Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2123 - Circuitos Eléctricos
Profesor Samuel Córdova
Segundo Semestre 2022

# Interrogación 1

## Instrucciones

- Poner nombre y número de lista en cada hoja.
- Resolver cada Problema en un conjunto diferente de hojas.
- No se permite utilizar apuntes de ningún tipo ni calculadora.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error en el enunciado o algo ambiguo, explique por qué y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas

## Problema 1 (35 puntos)

(a) (15 puntos) Defina y explique los siguientes conceptos en el contexto de circuitos eléctricos: voltaje, corriente, resistor, capacitor, e inductor. Utilize la analogía con el agua en su explicación.

(b) (10 puntos) Utilizando solamente la Ley de Ohm y Leyes de Kirchoff, explique y demuestre los principios de Divisor de Voltaje y Divisor de Corriente.

(c) (10 puntos) Mencione una aplicación práctica para cada uno de los siguientes conceptos:

- Teorema de Superposición
- Equivalentes Circuitales (e.g., Helmholtz-Thevenin)
- Método de Nodos
- Análisis de Régimen Transitorio.

## Solucion:

(a) A continuación se listan las definiciones:

- Voltaje: corresponde a la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos. De esta forma, se puede entender como el cambio de trabajo/energía ($dW$) requerido para mover una carga unitaria ($dq$) de un punto a otro dentro de un cierto campo electrostático:

$$v(t) = \frac{dW(t)}{dq(t)}$$

  El voltaje se mide en Volts. En el contexto de analogía con el agua, este puede ser entendido como la diferencia de energía potencial gravitatoria resultante de una diferencia de altura.

- Corriente: corresponde a la cantidad carga eléctrica ($dq$) que circula a través de la sección transversal de un material conductor en un determinado intervalo de tiempo ($dt$):

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

  La corriente se mide en Amperes. En el contexto de analogía con el agua, esta puede ser entendida como el caudal de flujo (e.g., litros por segundo).

- Resistor: componente eléctrico que se opone (o resiste) al flujo de corriente eléctrica, disipando energía en forma de calor en el proceso. Este puede ser caracterizada por la Ley de Ohm:

$$V = R \cdot I$$

  La resistencia de mide en Ohms. En el contexto de analogía con el agua, esta puede ser entendida como la oposición al flujo de agua, la cual resultaría de reducir el tamaño de la tubería por la que fluye el agua.

- Capacitor: Componente eléctrico que almacena energía en forma de carga eléctrica. Consiste en dos placas en paralelo separadas por un dieléctrico. Su relación voltaje-corriente esta descrita por:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

  La capacitancia se mide en Farads. En el contexto de analogía con el agua, un capacitor puede ser entendido como un tanque de agua.

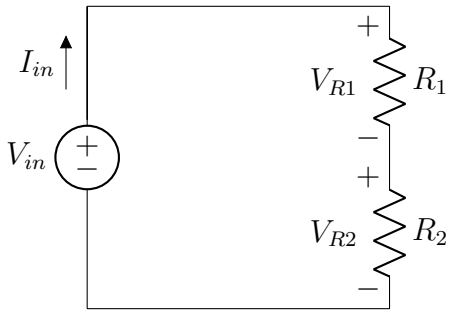
- Inductor: Componente eléctrico que almacena energía en forma de campo magnético. Consiste en un cable enrollado en forma de bobina alrededor de algún material. Su relación voltaje-corriente esta descrita por:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

  La inductancia se mide en Henrys. En el contexto de analogía con el agua, un inductor puede ser entendido como una rueda hidráulica.

(b) A continuación se demuestran ambos principios:

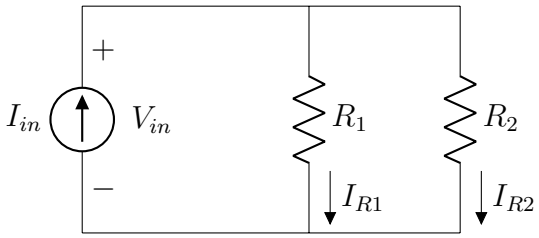
- Divisor de voltaje:




$$V_{R1} = R_1 I_{in} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{in}$$
$$V_{R2} = R_2 I_{in} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

De esta forma, el divisor de voltaje indica como el voltaje total ($V_{in}$) se distribuye entre dos resistores conectados en serie.

- Divisor de corriente:




$$I_{in} = I_{R1} + I_{R2} = \frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{in}}{R_2} \rightarrow V_{in} = I_{in}(R_1 || R_2)$$

con $R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Luego, tenemos que:

$$I_{R1} = \frac{V_{in}}{R_1} = I_{in} \frac{R_1 || R_2}{R_1} = I_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$I_{R2} = \frac{V_{in}}{R_2} = I_{in} \frac{R_1 || R_2}{R_2} = I_{in} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

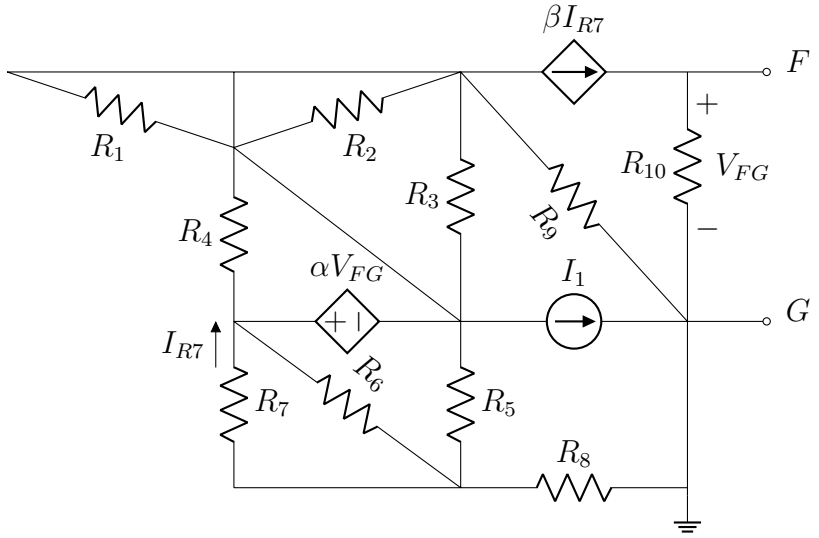
De esta forma, el divisor de corriente indica como la corriente total ($I_{in}$) se distribuye entre dos resistores conectados en paralelo.

(c) A continuación se listan ejemplos de aplicaciones prácticas:

- Teorema de Superposición: resolución simplificada de circuitos con cientos de excitaciones, cálculo de sensibilidades respecto a excitaciones, derivación Teoremas de Thevenin y Norton.
- Equivalente Circuitales: simplificación de circuitos lineales complejos, cálculo de corrientes de falla en sistemas de potencia, conversion Thevenin/Norton para simplificar resolución de circuitos, demostración Teorema de Millman.
- Método de Nodos: automatización del proceso de resolución de circuitos lineales (software computational).
- Análisis de Régimen Transitorio: cálculo de corrientes máximas de circuitos, cálculo de tiempos de respuesta de circuitos.

# Problema 2 (35 puntos)

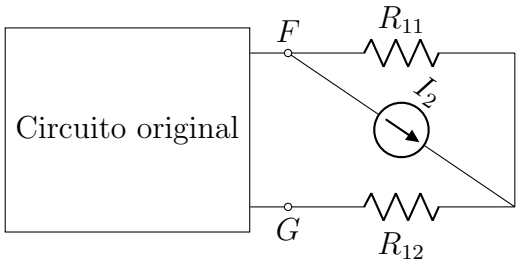
Considere el siguiente circuito con terminales de salida F y G:




(a) (20 puntos) En base al circuito anterior, determine el sistema de ecuaciones de la forma $A\,v = b$ usando el Método de Nodos.

(b) (5 puntos) Asumiendo que conoce los voltajes en todos los nodos, determine la potencia disipada por los resistores $R_1$ y $R_3$.

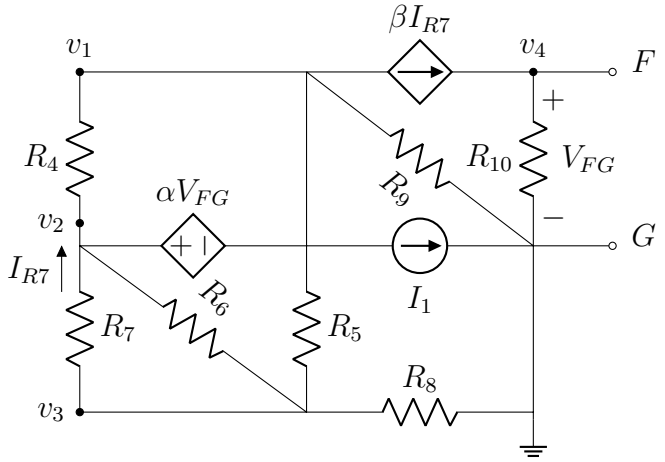
(c) (10 puntos) Considere que ahora un par de resistores y una fuente de corriente independiente son conectadas a los terminales F y G del circuito original, resultando en:




Determine el sistema de ecuaciones actualizado $\bar{A}\,\bar{v} = \bar{b}$ del nuevo circuito, y explique las similitudes/diferencias respecto al sistema $A\,v = b$ obtenido en el punto (a).

## Solucion:

(a) Primero notamos la presencia de cortocircuitos entre los terminales de las resistencias $R_1$, $R_2$, $R_3$. De esta forma, el circuito puede ser simplificado de la siguiente forma:




donde se definieron los nodos $v_1$, $v_2$, $v_3$ y $v_4$.

A continuación se listan las ecuaciones KCL para el supernodo ($v_1$ y $v_2$), nodo $v_3$, y nodo $v_4$, respectivamente:

$$\frac{v_2 - v_3}{R_7} + \frac{v_2 - v_3}{R_6} + \frac{v_1 - v_3}{R_5} + I_1 + \beta \underbrace{\frac{(v_3 - v_2)}{R_7}}_{I_{R7}} + \frac{v_1}{R_9} = 0$$

$$\frac{v_3 - v_2}{R_7} + \frac{v_3 - v_2}{R_6} + \frac{v_3 - v_1}{R_5} + \frac{v_3}{R_8} = 0$$

$$\frac{v_4}{R_{10}} - \beta \underbrace{\frac{(v_3 - v_2)}{R_7}}_{I_{R7}} = 0$$

Además, de la fuente de voltaje dependiente tenemos que $v_2 - v_1 = \alpha V_{FG} = \alpha v_4$, o alternativamente $v_1 = v_2 - \alpha v_4$. Reemplazando $v_1$ en las ecuaciones KCL de los nodos y agrupando los terminos:

$$\underbrace{(v_2 - \alpha v_4)}_{v_1}\left(\frac{1}{R_5||R_9}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_6||R_7} - \frac{\beta}{R_7}\right) + v_3\left(-\frac{1}{R_5||R_6||R_7} + \frac{\beta}{R_7}\right) = -I_1$$

$$\underbrace{(v_2 - \alpha v_4)}_{v_1}\left(-\frac{1}{R_5}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_6||R_7}\right) + v_3\left(\frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_8}\right) = 0$$

$$v_2\left(\frac{\beta}{R_7}\right) + v_3\left(-\frac{\beta}{R_7}\right) + v_4\left(\frac{1}{R_{10}}\right) = 0$$

Reordenando:

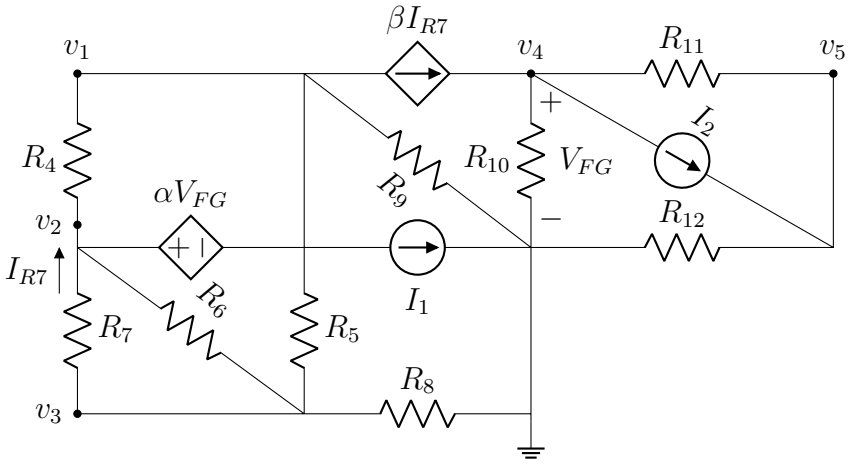
$$v_2\left(\frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_9}-\frac{\beta}{R_7}\right)+v_3\left(-\frac{1}{R_5||R_6||R_7}+\frac{\beta}{R_7}\right)+v_4\left(-\frac{\alpha}{R_5||R_9}\right)=-I_1$$
$$v_2\left(-\frac{1}{R_5||R_6||R_7}\right)+v_3\left(\frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_8}\right)+v_4\left(\frac{\alpha}{R_5}\right)=0$$
$$v_2\left(\frac{\beta}{R_7}\right)+v_3\left(-\frac{\beta}{R_7}\right)+v_4\left(\frac{1}{R_{10}}\right)=0$$

Y escribiendo en formato matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_9}-\frac{\beta}{R_7} & -\frac{1}{R_5||R_6||R_7}+\frac{\beta}{R_7} & -\frac{\alpha}{R_5||R_9} \\ -\frac{1}{R_5||R_6||R_7} & \frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_8} & \frac{\alpha}{R_5} \\ \frac{\beta}{R_7} & -\frac{\beta}{R_7} & \frac{1}{R_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Los resistores $R_1$ y $R_2$ tienen un cortocircuito en paralelo, por lo que no hay corriente que fluya a través de ellos. De esta forma, la potencia disipada por ambos resistores es igual a cero.

(c) La conexión adicional resulta en la incorporación de un nuevo nodo $v_5$, resultando en el siguiente circuito actualizado:




Las ecuaciones KCL referentes al supernodo ($v_1$ y $v_2$) y nodo $v_3$ no se ven afectadas. Sin embargo, es necesario actualizar las ecuación del nodo $v_4$ (cambios en azul) y añadir una ecuación para el nodo $v_5$:

$$v_2\left(\frac{\beta}{R_7}\right)+v_3\left(-\frac{\beta}{R_7}\right)+v_4\left(\frac{1}{R_{10}||R_{11}}\right)+v_5\left(-\frac{1}{R_{11}}\right)=-I_2$$
$$v_4\left(-\frac{1}{R_{11}}\right)+v_5\left(\frac{1}{R_{11}||R_{12}}\right)=I_2$$

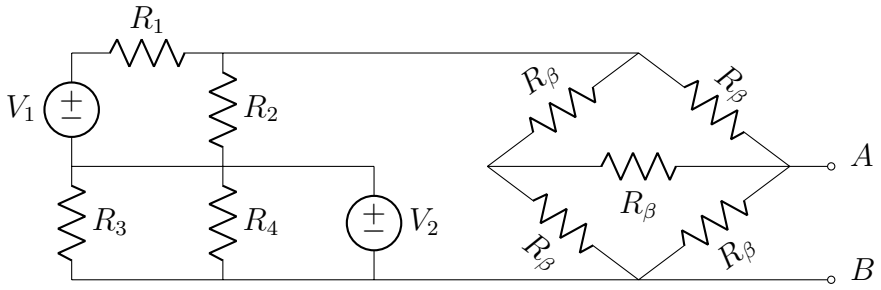
De esta forma, la matriz actualizada queda (cambios en azul):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_9}-\frac{\beta}{R_7} & -\frac{1}{R_5||R_6||R_7}+\frac{\beta}{R_7} & -\frac{\alpha}{R_5||R_9} & 0 \\ -\frac{1}{R_5||R_6||R_7} & \frac{1}{R_5||R_6||R_7||R_8} & \frac{\alpha}{R_5} & 0 \\ \frac{\beta}{R_7} & -\frac{\beta}{R_7} & \frac{1}{R_{10}||R_{11}} & -\frac{1}{R_{11}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{11}} & \frac{1}{R_{11}||R_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ -I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

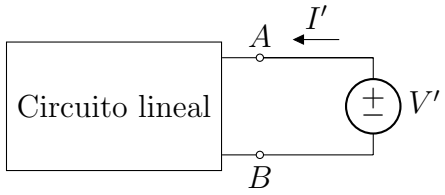
De esta forma, la nueva matriz $\bar{A}$ tiene 1 columna y 1 fila adicionales resultantes del nuevo nodo $v_5$. Además, el índice (3,3) de la matriz $\bar{A}$ se ve modificado por la presencia del resistor $R_{11}$ conectado al nodo $v_4$. Finalmente, el vector $\bar{b}$ ahora incluye a la nueva fuente de corriente $I_2$, la cual al estar conectada a los nodos $v_4$ y $v_5$, está presente en el tercer y cuarto indice de $\bar{b}$.

# Problema 3 (30 puntos)

Considere el siguiente circuito lineal con terminales de salida A y B:




(a) (20 puntos) Asuma que una fuente de voltaje independiente de magnitud $V'$ es conectada a los terminales A y B del circuito anterior, resultando en:




Usando el Teorema de Superposición, determine la corriente $I'$.

(b) (10 puntos) Asuma que ahora la fuente de voltaje $V'$ es reemplazada por un parlante con resistencia ajustable $R_P$. Determine $R_P$ de manera tal de maximizar la potencia transfererida al parlante.

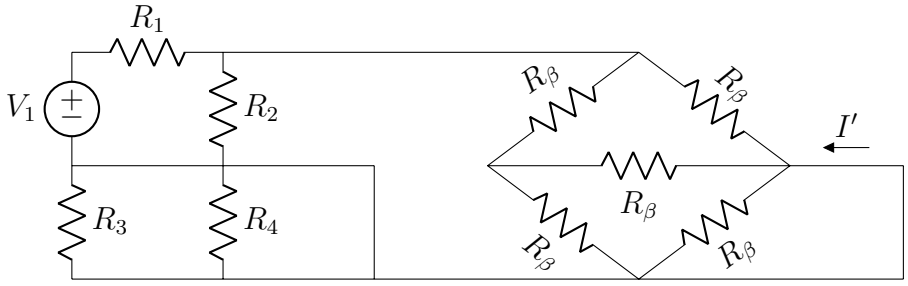
## Solución:

(a) Basado en el Teorema de Superposición, tenemos:

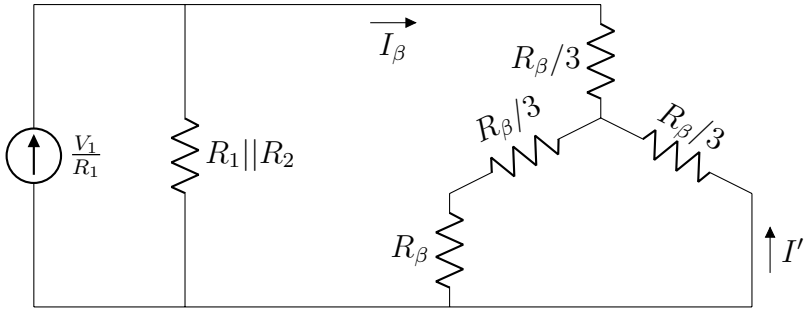
$$I' = \left[\frac{I'}{V_1}\bigg|_{V_2=V'=0}\right] V_1 + \left[\frac{I'}{V_2}\bigg|_{V_1=V'=0}\right] V_2 + \left[\frac{I'}{V'}\bigg|_{V_1=V_2=0}\right] V' \qquad (1)$$

Procedemos a calcular cada uno de los coeficientes:

- Para $\frac{I'}{V_1}\Big|_{V_2=V'=0}$ tenemos el siguiente circuito:

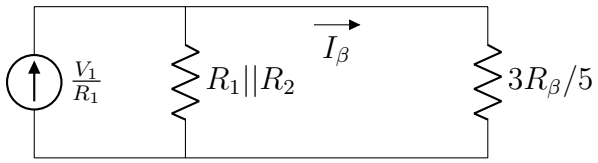


Notamos que hay dos cortocircuitos (en $R_4$ y $R_\beta$), que el par $V_1$ y $R_1$ puede ser transformado en su equivalente de Norton, y que se puede realizar la conversion $\Delta \to Y$. De esta forma, se tiene el siguiente circuito simplificado:




donde se define la corriente auxiliar $I_\beta$.

Agrupando las resistencias, se obtiene:




en donde $R_\beta/3+(R_\beta/3+R_\beta)||(R_\beta/3) = 3R_\beta/5$. De esta forma, es posible calcular $I_\beta$ aplicando divisor de corriente:

$$I_\beta = \frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{R_1||R_2}{(R_1||R_2) + (3R_\beta/5)}$$

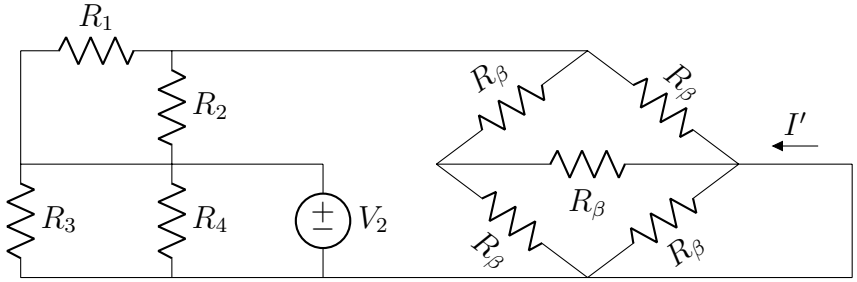
Finalmente, $I'$ puede ser obtenido aplicando divisor de corriente sobre $I_\beta$:

$$I' = -I_\beta \cdot \frac{R_\beta/3 + R_\beta}{(R_\beta/3 + R_\beta) + (R_\beta/3)} = -\frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{R_1||R_2}{(R_1||R_2) + (3R_\beta/5)} \cdot \frac{4}{5}$$

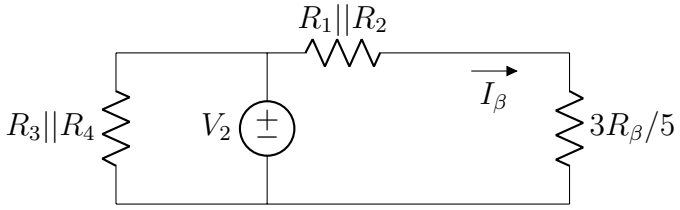
por lo que:

$$\frac{I'}{V_1}\bigg|_{V_2=V'=0} = -\frac{4/5}{R_1} \cdot \frac{R_1||R_2}{(R_1||R_2) + (3R_\beta/5)}$$

- Para $\frac{I'}{V_2}\Big|_{V_1=V'=0}$ tenemos el siguiente circuito:



El circuito puede ser simplificado agrupando los resistores y aplicando la misma transformación $\Delta \to Y$, resultando en:




donde la corriente auxiliar $I_\beta$ vuelve a ser utilizada, y en este caso es igual a:

$$I_\beta = \frac{V_2}{(R_1||R_2) + 3R_\beta/5}$$

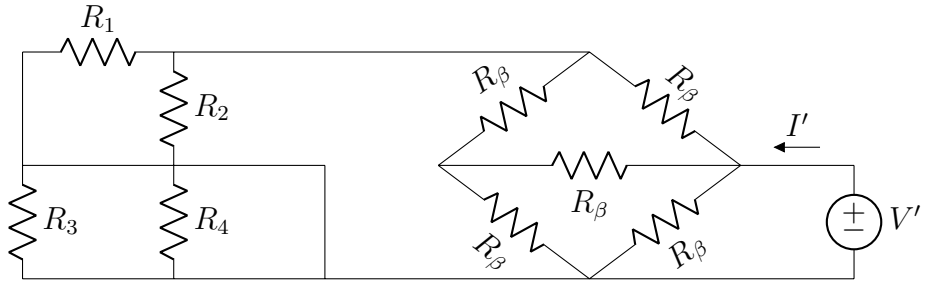
Finalmente, podemos obtener $I'$ aplicando divisor de corriente sobre $I_\beta$:

$$I' = -I_\beta \cdot \frac{R_\beta/3 + R_\beta}{(R_\beta/3 + R_\beta) + (R_\beta/3)} = -\frac{V_2}{(R_1||R_2) + 3R_\beta/5} \cdot \frac{4}{5}$$

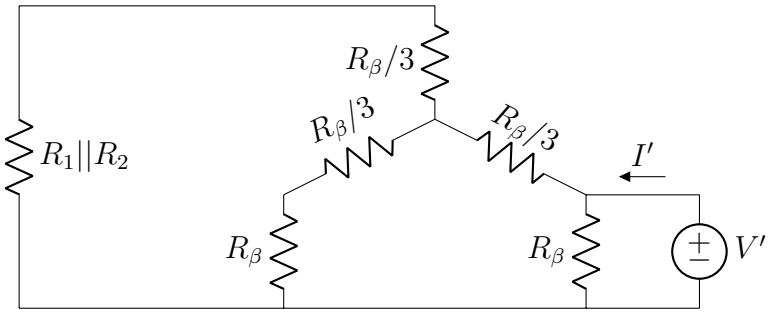
por lo que:

$$\left.\frac{I'}{V_2}\right|_{V_1=V'=0} = -\frac{4/5}{(R_1||R_2) + 3R_\beta/5}$$

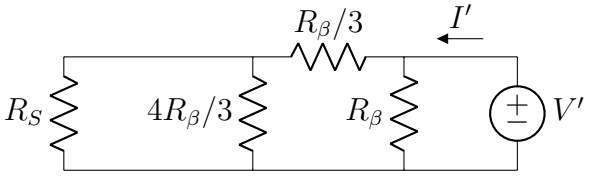
- Para $\left.\frac{I'}{V'}\right|_{V_1=V_2=0}$ tenemos el siguiente circuito:




Agrupando resistores y aplicando la conversión $\Delta \to Y$:




Simplificando el circuito:




en donde $R_S = (R_1||R_2) + R_\beta/3$

De esta forma, se puede observar que la corriente $I'$ queda dada por:

$$I' = \frac{V'}{(R_D + R_\beta/3)||R_\beta}$$

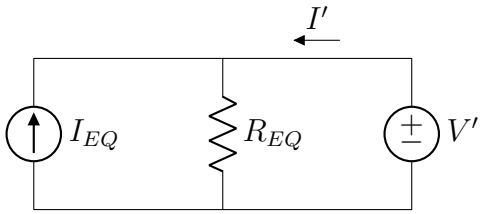
en donde $R_D = R_S||(4R_\beta/3)$. De esta forma:

$$\left.\frac{I'}{V'}\right|_{V_1=V_2=0} = \frac{1}{(R_D + R_\beta/3)||R_\beta}$$

Luego de calcular los coeficientes $\left.\frac{I'}{V_1}\right|_{V_2=V'=0}$, $\left.\frac{I'}{V_2}\right|_{V_1=V'=0}$, y $\left.\frac{I'}{V'}\right|_{V_1=V_2=0}$, obtenemos la corriente $I'$ resultante:

$$I' = -\left[\frac{4/5}{R_1}\cdot\frac{R_1||R_2}{(R_1||R_2)+(3R_\beta/5)}\right]V_1 - \left[\frac{4/5}{(R_1||R_2)+3R_\beta/5}\right]V_2 + \left[\frac{1}{(R_D+R_\beta/3)||R_\beta}\right]V'$$

(b) Observamos que el ejercicio anterior es análogo a la demostración del equivalente de Norton. En particular, tenemos que para dicha demostración el siguiente circuito puede ser utilizado:




en donde aplicando Ley de Ohm y KCL:

$$I' = -I_{EQ} + \frac{V'}{R_{EQ}}$$

que alternativamente puede ser escrito en formato de superposición de fuentes internas independientes $F_i$:

$$I' = \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\left.\frac{I'}{F_i}\right|_{F_j=V'=0\ \forall j\neq i}\cdot F_i}_{-I_{EQ}} + \underbrace{\left.\frac{I'}{V'}\right|_{F_i=0}}_{1/R_{EQ}}\cdot V'$$

Comparando esta ecuación con el resultado del ejercicio anterior, resulta claro que:

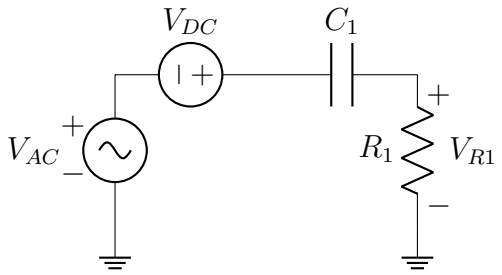
$$R_{EQ} = (R_D + R_\beta/3)||R_\beta$$

Finalmente, por el Teorema de Máxima de Transferencia de Potencia, la máxima potencia transferida será alcanzada cuando $R_P = R_{EQ}$, es decir:

$$R_P = (R_D + R_\beta/3)||R_\beta$$

# Problema 4 (20 puntos)

(a) (15 puntos) Considere el siguiente circuito alimentado con fuentes de voltaje DC y AC:




en donde $V_{DC} = 10$ [V], $V_{AC} = 5\sin(2\pi f \cdot t)$ [V], $C_1 = 1$ [F], y $R_1 = 1\,[\Omega]$. Grafique el voltaje $V_{R1}$ para $t = 0 \ldots 1$ [s] considerando que el circuito ha alcanzado régimen permanente y la fuente AC tiene una alta frequencia de $f = 5$ [Hz].

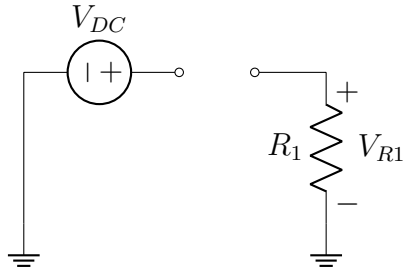
(b) (5 puntos) Indique dos aplicaciones prácticas en donde capacitores y/o inductores son utilizados. ¿Cual es el rol que juega el capacitor/inductor en dicho ejemplo?

## Solución:

(a) Aplicamos Teorema de Superposición para calcular $V_{R1}$:

$$V_{R1} = \left.\frac{V_{R1}}{V_{DC}}\right|_{V_{AC}=0} \cdot V_{DC} + \left.\frac{V_{R1}}{V_{AC}}\right|_{V_{DC}=0} \cdot V_{AC}$$

Calculamos $\left.\frac{V_{R1}}{V_{DC}}\right|_{V_{AC}=0}$ resolviendo el siguiente circuito:




donde se puede observar que $C_1$ es reemplazado por un circuito abierto, puesto que un capacitor se comporta como este para bajas frequencias (0 Hz para el caso DC). De esta forma, tenemos $V_{R1} = 0$, y por tanto:

$$\left.\frac{V_{R1}}{V_{DC}}\right|_{V_{AC}=0} = 0$$

Calculamos $\left.\frac{V_{R1}}{V_{DC}}\right|_{V_{AC}=0}$ resolviendo el siguiente circuito:




donde se puede observar que $C_1$ es reemplazado por un cortocircuito, puesto que un capacitor se comporta como este para altas frequencias (5 Hz $\gg$ 0 Hz). De esta forma, tenemos $V_{R1} = V_{AC}$, y por tanto:

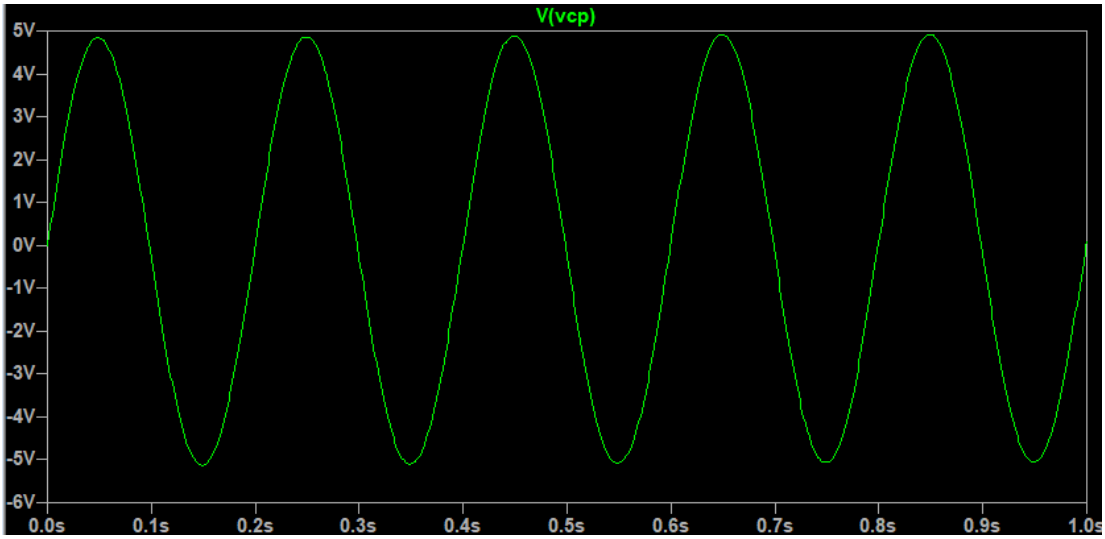
$$\left.\frac{V_{R1}}{V_{AC}}\right|_{V_{DC}=0} = 1$$

Sumando los componentes $\left.\frac{V_{R1}}{V_{DC}}\right|_{V_{AC}=0}$ y $\left.\frac{V_{R1}}{V_{AC}}\right|_{V_{DC}=0}$ obtenemos:

$$V_{R1} = V_{AC} = 5\sin(2\pi f \cdot t)$$

para régimen permanente.

De esta forma, el gráfico corresponde a una onda sinusoidal de amplitud 5 [V] y frequencia $f = 5$ [Hz]:




(b) A continuación se listan aplicaciones prácticas para capacitores/inductores:

- Uso en convertidores AC/DC (rectificador) presentes en múltiples artículos electrodomésticos. En este caso, se utiliza un capacitor para 'afirmar' el voltaje y que sea más similar a una onda plana.
- Uso en plantas fotovoltaícas, para las cuales se necesita convertir el voltaje DC de los paneles solares en una onda AC para conectarse al sistema eléctrico. En este caso, el capacitor es usado para suavizar la curva y obtener una forma de curva más 'sinosoidal'.