Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos

Tarea Interrogación 2

1º semestre 2023 - Profesor David Watts

Ayudante: Elena Contardo (ele.contardo@uc.cl)

- La tarea debe ser subida en formato .pdf a Canvas al buzón correspondiente.
- Para su solución se puede apoyar de las respuestas de los ejercicios.
- NO es posible utilizar un comodín para poder entregar la tarea 3 días después del plazo final.
- No se aceptan tareas con letra ilegible.

Problema 1

El circuito de la figura se encuentra operando por mucho tiempo cuando en $t_0 = 0$ el interruptor se abre.

a) Determine paso a paso la ecuación diferencial que modela la corriente del inductor del circuito para $t > 0$ y las condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación.

b) Para $t > 0$, considerando un valor de $L = 0{,}5$ [H], determine paso a paso los valores (o condiciones) de R_2, R_3 y C para obtener una respuesta natural del circuito con $\omega_0 = 10$ [rad/s] y una respuesta subamortiguada.

c) Con los valores (o condiciones) encontrados en el ítem anterior y eligiendo $\zeta = 0{,}9$, encuentre la corriente $i(t)$ resolviendo la ecuación diferencial (considere $R_1 = R_3 = 3$ [Ω]).

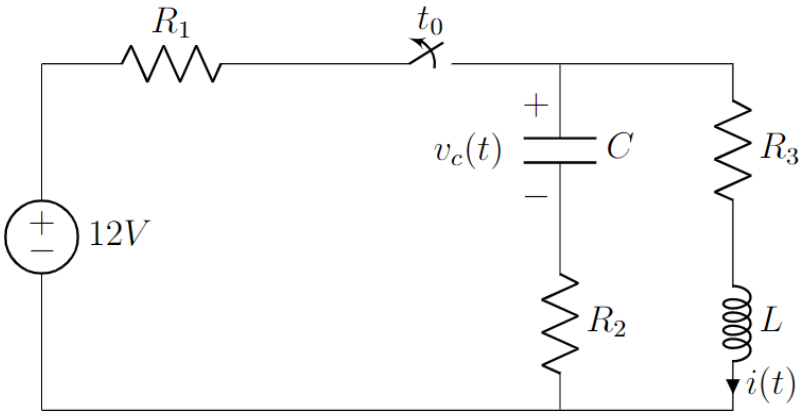


Figura 1: Circuito de segundo orden

Solución:

a) Planteamos la ecuación de malla para $t > 0$:

$$v_C(t) + v_L(t) + i_L(t)(R_2 + R_3) = 0$$

Notamos que,

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Derivamos a ambos lados y obtenemos,

$$\frac{i_C(t)}{C} + L\frac{di_L^2(t)}{dt^2} + \frac{di_L(t)}{dt}(R_2 + R_3) = 0$$

Como $i_C(t) = i_L(t)$

$$\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{di_L(t)}{dt}\frac{(R_2 + R_3)}{L} + \frac{i_L(t)}{LC} = 0$$

Para las condiciones iniciales sabemos que después de mucho tiempo operando en $t < 0$ el capacitor se comporta como un circuito abierto, mientras que el inductor se comporta como un cortocircuito, por lo que:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12\frac{R_3}{R_3 + R_1}$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{12}{R_3 + R_1}$$

b) De la ecuación diferencial obtenemos el polinomio característico:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 0{,}02\ F$$

Como necesitamos que $\zeta < 1$, para que la respuesta sea subamortiguada:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{(R_2 + R_3)}{L}$$

$$R_2 + R_3 < 10$$

c) Encontramos las raíces del polinomio característico.
Reemplazando:

$$s^2 + 18s + 100 = 0$$

$$s = \frac{-18 \pm \sqrt{-76}}{2} = -9 \pm j4{,}36$$

De esta forma:

$$i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4{,}36t + A_2 \sin(4{,}36t))$$

$$i(0) = A_1 = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -9A_1 + 4{,}36A_2 = \frac{V_L(0^+)}{L}$$

Sabemos que el voltaje $V_L(0^+) = V_C(0) - i_L(0)(R_2 + R_3) = 12\frac{3}{6} - 2 * 9 = -12$, entonces:

$$A_2 = \frac{-12 * 2 + 18}{4{,}36} = -1{,}38$$

$$i(t) = e^{-9t}(2 \cos 4{,}36t - 1{,}38 \sin 4{,}36t)$$

Problema 2

Considere el circuito de la figura operando en régimen sinusoidal permanente. Calcule el voltaje en el inductor, expresado mediante un único fasor polar (magnitud y fase).

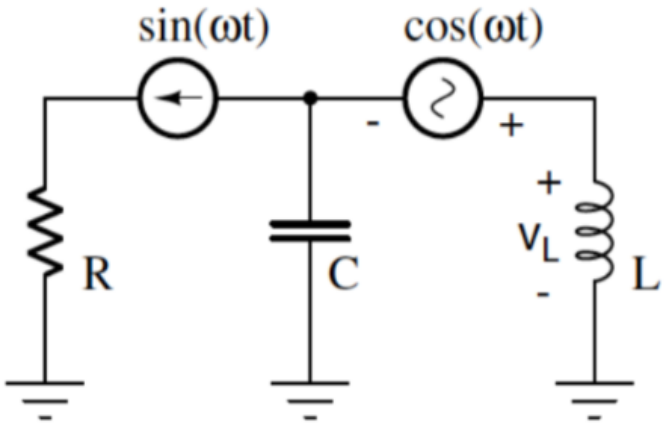


Figura 2: Resistencia equivalente

Solución:

En primer lugar, pasaremos el circuito al dominio de la frecuencia considerando las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} V_{in} &= 1\angle 0 = 1 \\ I_{in} &= 1\angle -90 = -j \\ L &\to j\omega L \\ C &\to \frac{1}{j\omega C} \\ R &\to R \end{aligned}$$

Hay dos posibles métodos para resolver este problema:

Método 1: Superposición

Por superposición: $V_L = V_L|_{I_{in}=0} + V_L|_{V_{in}=0}$

$$V_L|_{I_{in}=0} = \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} V_{in}$$

$$V_L|_{V_{in}=0} = -I_{in} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} j\omega L$$

Método 2: Mallas

Si se definen las siguientes mallas:

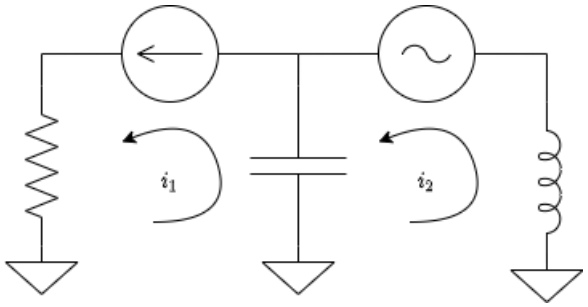


Figura 3: Mallas circuito

$$i_1 = -j$$
$$0 = 1 + (i_2 - i_1)\frac{1}{j\omega C} + i_2 j\omega L$$

Luego, operando podemos obtener:

$$i_2 = j\frac{1 + \frac{1}{\omega C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

Finalmente, se puede plantear que

$$V_L = -j\omega L i_2$$

Así, sea cual sea el método, obtenemos

$$V_L = \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}(V_{in} - \frac{I_{in}}{j\omega C}) = \frac{\omega L}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}(1 - \frac{-j}{j\omega C})$$

Ahora, notar que la solución siempre es real, pero si $\omega^2 LC < 1$, la impedancia es negativa, por lo tanto.

$$V_L = \begin{cases} \frac{\omega^2 LC + \omega L}{\omega^2 LC - 1}\angle 0 & \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{\omega^2 LC + \omega L}{1 - \omega^2 LC}\angle -180 & \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

Problema 3

Para el circuito de la figura:

a) Calcule la potencia aparente, activa, reactiva y compleja de cada carga en paralelo. Además, determine el factor de potencia de cada una.

b) Calcule la potencia aparente, activa, reactiva y compleja del equivalente de ambas cargas en paralelo. Además, encuentre el factor de potencia equivalente.

c) Calcula la corriente de línea I y el voltaje que reciben las cargas.

d) Realice el balance de potencia aparente, activa, reactiva y compleja del conjunto generador, linea y cargas.

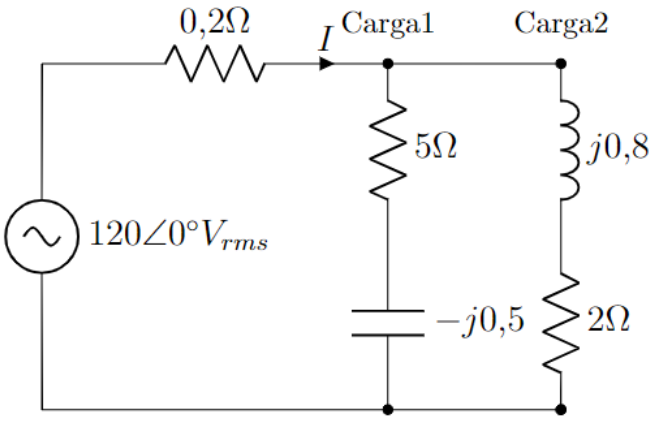


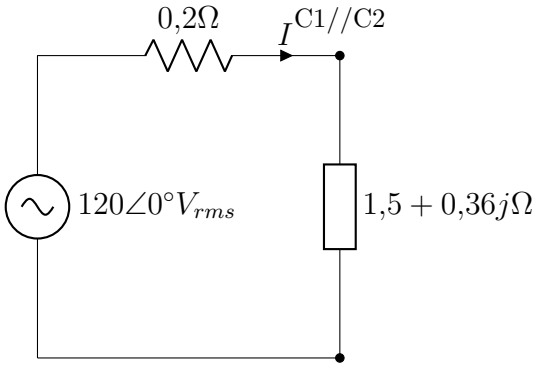
Figura 4: Red eléctrica

Solución:

a) Podemos obtener un equivalente para las cargas en paralelo:

$$Z_{eq} = (5 - 0{,}5j)//(2 + 0{,}8j) = 1{,}5 + 0{,}36j\Omega$$

El circuito queda:



La corriente de linea será:

$$I = \frac{120}{0{,}2 + 1{,}5 + 0{,}36j\Omega} = 69{,}06\angle -11{,}96°$$

Y el voltaje que reciben las cargas es:

$$V_c = I \cdot Z_{eq} = 106{,}53\angle 1{,}54°V_{rms}$$

Así, las potencia que poseen las cargas son:

Carga 1:

$$S_1 = \frac{||V_c||^2}{(5 - 0{,}5j\Omega)^*} = 2247{,}25W - j224{,}73VAr$$

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_1}{P_1}\right) = 0{,}995$$

$$P_1 = 2247{,}25W \qquad Q_1 = -224{,}73VAr \qquad ||S_1|| = 2258{,}46VA$$

Carga 2:

$$S_2 = \frac{||V_c||^2}{(2 + 0{,}8j\Omega)^*} = 4891{,}66W + j1956{,}7VAr$$

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_2}{P_2}\right) = 0{,}928$$

$$P_2 = 4891{,}66W \qquad Q_2 = 1956{,}7VAr \qquad ||S_2|| = 5268{,}49VA$$

b) Del resultado anterior se desprende que la potencia compleja de las cargas en paralelo es:

$$S_T = S_1 + S_2 = 7138{,}8W + j1731{,}97VAr$$

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_T}{P_T}\right) = 0{,}972$$

$$P_T = 7138{,}8W \qquad Q_t = 1731{,}97VAr \qquad ||S_T|| = 7345{,}9VA$$

c) La corriente de línea será:

$$I = \frac{120}{0{,}2 + 1{,}5 + 0{,}36j\Omega} = 69{,}06\angle - 11{,}96^\circ$$

Y el voltaje que reciben las cargas es:

$$V_c = I \cdot Z_{eq} = 106{,}53\angle 1{,}54^\circ V_{rms}$$

d) Para realizar balance de potencia solo nos falta la potencia suministrada por el generador y consumida por la línea.

Para el generador:

$$S_G = 120 * I^* = 120 * (69{,}06\angle 11{,}96^\circ) = 8287{,}2\angle 11{,}96^\circ = 8107{,}3W + j1717{,}35VAr$$

Para la linea:

$$S_L = ||I||^2 \cdot Z_L = (69{,}06)^2 \cdot 0{,}2\Omega = 953{,}86W + j0VAr$$

$$P_G = 8107{,}3W \qquad Q_G = 1717{,}35VAr$$

$$P_L = 953{,}86W \qquad Q_L = 0VAr$$

$$P_1 = 2247{,}25W \qquad Q_1 = -224{,}73VAr$$

$$P_2 = 4891{,}66W \qquad Q_2 = 1956{,}7VAr$$

Problema 4

Un circuito trifásico de secuencia positiva, con voltaje $V_{ab} = 380\angle 0^o$V funcionando en Chile alimenta una barra con dos consumos trifásicos en paralelo, a través de una línea de transmisión de impedancia por fase $Z_L = 0{,}02 + j0{,}12\Omega$.

- Carga 1: Tres impedancias $Z_1 = 6 + j5\Omega$ conectadas en estrella.
- Carga 2: Tres impedancias $Z_2 = 10 + j10\Omega$ conectadas en delta.

A continuación:

a) Calcule el voltaje de línea en la carga total y la potencia real que consume.

b) Calcule la capacitancia de los condensadores en configuración estrella que se deben de instalar en paralelo con las cargas para conseguir un factor de potencia neto unitario.

c) Calcule el voltaje de línea en la carga una vez instalados los capacitores del inciso anterior.

Solución:

a) Al ser un sistema balanceado se puede trabajar con una sola fase, donde por simplicidad se usará la fase a.

Se calcula el voltaje fase neutro de la fuente a.

$$V_a = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}\angle 30^\circ} = \frac{380\angle 0^\circ V}{\sqrt{3}\angle 30^\circ} = 219{,}4\angle -30^\circ V$$

Se realiza un divisor de tensión conociendo los siguientes valores:

$$Z_L = 0{,}02 + j0{,}12\Omega \qquad Z_{eq} = Z_1^Y // \frac{Z_2^\Delta}{3} = 2{,}15 + j2 = 2{,}94\angle 43^\circ\Omega$$

$$Z_L + Z_{eq} = 2{,}17 + j2{,}12 \qquad \frac{Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}} = 0{,}968 - j0{,}0236$$

$$= 3{,}034\angle 44{,}3^\circ \qquad = 0{,}968\angle -1{,}4^\circ\Omega$$

Finalmente, el voltaje de línea en la carga es:

$$\begin{aligned}
V_{AB} &= V_A \cdot (\sqrt{3}\angle 30°) = V_a \frac{Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}} \cdot (\sqrt{3}\angle 30°) = 212{,}37\angle -31{,}4°V \cdot (\sqrt{3}\angle 30°) \\
&= 367{,}83\angle -1{,}4°V = 367{,}72 - j8{,}99 \approx 367{,}83\angle 0°V \\
V_{BC} &\approx 367{,}83\angle -120°V \\
V_{CA} &\approx 367{,}83\angle 120°V
\end{aligned}$$

Luego, la potencia real puede ser calculada a partir de la potencia aparente. Cada una de las cargas en estrella consumen la misma potencia al igual que como las cargas en delta consumen la misma potencia. Así, la potencia aparente total del sistema trifásico será:

$$\begin{aligned}
S_{3\Phi} &= 3\frac{||V_A||^2}{Z_{1Y}^*} + 3\frac{||V_{AB}||^2}{Z_{2\Delta}^*} \\
&= 3\frac{(212{,}37V)^2}{(6 - j5)} + 3\frac{(367{,}83V)^2}{(10 - j10)} \\
&= 33603{,}33W + 31385{,}25VAr
\end{aligned}$$

Así, la potencia real consumida por el sistema es $33603{,}33W$.

b) Como cada capacitor se conecta a solo una fase necesitamos conocer la potencia aparente de 1Φ. Esta es:

$$S_{1\Phi} = \frac{S_{3\Phi}}{3} = 11201{,}11W + 10461{,}75VAr$$

Por lo tanto, la variación de potencia aparente será $\Delta Q = -j10461{,}75$. Así, tenemos la siguiente relación:

$$\Delta Q = -j10461{,}75 = \frac{||V_A||^2}{Z_c^*} \rightarrow Z_c = -j4{,}31$$

La otra relación que necesitamos conocer es:

$$\begin{aligned}
Z_c = -j4{,}31 &= \frac{1}{j2\pi fC} = \frac{1}{j2\pi(50Hz)C} \\
\rightarrow C &= 738{,}54\mu F
\end{aligned}$$

c) Al agregar el capacitor solo cambia la impedancia Z_{eq} anterior. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
Z_{eq} &= Z_1^Y // \frac{Z_2^\Delta}{3} // Z_c = 4{,}026j0{,}00083\Omega \\
V_{AB} &= V_a \frac{Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}} \cdot (\sqrt{3}\angle 30°) = 210,22\angle -31,70°V(\sqrt{3}\angle 30°) \\
&= 377{,}97\angle -1,70°V \approx 377{,}97\angle 0°V \\
V_{BC} &\approx 377{,}97\angle -120°V \\
V_{CA} &\approx 377{,}97\angle 120°V
\end{aligned}$$