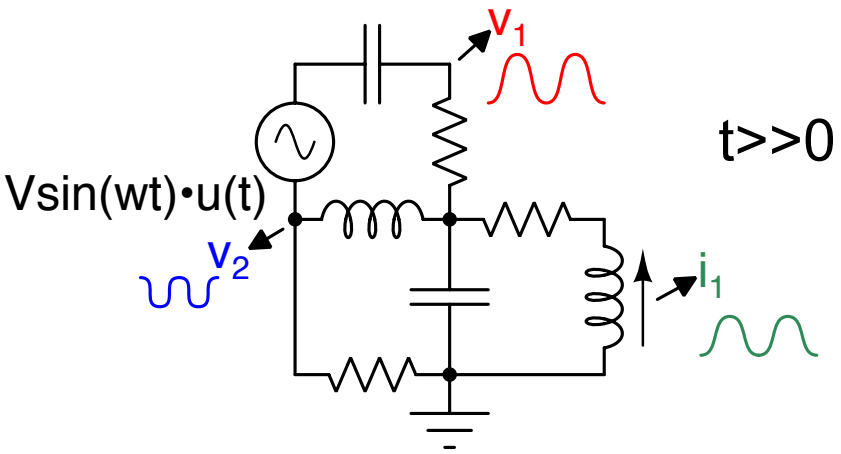


Régimen permanente

- La respuesta forzada está dada por la suma ponderada de la función que excita el circuito g(t) y sus derivadas.
  - Cuando g(t) es una sinusoide, la respuesta forzada corresponde a una sinusoide de la misma frecuencia con cierta amplitud y desfase.

$$g(t) = A\cos(\omega t) \rightarrow x_p(t) = A_p\cos(\omega t + \phi_p)$$

  - Esto aplica para *todas* las señales (voltajes y corrientes) del circuito!

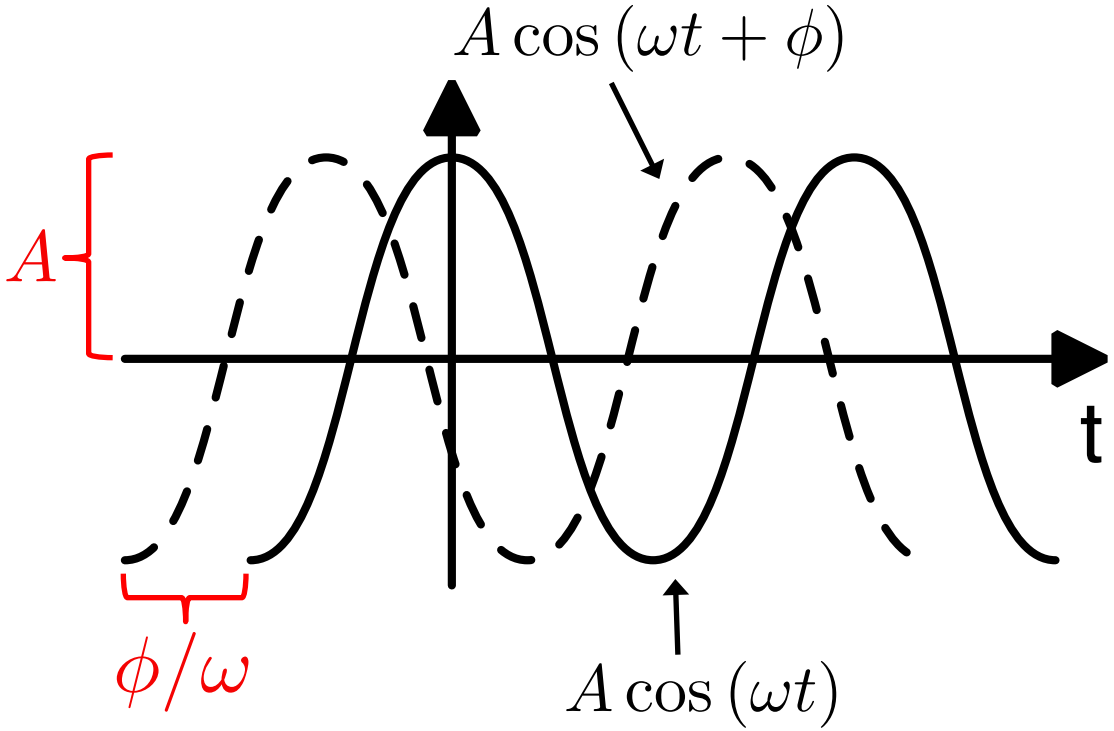


Régimen permanente

- En un circuito en *régimen sinusoidal permanente* sólo nos interesa la amplitud y el desfase de cada señal. La frecuencia es igual para todas las corrientes y voltajes.
  - Nos interesan en particular las excitaciones sinusoidales por dos motivos: (i) toda señal puede ser descompuesta en una serie de sinusoides de amplitud y frecuencia distinta, y (ii) la sinusoide corresponde a la forma de onda dominante en la industria de potencia eléctrica.

Régimen permanente

- En este contexto conviene tener claras todas las definiciones relativas a la onda sinusoidal:



Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f \ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Fase: se dice que $A\cos(\omega t+\phi)$ adelanta en ϕ grados a $A\cos(\omega t)$

Magnitud:

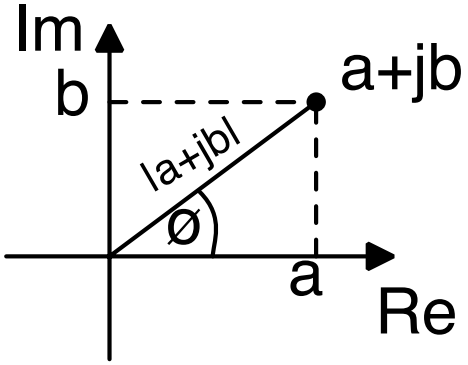
Valor *peak*: A

Valor *peak-to-peak*: $2A$

Valor RMS: $A/\sqrt{2}$

Fasores

- Dado que lo único que nos interesa en régimen sinusoidal permanente es la amplitud y la fase de cada señal, podemos usar estas dos magnitudes para describir todas las señales del circuito por medio de *fasores*.
- Un *fasor* es un número complejo en coordenadas polares:



$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Amplitud (A) Fase (ϕ)

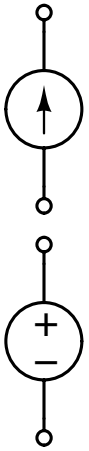
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow \hat{X} = A\angle\phi$$

Dominio del tiempo

Dominio fasorial

Fasores

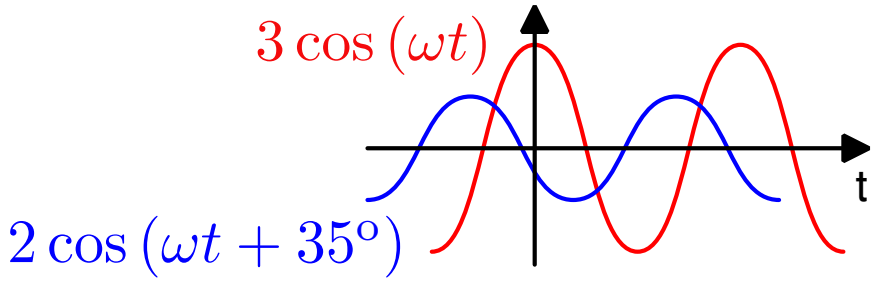
- Un fasor representa un *coseno*, para representar un *seno* basta aplicar un desfase de -90° (i.e. sin(x) = cos(x-90°)):

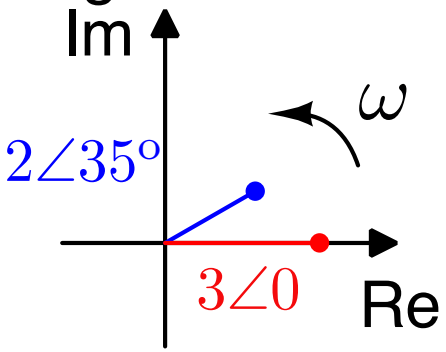


$$i(t) = 10\cos\left(2\pi 50t + 30^\circ\right) \leftrightarrow \hat{I} = 10\angle 30^\circ$$

$$v(t) = 6\sin\left(2\pi 60t + 120^\circ\right) \leftrightarrow \hat{V} = 6\angle 30^\circ$$

- Para graficar fasores se usa un diagrama fasorial:





Fasores

- En resumen, un fasor no es más que una representación alternativa de una onda sinusoidal (particularmente de un coseno).
  - Sirven para circuitos en régimen sinusoidal permanente.
  - La magnitud de un fasor representa la amplitud de la sinusoide, mientras que la fase representa el desfase que tiene la señal con respecto a una señal de referencia.
  - En un diagrama fasorial (plano complejo), los fasores giran a velocidad angular constante.
  - No pueden ser utilizados en circuitos con excitaciones de frecuencias distintas. Un diagrama fasorial asume que la frecuencia es la misma para todos los fasores.
  - Se denotan con un “tongo” o un punto, pero en general hay que fijarse bien en el contexto no más.

Fasores

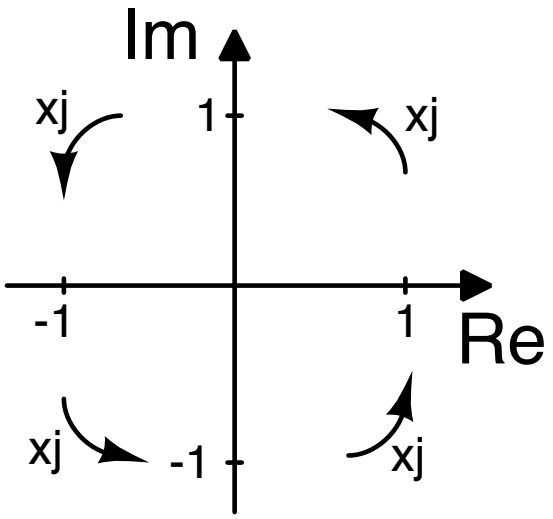
- Operatoria fasorial:

$$A_1\angle\phi_1 \cdot A_2\angle\phi_2 = A_1A_2\angle\phi_1 + \phi_2$$

$$\frac{A_1\angle\phi_1}{A_2\angle\phi_2} = \frac{A_1}{A_2}\angle\phi_1 - \phi_2$$

- Sobre números complejos:

$$j \cdot 1 = j$$
$$j \cdot j = j^2 = -1$$
$$j \cdot -1 = -j$$
$$j \cdot -j = -j^2 = 1$$
$$1/j = -j$$



Multiplicar por j (-j) es equivalente a rotar en 90º (-90º) en el plano complejo!

Impedancia

- Tanto el capacitor como el inductor corresponden a componentes de un puerto (dos terminales) que establecen una relación entre voltaje y corriente:

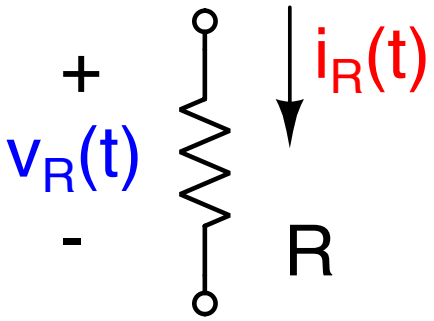
$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

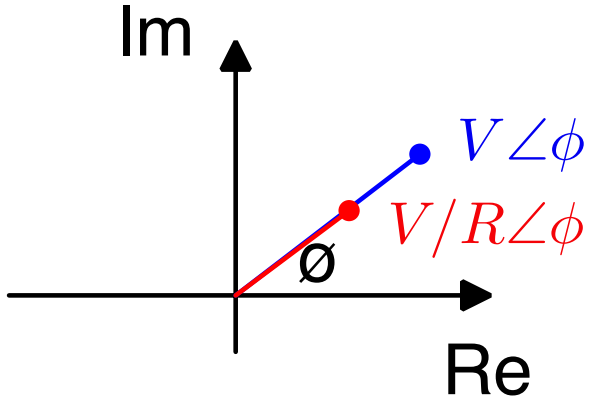
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

  - Como ya vimos, estas expresiones tienen olor a Ley de Ohm.
- A continuación definiremos oficialmente el concepto de *impedancia* y haremos lo posible para entender bien de dónde provienen sus fundamentos.

Impedancia

- Primero veamos qué ocurre con la relación voltaje-corriente para los distintos componentes circuitales que conocemos (R, C y L) en el dominio fasorial:
  - **Resistor:**





$$v_R(t) = V\cos(\omega t + \phi)$$

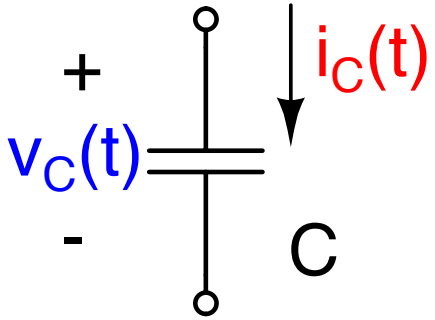
$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V}{R}\cos(\omega t + \phi)$$

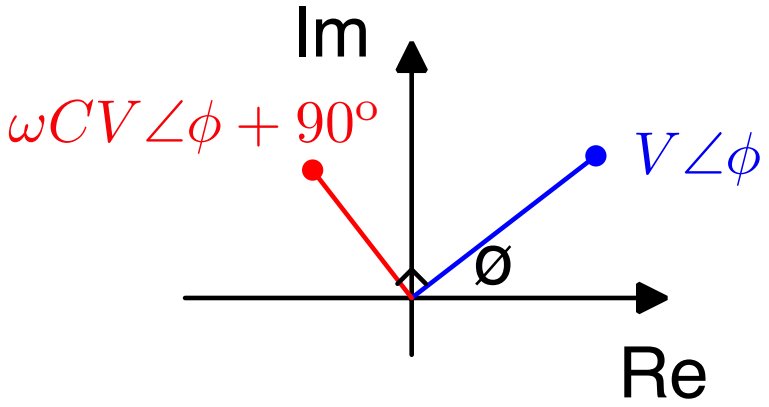
$$\rightarrow I_R = \frac{1}{R}\cdot V_R$$

El voltaje y la corriente están en fase

Impedancia

- **Capacitor:**





$$v_C(t) = V\cos(\omega t + \phi)$$

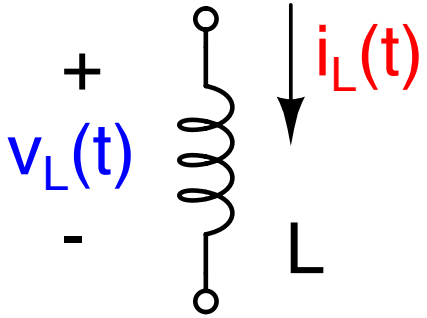
$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega CV\sin(\omega t + \phi)$$
$$= -\omega CV\cos(\omega t + \phi - 90^o)$$
$$= \omega CV\cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

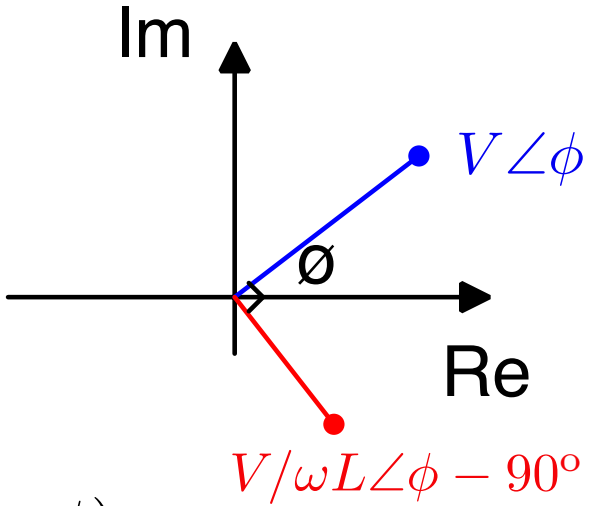
$$\rightarrow I_C = j\omega C \cdot V_C$$

La corriente adelanta en 90° al voltaje

Impedancia

- **Inductor:**





$$v_L(t) = V\cos(\omega t + \phi)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega L}V\sin(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{\omega L}V\cos(\omega t + \phi - 90^o)$$

$$\rightarrow I_L = \frac{1}{j\omega L}\cdot V_L$$

El voltaje adelanta en 90° a la corriente

Impedancia

- En resumen:

$$
\begin{aligned}
V_R/I_R &= Z_R = R \\
V_C/I_C &= Z_C = 1/j\omega C \\
V_L/I_L &= Z_L = j\omega L
\end{aligned}
$$

↑

Impedancias!

- La impedancia Z es un concepto equivalente al de resistencia (también se mide en Ohms). Indica cuánto se opone al flujo de corriente un componente o circuito en régimen sinusoidal permanente. La admitancia Y es el recíproco de la impedancia.

Impedancia

- Como vimos hace un tiempo, a baja frecuencia un capacitor se comporta como un circuito abierto (impedancia infinita), mientras que a alta frecuencia se comporta como un corto circuito (impedancia nula). Lo opuesto ocurre en el caso del inductor.

	$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$
$Z_C = 1/j\omega C$	∞	0
$Z_L = j\omega L$	0	∞

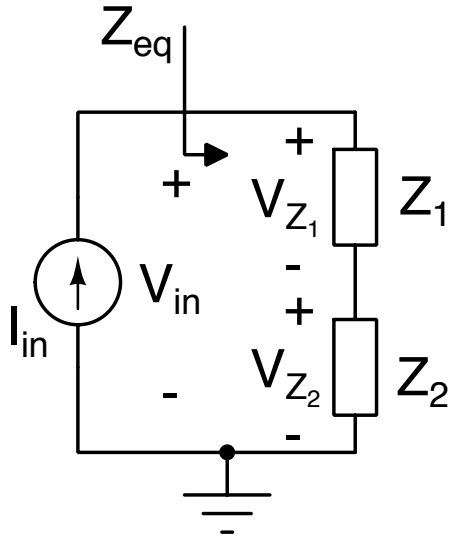
Impedancia

- Al igual que en el caso puramente resistivo, siempre es posible calcular una impedancia o una admitancia equivalente en un circuito lineal.
  - En términos prácticos una impedancia se comporta como un resistor, y todo lo que hemos visto hasta ahora es aplicable (KCL, KVL, nodos, mallas, divisores de voltaje y de corriente, H-T y M-N).
- Para resolver circuitos en el dominio del tiempo hay que resolver ecuaciones diferenciales, en cambio, en el dominio de la frecuencia y en régimen sinusoidal permanente, basta con trabajar con impedancias y resolver como si se tratara de un simple circuito puramente resistivo.

Impedancia

- Impedancias en serie:

$$V_{in} = V_{Z_1} + V_{Z_2} = I_{in}Z_1 + I_{in}Z_2$$



$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = Z_1 + Z_2$$

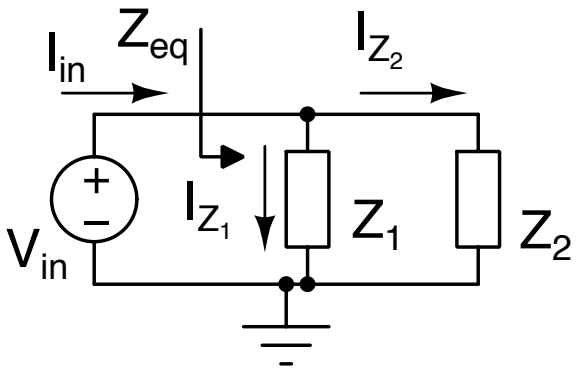
$$\rightarrow Y_{eq} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = Y_1 || Y_2 = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

La impedancia equivalente corresponde a la suma de las impedancias! (o equivalentemente, al paralelo de las admitancias)

Impedancia

- Impedancias en paralelo:

$$I_{in} = I_{Z_1} + I_{Z_2} = \frac{V_{in}}{Z_1} + \frac{V_{in}}{Z_2}$$



$$\rightarrow Y_{eq} = \frac{I_{in}}{V_{in}} = Y_1 + Y_2$$

$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = Z_1 || Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

La impedancia equivalente corresponde al paralelo de las impedancias! (o equivalentemente, a la suma de las admitancias)

Impedancia

- Algunas definiciones:

Resistencia ↘ Reactancia ↙

$$Z = R + jX$$

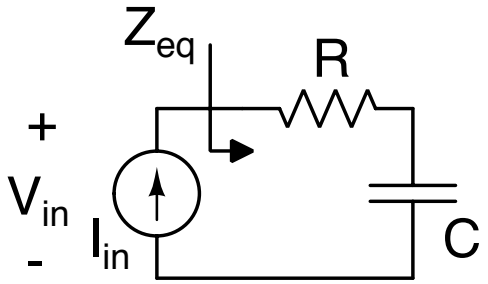
$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

↗ Conductancia ↖ Susceptancia

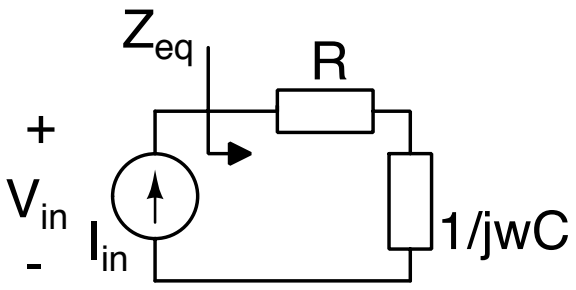
  - X>0: Z es inductiva.
  - X<0: Z es capacitiva.
  - R=0: Z es reactiva pura (capacitiva o inductiva).
  - X=0: Z es resistiva pura.

Impedancia

- **Ejemplo**: calcular la impedancia equivalente pedida.



- En el dominio de la frecuencia (y en régimen sinusoidal permanente):



$$V_{in} = I_{in}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

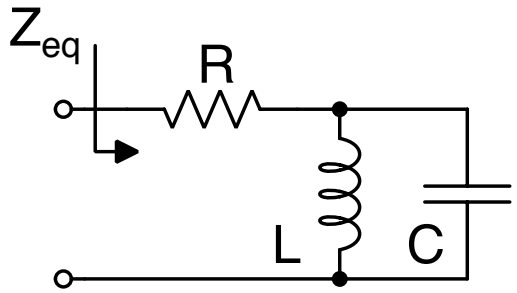
$$\rightarrow Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$R_{eq} = R \qquad X_{eq} = -\frac{1}{\omega C}$$

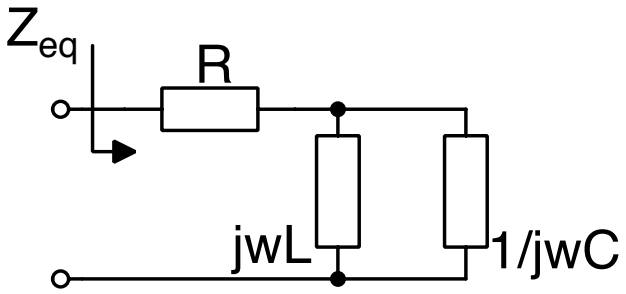
Fin ej.

Impedancia

- **Ejemplo**: calcular la impedancia equivalente pedida en términos de magnitud y fase.



- En el dominio de la frecuencia (y en régimen sinusoidal permanente):

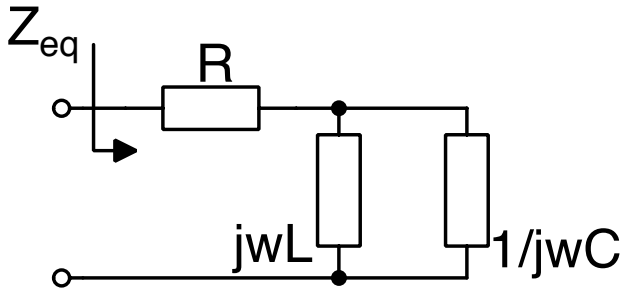


Impedancia

- Por lo tanto:

$$Z_{eq} = R + j\omega L || \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{eq} = R + j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

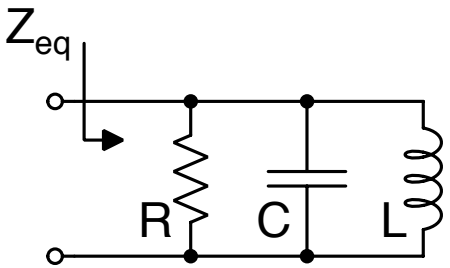


$$\rightarrow Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{R}\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)$$

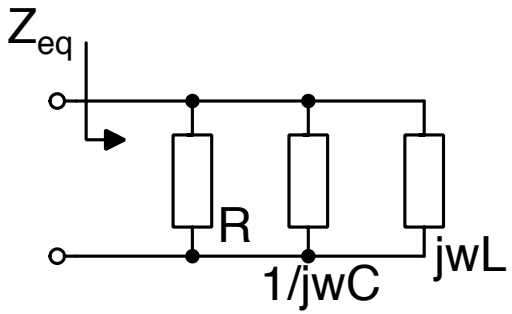
Fin ej.

Impedancia

- **Ejemplo**: calcular la frecuencia a la cual Z_{eq} es puramente real.



- En el dominio de la frecuencia (y en régimen sinusoidal permanente):



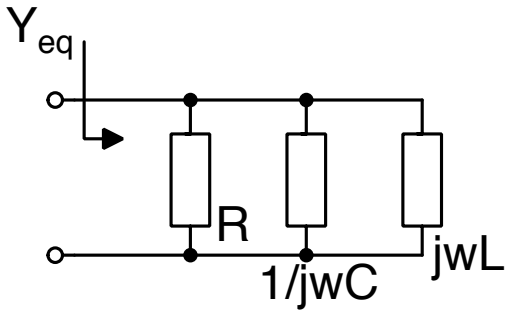
Impedancia

- Este ejemplo es mucho más simple en términos de admitancias. Si hacemos que Y_{eq} sea puramente resistiva, Z_{eq} también lo será.

$$Y_{eq} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\rightarrow Y_{eq} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

G_{eq} B_{eq}



$$B_{eq}(\omega) = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ ⟵ Es la frecuencia natural del circuito (ω_0)!

Fin ej.

Impedancia

- A continuación reforzaremos lo recién visto estudiando este tema desde sus fundamentos. El procedimiento que seguiremos a continuación se estructura como sigue:
  - Veremos que una señal se puede expresar en distintas bases, en particular en el dominio del tiempo (como lo hacemos normalmente) y en el *dominio de la frecuencia* (***demasiado*** importante en Ingeniería Eléctrica).
  - Luego veremos que derivar con respecto al tiempo equivale a multiplicar por un escalar en el dominio de la frecuencia.
  - Concluiremos que es mucho más conveniente trabajar en el dominio de la frecuencia. Este dominio permite tratar capacitores e inductores como impedancias, las que se manejan igual que un resistor en términos algebraicos.

Impedancia

- Partiremos por dar nuestro primer salto de fe: es posible expresar cualquier función de *energía finita* f(t) como la suma ponderada de infinitas bases en el dominio de la frecuencia (*transformada de Fourier*):

Representación de f(t) en el dominio de la frecuencia ω=2πf

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Sumatoria infinita (infinitas bases)

Bases sinusoidales complejas (fórmula de Euler)

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

Impedancia

- Antes de seguir entendamos bien qué es esto de expresar una función en otra base. Por ejemplo, un vector puede ser escrito en bases distintas:

Base 1

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \left(\frac{2+5\sqrt{3}}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base 2

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \\ 7 \end{bmatrix}$$

Representación de un mismo vector en bases distintas

Impedancia

- La idea de la transformada de Fourier es la misma, pero en vez de tres dimensiones (→ tres bases ortonormales) tenemos infinitas dimensiones (→ infinitas bases ortonormales), donde cada base es una sinusoide compleja.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

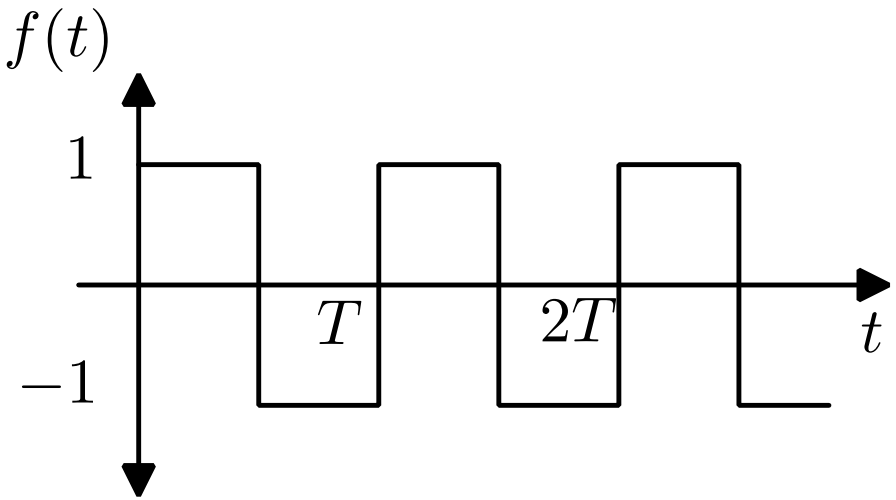
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

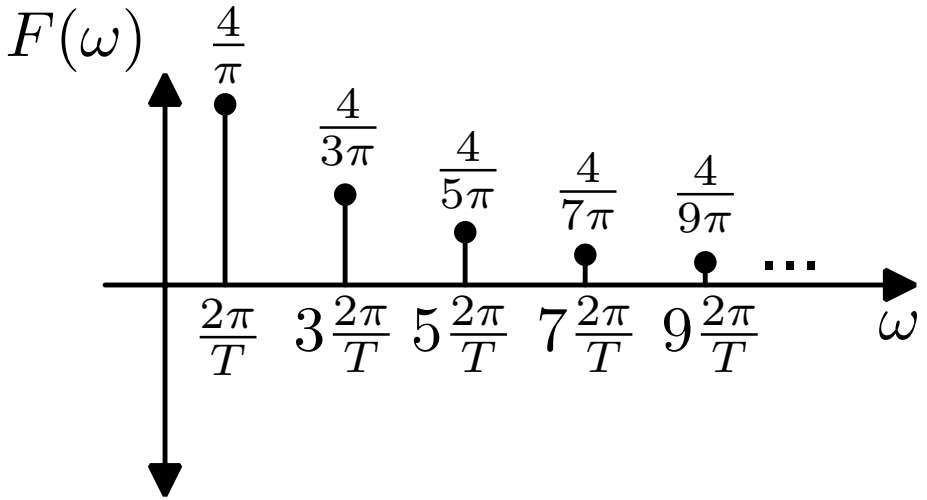
Señal de energía finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$$

Impedancia

- **Ejemplo**:

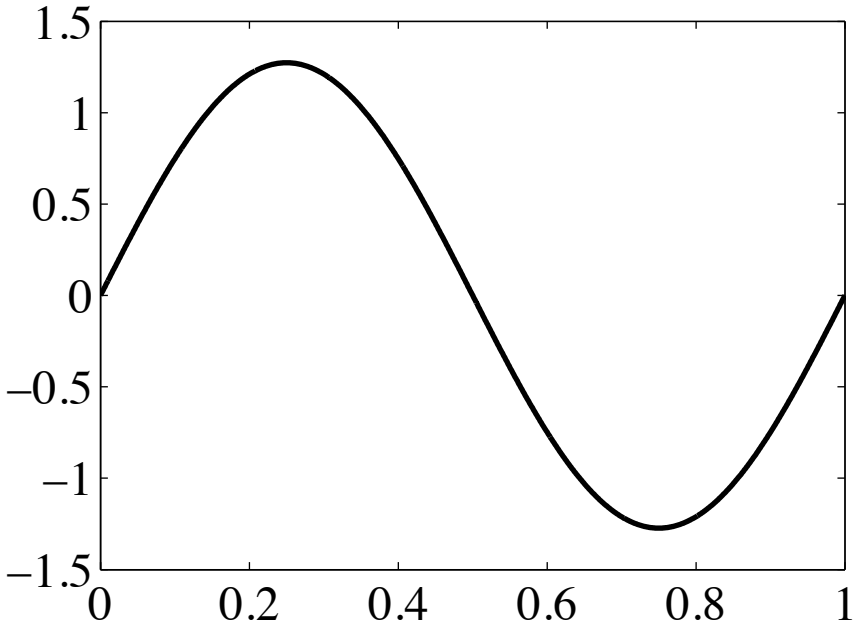


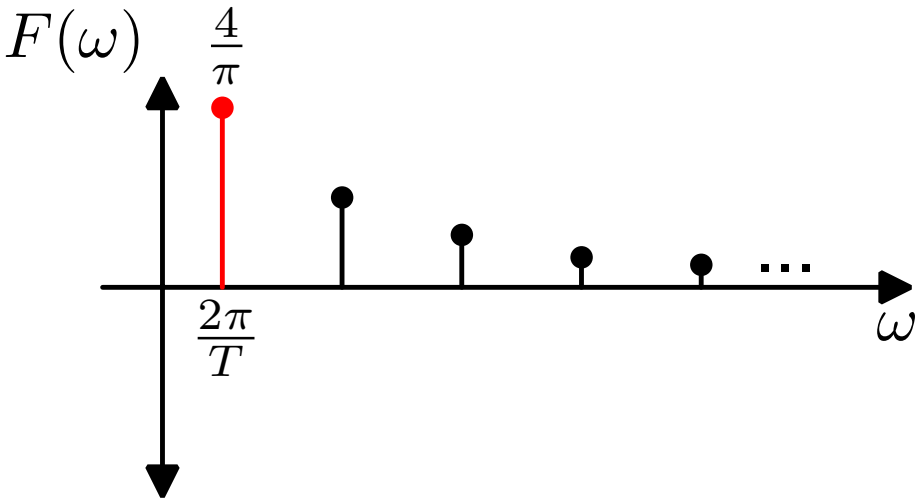


$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

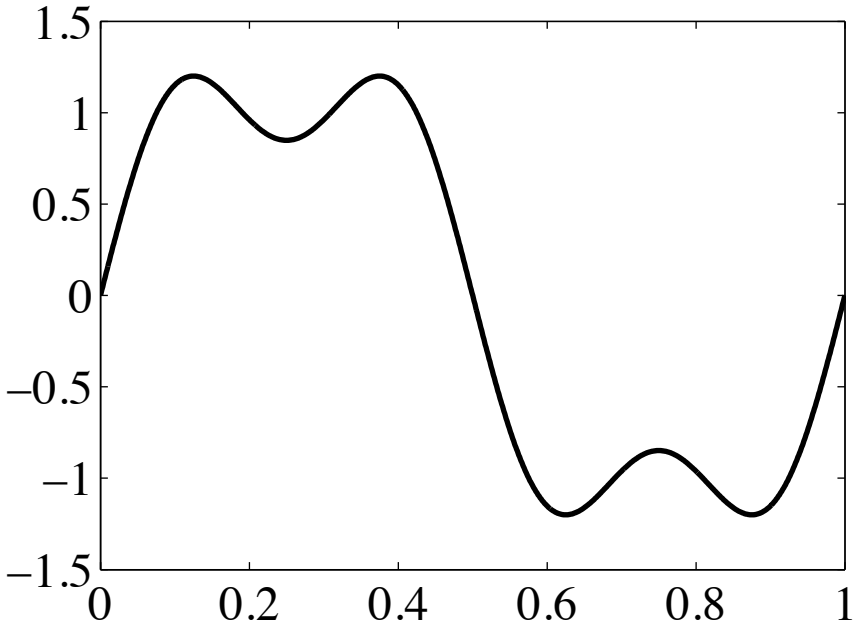


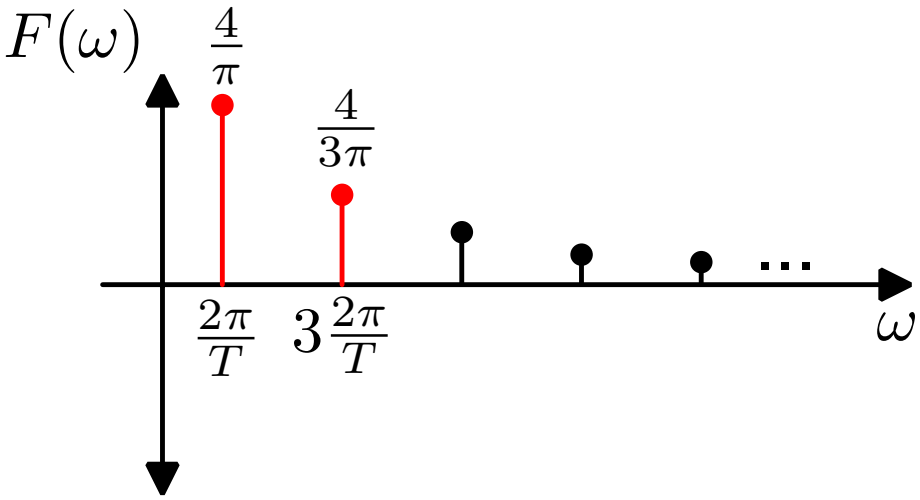


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

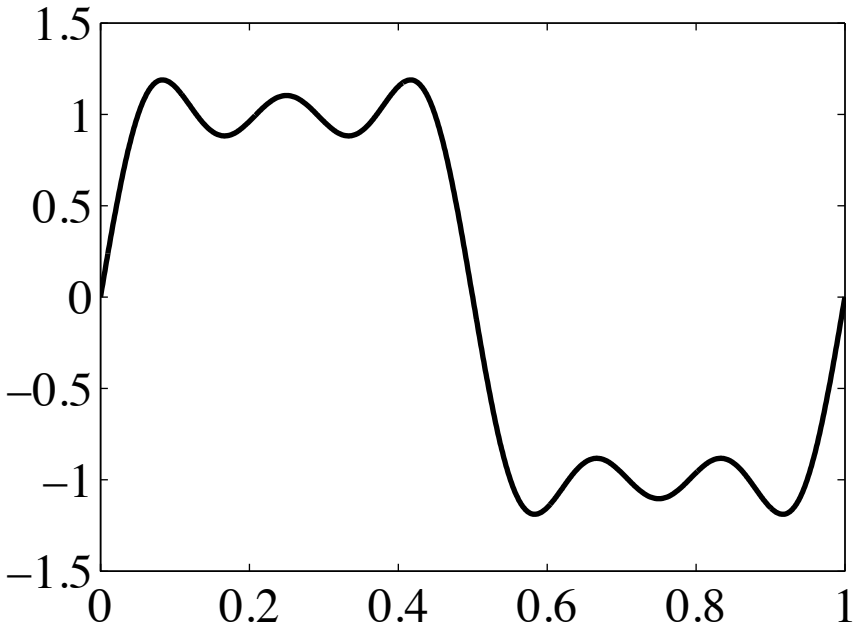


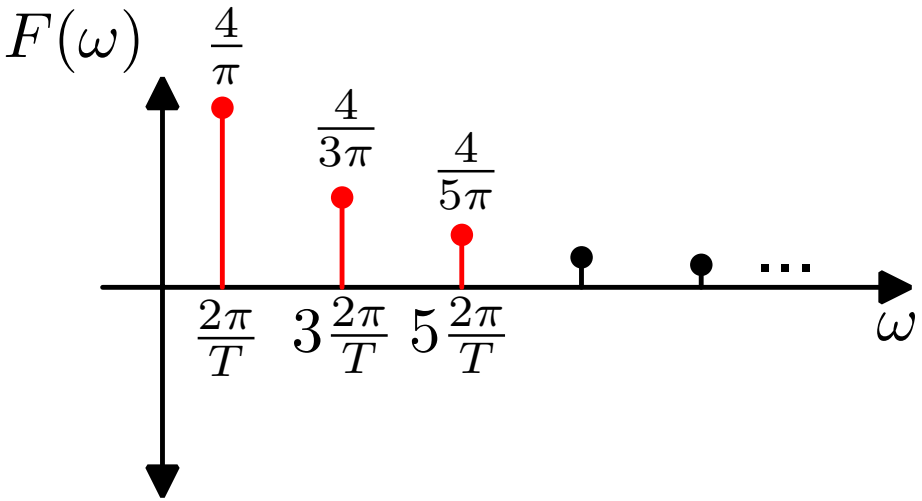


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

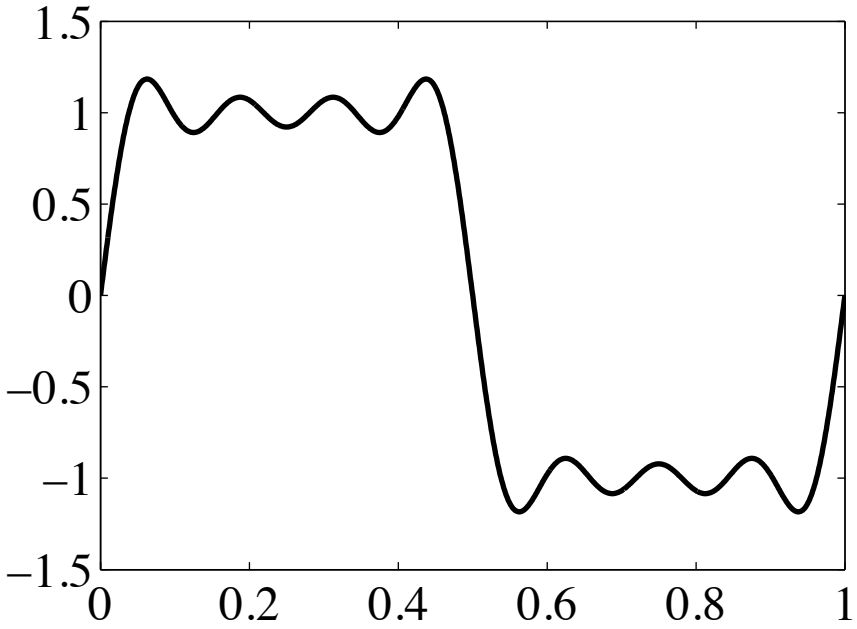


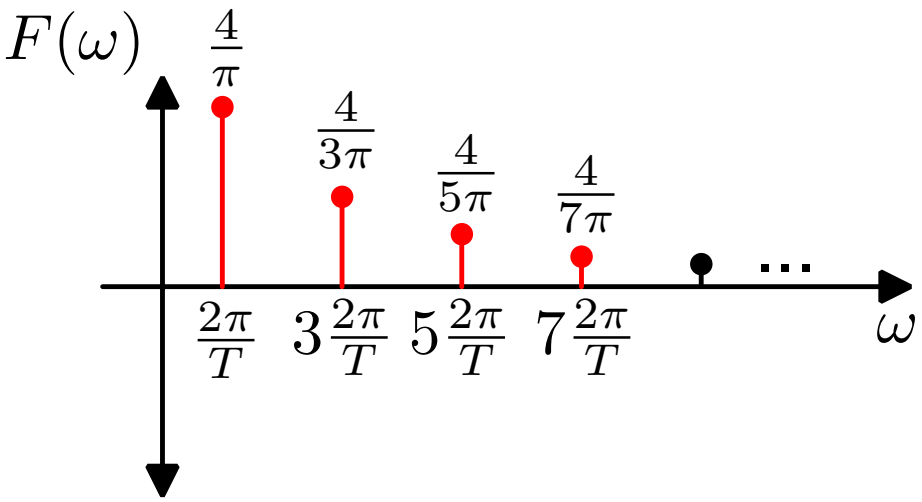


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{5\pi}\sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:

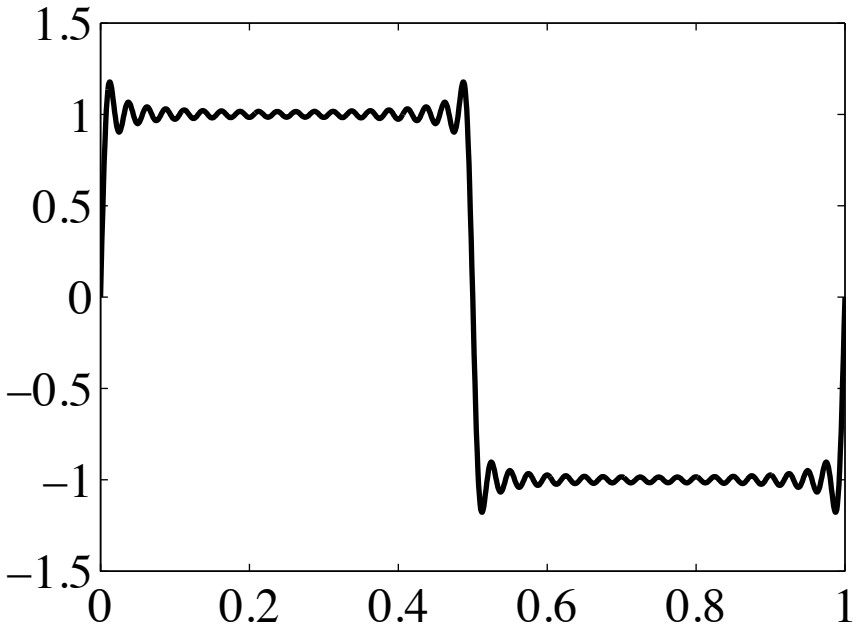


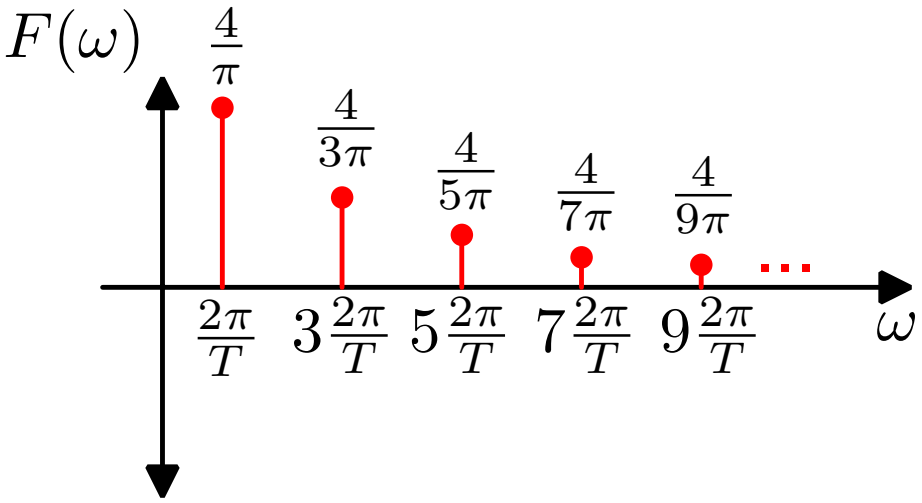


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{5\pi}\sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{7\pi}\sin\left(7\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Impedancia

- T = 1s:





$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{39} \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Fin ej.

Impedancia

- Ahora que estamos convencidos de que una señal en el dominio del tiempo (f(t)) puede ser representada en el dominio de la frecuencia (F(ω)) indicando su contenido armónico, podemos seguir con nuestra discusión inicial.
  - Si ya está perdido retroceda unas cuantas diapositivas y repase la estructura de esta exposición.
  - En el curso de señales se ven estos contenidos extensivamente. De todas manera es bueno estudiar esto en varios cursos y reforzar la parte intuitiva.
  - Recuerde que los ingenieros eléctricos *viven* en el dominio de la frecuencia.

Impedancia

- Veamos qué ocurre en el dominio de la frecuencia al derivar f(t) con respecto a t:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Derivar f(t) c/r a t equivale a multiplicar por jω la representación en el dominio de la frecuencia de f(t)!

Impedancia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

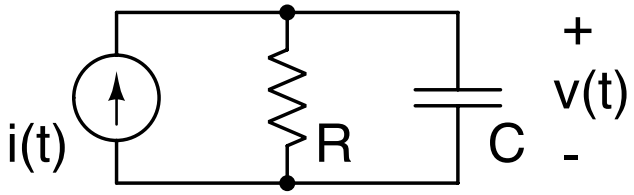
- Esto es exactamente lo mismo a lo que llegamos antes cuando dedujimos las expresiones de las impedancias del capacitor y el inductor!
  - Ahora sólo lo hicimos de una manera más formal.

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad I_C = j\omega C V_C$$

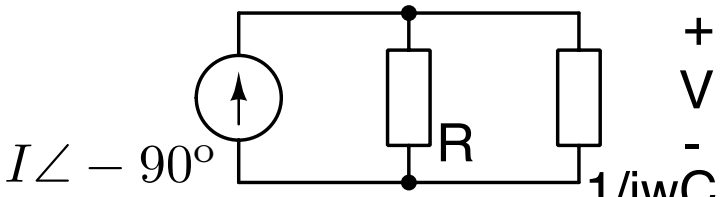
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad V_L = j\omega L I_L$$

Impedancia

- **Ejemplo**: calcular v(t) en régimen permanente con i(t) = I•sin(ωt).



- Tenemos:



$$V = IZ_{eq}$$

$$V = -jI\left(R||\frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$\rightarrow V = -\frac{IR}{1+(\omega RC)^2}(\omega RC + j)$$

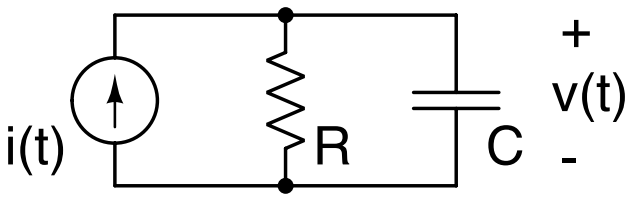
$$V = \frac{IR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

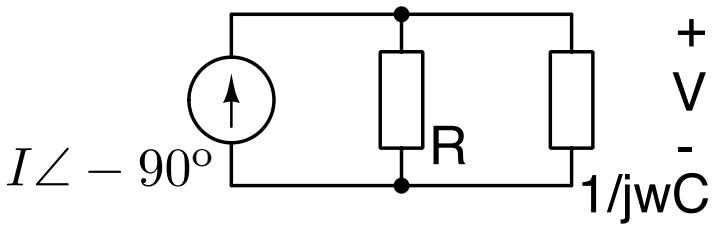
Impedancia

$$V = \frac{IR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

- Por lo tanto:

$$v(t) = \frac{IR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)$$

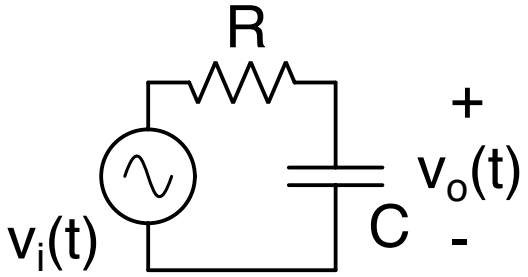




Fin ej.

Impedancia

- **Ejemplo**: calcular $v_o(t)$ en función de $v_i(t)$ para distintas frecuencias de entrada.



- Por divisor de voltaje:

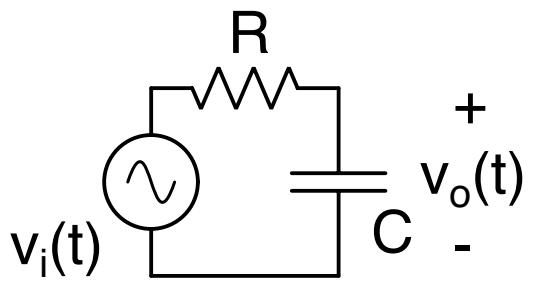
$$V_o = \frac{1}{1+j\omega RC} V_i$$

$$\rightarrow V_o = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega RC) \cdot V_i$$

Impedancia

- Analicemos un poco más este resultado:

$$V_o = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega RC) \cdot V_i$$



Para ω pequeño tiende a 1, mientras que para ω grande tiende a 0

→ Deja pasar bajas frecuencias y atenúa las altas frecuencias

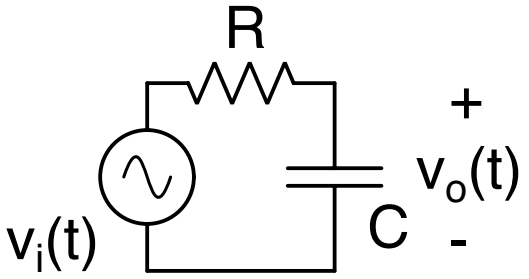
Para ω pequeño tiende a 0º, mientras que para ω grande tiende a -90º

- Esto tiene sentido desde varios puntos de vista:
  - ω = 0: el capacitor se comporta como c.a. (impedancia muy alta), por lo tanto no hay corriente y los voltajes de entrada y salida son iguales.
  - ω = ∞: el capacitor se comporta como c.c. (impedancia muy baja) y la diferencia de potencial en sus bornes es despreciable.

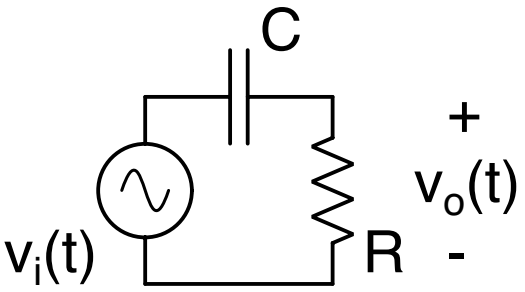
Impedancia

- Este circuito de hecho corresponde a un filtro pasivo pasa-bajos. Este filtro, así como otros tantos filtros simples, son fundamentales hay que entenderlos muy bien.
  - ¿Cómo se comportaría el circuito al intercambiar R por C?

$$V_o = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega RC) \cdot V_i$$



$$V_o = ¿? \cdot V_i$$



Fin ej.