Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 – Circuitos Eléctricos
Profesor Álvaro Lorca
Segundo Semestre 2018

Examen

Instrucciones

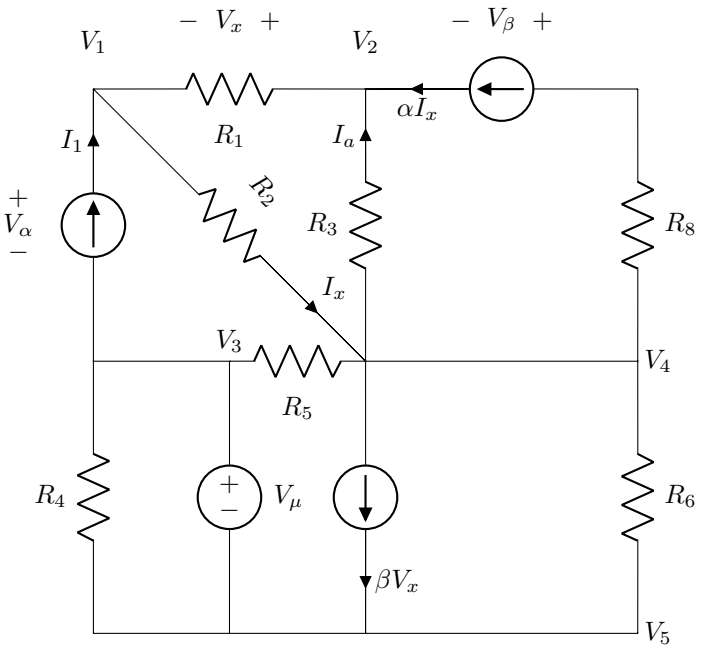
- Poner nombre y número de lista en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes de ningún tipo. Sí se permite el uso de calculadora científica.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error en el enunciado, explique por qué. Si hay algo ambiguo, explique por qué y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas y treinta minutos.

Problema 1 (15 puntos)

(a) (9 puntos) Considere el circuito de más abajo. En base al método de nodos, establezca un sistema de ecuaciones de la forma $Av = b$, reduciendo el número de variables en caso de ser posible.

(b) (3 puntos) Suponga que usted resolvió el sistema de la parte (a) y conoce los valores de los voltajes de nodo (sin asumir una tierra en particular). En base a esto, calcule los valores de I_a, V_α y V_β.

(c) (3 puntos) Exprese la potencia suministrada por la fuente de voltaje V_μ.



Solución:

(a) **Solución:** Para el método pedido, debemos aplicar Kirchhoff de corrientes en cada nodo del circuito. Por inspección, notamos que los nodo V_3 y V_5 forman un súpernodo, tal que $V_\mu = V_3 - V_5$. Las ecuaciones de los nodos V_1, V_2, V_4 y del supernodo se encuentran a continuación en el orden respectivo.

$$I_1 + \frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_4 - V_1}{R_2} = 0$$

$$\alpha I_x = \frac{V_2 - V_4}{R_3} + \frac{V_x}{R_1}$$

$$\frac{V_4 - V_2}{R_3} + \frac{V_4 - V_3}{R_5} + \beta V_x + \alpha I_x + \frac{V_4 - V_5}{R_6} + \frac{V_4 - V_1}{R_2} = 0$$

$$(I_1 + \frac{V_3 - V_4}{R_5}) + (\frac{V_5 - V_4}{R_6} - \beta V_x) = 0$$

Luego, despejamos los voltajes de cada nodo, teniendo en cuenta que V_x e I_x son variables dependientes, donde se cumple que:

$$V_x = V_2 - V_1 \qquad I_x = \frac{V_1 - V_4}{R_2}$$

Teniendo en cuenta todas la ecuaciones anteriores, podemos establecer la matriz de ecuaciones a continuación.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} + \frac{-1}{R_3} & 0 & \frac{-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_3} & 0 \\ -\beta & \beta & \frac{-1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6} \\ \beta + \frac{\alpha - 1}{R_2} & \frac{-1}{R_3} - \beta & \frac{-1}{R_5} & \frac{1-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ V_\mu \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos reducir la matriz, despejando V_3 en la ecuación del supernodo, es decir, $V_3 = V_\mu + V_5$. Con esto obtenemos la matriz reducida para el problema.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} + \frac{-1}{R_3} & \frac{-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_3} & 0 \\ -\beta & \beta & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6} + \frac{-1}{R_5} \\ \beta + \frac{\alpha - 1}{R_2} & \frac{-1}{R_3} - \beta & \frac{1-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & \frac{-1}{R_6} + \frac{-1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_1 + \frac{V_\mu}{R_5} \\ \frac{V_\mu}{R_5} \end{bmatrix}$$

(b) Por simple inspección

$$I_\alpha = \frac{V_4 - V_2}{R_3} \qquad V_\alpha = V_1 - V_3$$

Luego, podemos calcular V_β mediante caída de tensión.

$$V_\beta = (V_4 - \alpha I_x \cdot R_8) - V_2 = V_4(1 + \alpha \cdot \frac{R_8}{R_2}) - \alpha V_1 \frac{R_8}{R_2}$$

(c) Para calcular la potencia suministrada por la fuente, debemos encontrar primero el valor de la corriente que circula a través de la fuente. Aplicando Kirchhof podremos obtener el resultado pedido. Cabe destacar que existen dos soluciones igualmente válidas según el nodo en que se aplique la ley. Este podría ser el de entrada o el de salida de la fuente (cuidado con el sentido de la corriente).

1. Aplicando KCL en el nodo V_3:

$$I_\mu = \frac{V_3 - V_4}{R_5} + \frac{V_3 - V_5}{R_4} + I_1$$

2. Aplicando KCL en el nodo V_5:

$$I_\mu = \frac{V_3 - V_5}{R_4} + \frac{V_4 - V_5}{R_6} + \beta(V_2 - V_1)$$

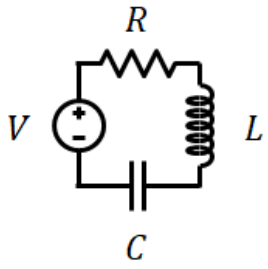
Con esto, podemos deducir la potencia suministrada, donde I_μ corresponde a alguna de las expresiones anteriores.

$$P_\mu = V_\mu \cdot I_\mu$$

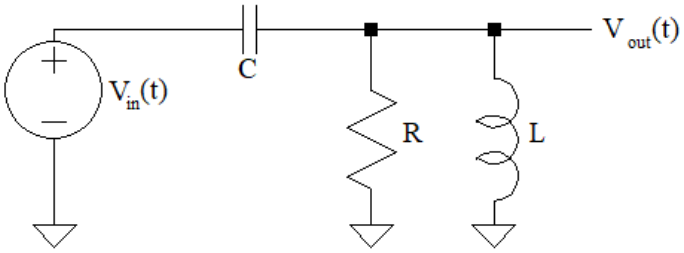
Problema 2 (15 puntos)

(a) (3 puntos) Demuestre matemáticamente que la energía almacenada en el tiempo t por un inductor de inductancia L y corriente $i_L(t)$ está dada por $L\, i_L(t)^2/2$. Hint: integre la potencia absorbida por el inductor.

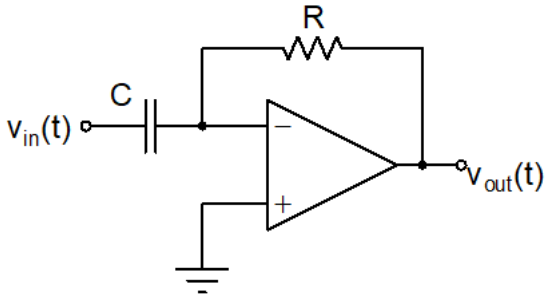
(b) (3 puntos) Considere el circuito RLC en serie de la figura siguiente. Asuma que la fuente de voltaje entrega un voltaje V constante para todo $t \geq 0$. Encuentre y justifique la ecuación diferencial que modela la corriente a través del inductor para todo $t \geq 0$.



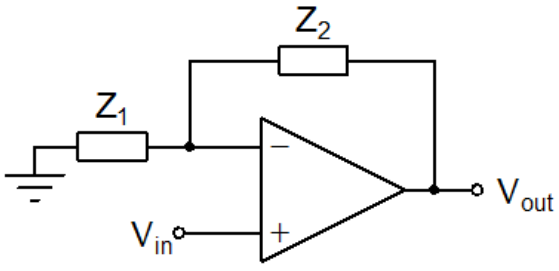
(c) (3 puntos) Calcule la función de transferencia para el circuito siguiente.



(d) (3 puntos) Para el circuito siguiente calcule $v_{out}(t)$, bajo el supuesto que $v_{in}(t) = \sin(\omega t)$ (de forma explícita, en función del tiempo).



(e) (3 puntos) Para el circuito siguiente, demuestre que $V_{out} = (1 + Z_2/Z_1)V_{in}$. Además responda qué funcionalidad tiene este circuito cuando $Z_1 = \infty$.



Solución:

(a) La potencia está dada por:$P = I_L \cdot V_L$ y como el voltaje de un inductor está dado por $L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$ entonces:

$$E = L\int_0^t i_L(t) \cdot \frac{di_L(t)}{dt}dt = L\Big(\frac{i_L(t)^2}{2} - \frac{i_L(0)^2}{2}\Big) = L\frac{i_L(t)^2}{2}$$

(b) Los tres elementos pasivos se encuentran en serie, luego considerando la cada de voltaje de cada elemento, en el dominio de la frecuencia, tenemos:

$$V = R \cdot i + Ls \cdot i + \frac{i}{Cs}$$

$$Vs = R \cdot i \cdot s + Ls^2 \cdot i + \frac{i}{C}$$

Transformando al dominio del tiempo:

$$\frac{dV(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{di^2(t)}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

Como el voltaje V es constante para todo $t \geq 0$, entonces $\frac{dV(t)}{dt} = 0$, luego:

$$L\frac{di^2(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

(c) En Laplace y por divisor de Voltaje:

$$V_{out} = V_{in}\frac{R||Ls}{R||Ls + 1/(Cs)}$$

desarrollando:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H(s) = \frac{s^2CLR}{s^2CLR + Ls + R}$$

(d) Al ser OpAmp ideal, las entradas están en cortocircuito virtual, realimentación negativa y además las entradas del OpAmp tienen impedancia de entrada infinita, Entonces por nodos:

$$\frac{0 - V_{out}}{R} = i_c = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$V_{out} = -RC\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Como V_c es igual a $V_{in} - 0$, entonces reemplazando y derivando:

$$V_{out} = -RCcos(\omega t)\omega$$

(e) Al ser ideal hay retroalimentación negativa, impedancia de entrada infinita y cortocircuito virtual. Por nodos:

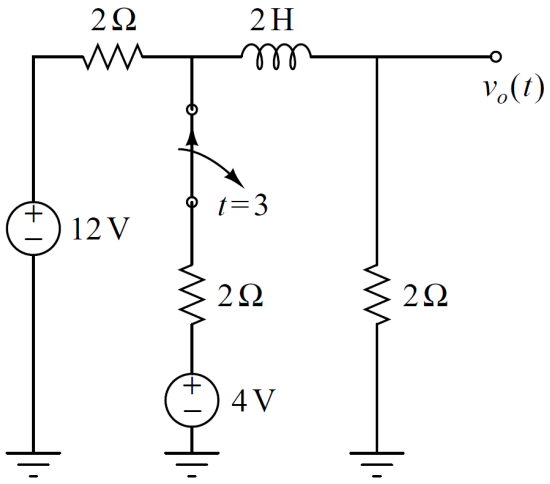
$$\frac{V_{in} - 0}{Z_1} + \frac{V_{in} - V_{out}}{Z_2} = 0$$

$$V_{out} = V_{in}\Big(Z_1 + Z_2\Big)\frac{1}{Z_1} = V_{in}\Big(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\Big)$$

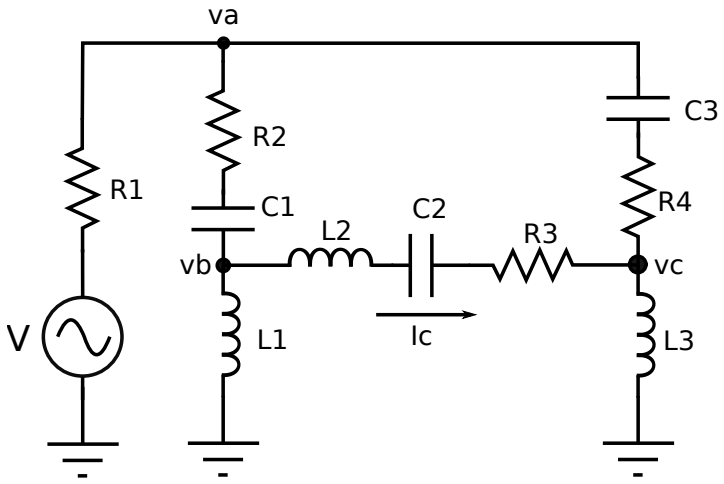
Al ser $Z_1 = \infty$ ocurre que $V_{out} = V_{in}$ por lo tanto actúa como buffer de voltaje.

Problema 3 (15 puntos)

(a) (7 puntos) Considere el circuito siguiente, en el cual el interruptor opera en $t = 3$. Además, asuma que en $t = 0$ el circuito se encuentra estabilizado. Encuentre el voltaje de salida $v_o(t)$ para $0 < t < 10$.



(b) (8 puntos) Considere el circuito siguiente, el cual opera en régimen sinusoidal permanente. Establezca relaciones necesarias y suficientes entre las resistencias, inductancias y capacitancias del circuito para que la corriente I_c sea nula.



Solución:

(a) Para $t < 3$:

Dado que el circuito se encuentra estabilizado, podemos considerar que el inductor se comporta como un cortocircuito. Luego, por superposición podemos encontrar el voltaje $V_o(t) = 16/3$ V y por consecuencia, la corriente que circula por el inductor antes de que se abra el interruptor es de $I_L(t) = 8/3$ A.

Para $t \geq 3$:

Ahora eliminamos la fuente de 4 V junto con su resistencia en serie y planteamos la ecuación de malla del circuito:

$$12 - 2I_L(t) - 2\frac{dI_l(t)}{dt} - 2I_L(t) = 0$$

La ecuación diferencial queda:

$$\frac{dI_l(t)}{dt} + 2I_L(t) = 6$$

Resolviendo y aplicando la condición inicial de corriente $I_L(3) = 8/3$ A.

$$I_L(t) = \frac{-1}{3}e^{-2(t-3)} + 3$$

El voltaje $V_o(t)$ esta dado por la caída de tensión de la resistencia de 2 Ω, luego:

$$V_o(t) = \frac{-2}{3}e^{-2(t-3)} + 6$$

Finalmente el voltaje $V_o(t)$ es:

$$V_o(t) = \begin{cases} t < 3 & 16/3 \\ t \geq 3 & \dfrac{-2}{3}e^{-2(t-3)} + 6 \end{cases}$$

(b) Para que la corriente I_c sea nula, es necesario que $v_c = v_b$. Además, si se cumple esa condición entonces los componentes L_2, C_2 y R_3 no tienen relevancia en el análisis dado que no circula corriente por ellos. Buscamos entonces los valores de los voltajes v_c y v_b que se obtienen por un divisor de tensión del voltaje v_a:

$$v_b = \frac{v_a s^2 L_1 C_1}{s^2 L_1 C_1 + sR_2 C_1 + 1}$$

$$v_c = \frac{v_a s^2 L_3 C_3}{s^2 L_3 C_3 + sR_4 C_3 + 1}$$

Igualando estas expresiones para que se cumpla la condición de I_c nula llegamos a:

$$\frac{L_1 C_1}{s^2 L_1 C_1 + sR_2 C_1 + 1} = \frac{L_3 C_3}{s^2 L_3 C_3 + sR_4 C_3 + 1}$$

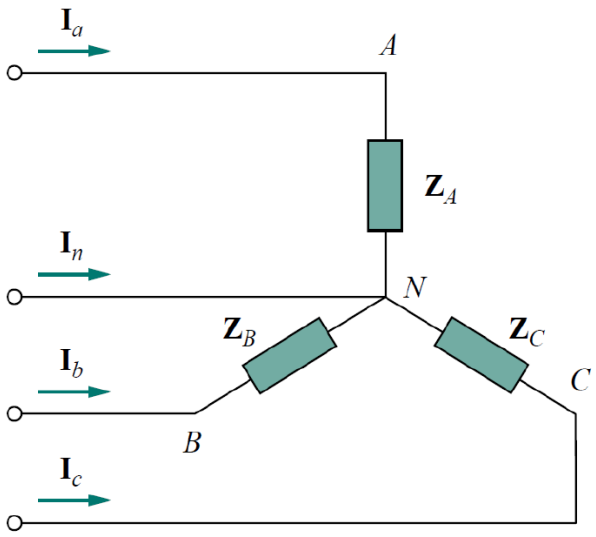
Si desarrollamos e igualamos las partes real e imaginaria de cada expresión llegamos a:

$$L_1 C_1 = L_3 C_3$$

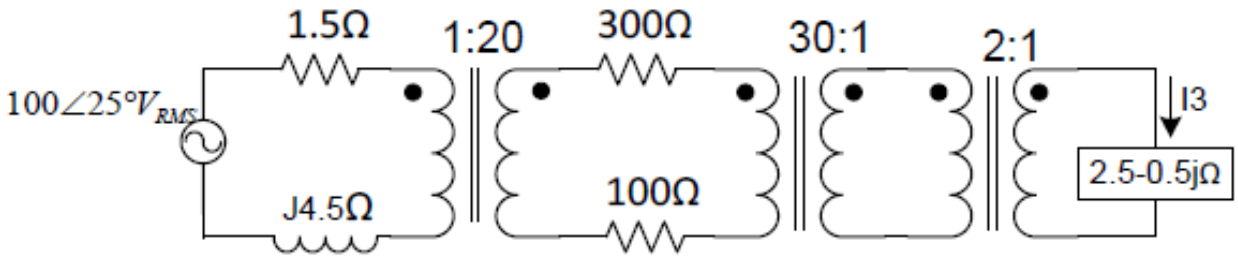
$$L_1 R_4 = L_3 R_2$$

Problema 4 (15 puntos)

(a) (7 puntos) Considere que se conecta una fuente balanceada a una carga trifásica con configuración en estrella desbalanceada. Las fuente es de secuencia negativa (acb) y tiene voltaje entre fases de $350\,V_{rms}$. Considerando lo anterior, determine las corrientes de línea (I_a, I_c, I_c) y del neutro (I_n) considerando los valores de las impedancias $Z_A = 15\,\Omega$, $Z_B = 10 + j5\,\Omega$ y $Z_C = 6 - j8\,\Omega$.



(b) (8 puntos) Considere el circuito con transformadores ideales mostrado a continuación:

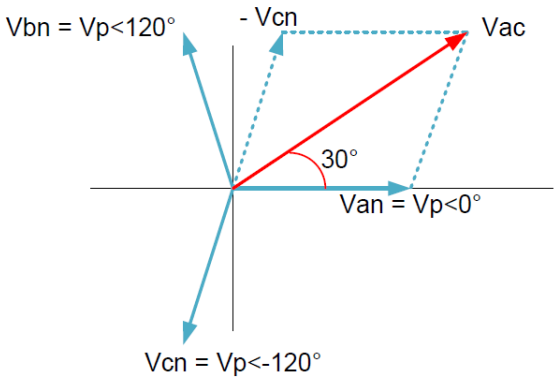


(i) (6 puntos) Determine el circuito equivalente referido al lado de la carga de $2.5 - j0.5\,\Omega$.

(ii) (2 puntos) Calcule la potencia real consumida por la carga de $2.5 - j0.5\,\Omega$.

Solución:

(a) Como se menciona la secuencia es negativa (acb) y se da el voltaje entre fases, por lo tanto, recurriendo a un diagrama fasorial se puede establecer la relación entre voltajes entre fases y voltaje fase-neutro que es el que se requiere.



Si se considera el voltaje entre fases con ángulo 0° se rota el diagrama en 30° hacia abajo. Con ello se tiene:

$$V_{an} = \frac{V_{ac}}{\sqrt{3}} \angle -30° \rightarrow V_{an} = \frac{350\angle 0°}{\sqrt{3}} \angle -30° = 202.07\angle -30° V$$

y por lo tanto: $V_{cn} = 202.07\angle -150° V$ y $202.07\angle -270° V$
Entonces como los $V_{an} = V_{AN}$, las corrientes quedan definidas de la siguiente forma:

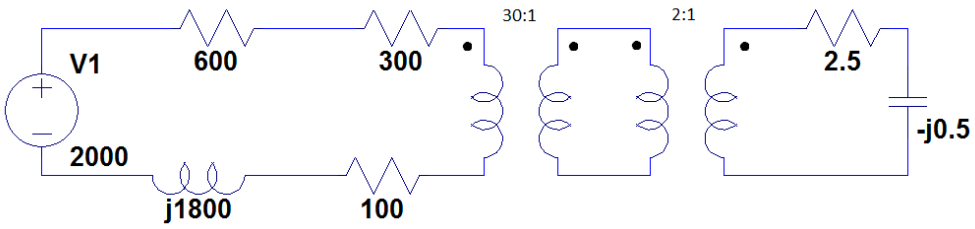
$$I_a = \frac{V_{AN}}{15} = \frac{202.07\angle -30°}{15} = 13.47\angle -30° A$$

$$I_c = \frac{V_{CN}}{6 - j8} = \frac{202.07\angle -150°}{10\angle -53013°} = 20.21\angle -96.87° A$$

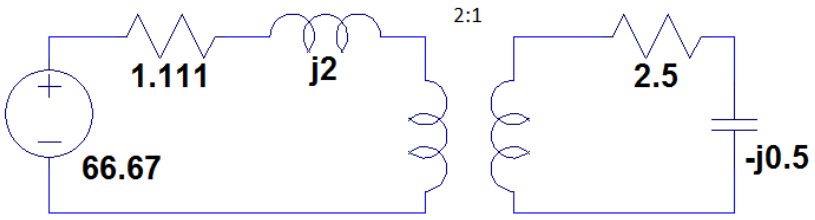
$$I_b = \frac{V_{BN}}{10 - j5} = \frac{202.07\angle -270°}{10 + j5} = 18.07\angle -296.56° A$$

$$I_N = -(I_a + I_b + I_c) = 19.91\angle 158.55°$$

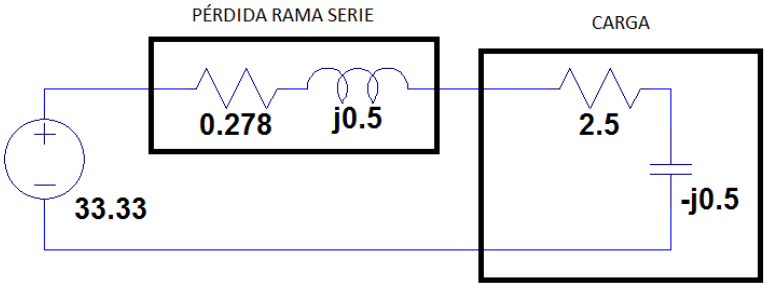
(b) (i) Primero, consideramos la razón de transformación $a = 20$ para referir el circuito de más a la izquierda a su respectivo lado de alta, por lo tanto, $V = 2000\angle 25°$ y las impedancias son $1.5\Omega \cdot a^2 = 600\Omega$ y $j4.5 \cdot a^2 = j1800$.



Luego observamos que la siguiente razón de transformación es $a = \frac{1}{30}$, por lo tanto, el voltaje será $66.67\angle 25°$ y la impedancia serie equivalente $(600 + 300 + 100 + j1800) \cdot a^2 = 1.111 + j2\Omega$.



Finalmente, se toma $a = \frac{1}{2}$ y se refiere el último transformador al secundario, por lo tanto $V = 66.67\angle 25° \cdot a = 33.33\angle 25°$ y la impedancia referida es $1.111 + j2\Omega \cdot a^2 = 0.278 + j0.5\Omega$. Por lo tanto, el circuito equivalente queda como la siguiente imagen:



(ii) Para calcular la potencia, primero calculamos que la corriente que circula por el circuito es $I = \frac{3.33\angle 25°}{0.278+2.5+j0.5-j0.5} = 12\angle 25° A$. Entonces, el voltaje en la carga será el siguiente:

$$V_L = I \cdot (2.5 - j0.5) = 30.59\angle 13.69°$$

Finalmente, calculamos la potencia aparente consumida por la carga:

$$S = V \cdot I^* = 360 - j72VA$$

Por lo tanto, la potencia que consume la carga es $P = 360W$