Problema 1

En la figura 1 se tienen 2 interruptores, S1 y S2. Ambos llevaban mucho tiempo abiertos, hasta que en t=0 S1 se cierra, quedando S2 todavía abierto. Luego en t=3, S2 se cierra, con lo que ambos interruptores se encuentran cerrados. Encuentre la corriente del inductor para todo el tiempo t>0 y exprésela como función por tramos.

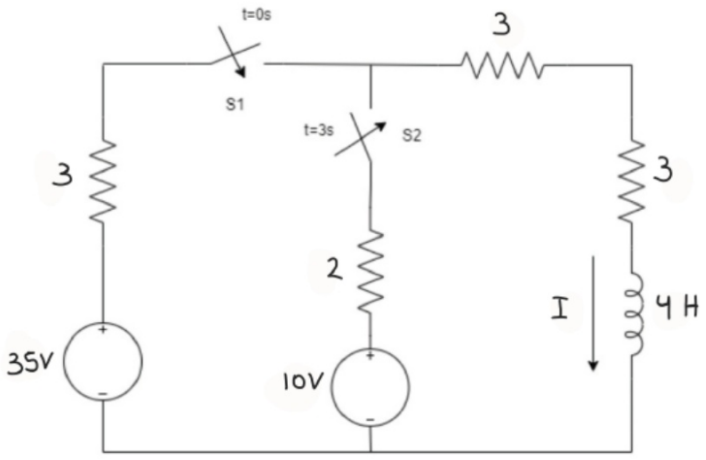
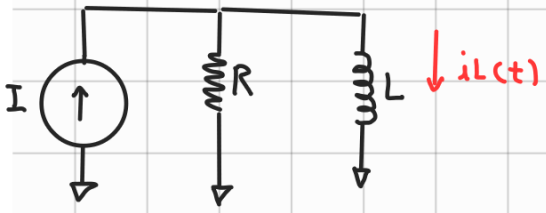


Figura 1: Circuito de primer orden con inductor.

Ecuaciones útiles

Circuito RL:

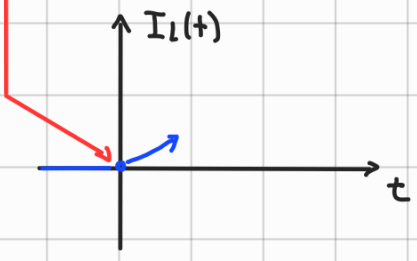
$$i_L(t) = (i_L(0) - I)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + I$$



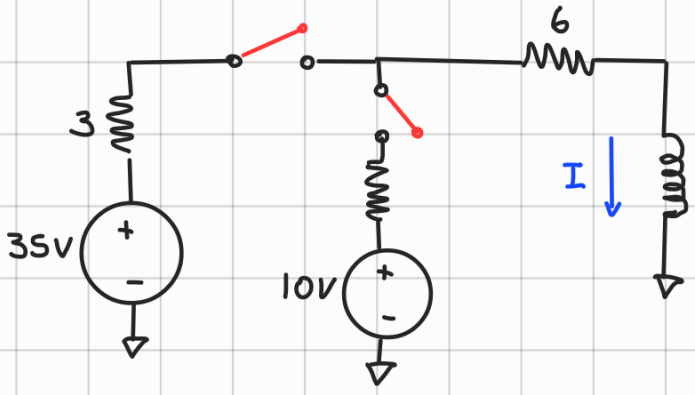
$$\tau = \frac{L}{R}$$

Continuidad:

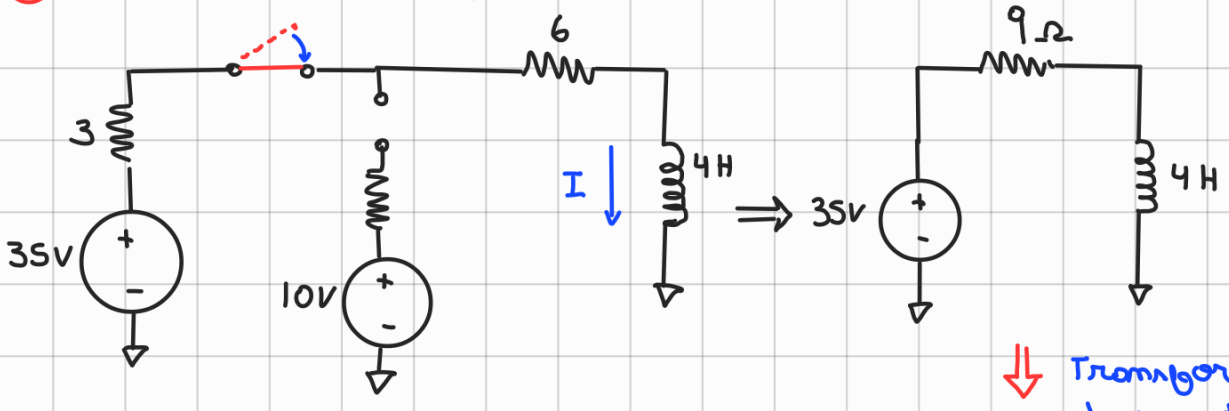
$$I_L(0^-) = I_L(0^+) = 0$$



① Instante $t < 0$:

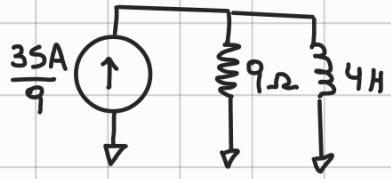


② Instante $0 < t < 3$:



⇓ Transformación de fuentes

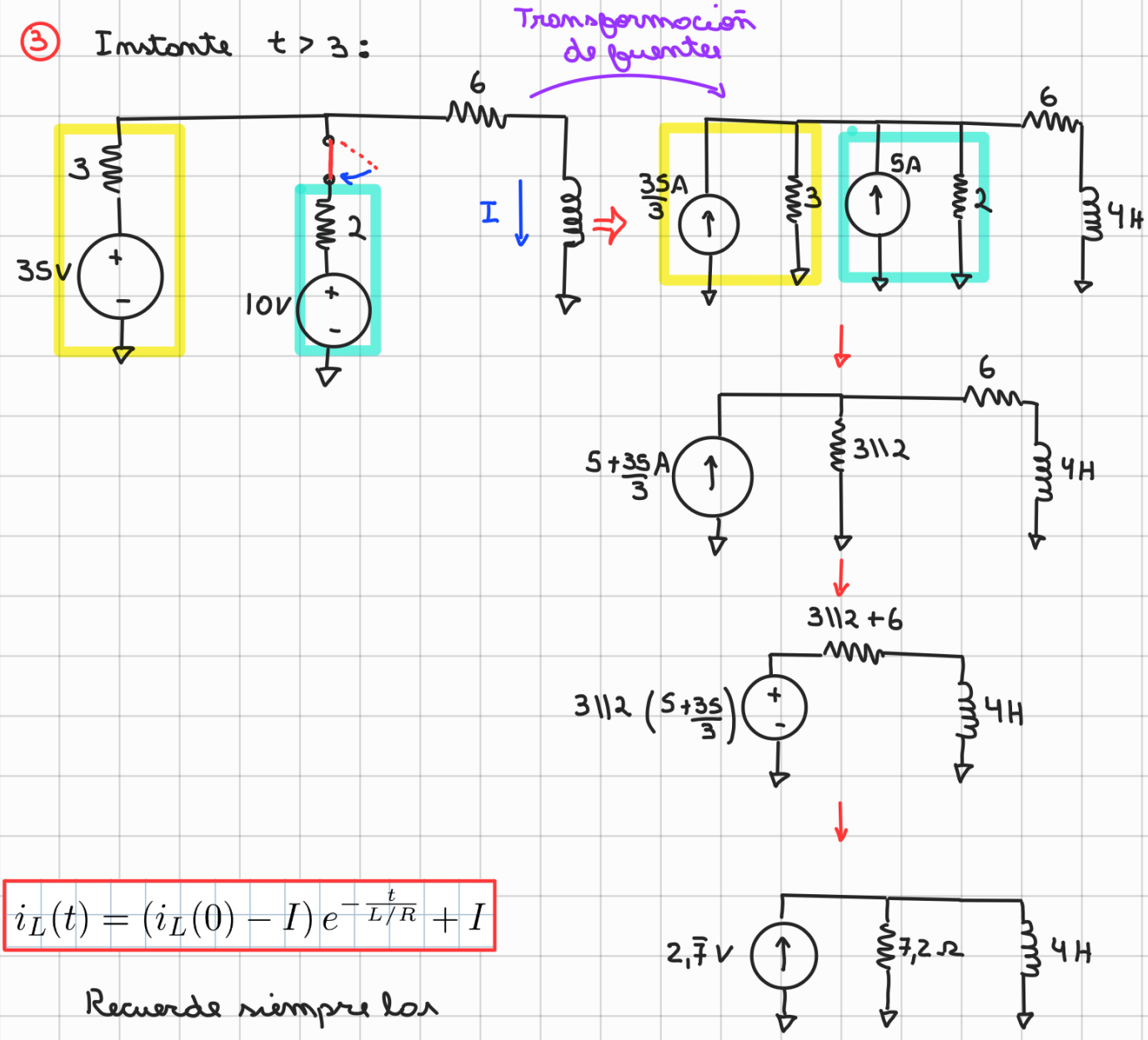
$$i_L(t) = (i_L(0) - I)\, e^{-\frac{t}{L/R}} + I$$



$$i_L(t) = (0 - 3{,}889)\cdot e^{-\frac{t\cdot 9}{4}} + 3{,}899$$

③ Instante $t > 3$:

Transformación de fuentes



$$i_L(t) = (i_L(0) - I)\, e^{-\frac{t}{L/R}} + I$$

Recuerde siempre las condiciones iniciales del instante anterior $\{0 < t < 3\}$:

$I_L(3^-) = 3,884 = I_L(3^+)$

reemplazando en $i_L(t) = -3,889 \cdot e^{-\frac{3 \cdot 9}{4}} + 3,899 = 3,894$

$$\therefore\ i_L(t) = (3,894 - 2,7̄) \cdot e^{-\frac{7,2(t-3)}{4}} + 2,7̄$$

Finalmente:

$$I_L(t) = \begin{cases} -3,889 \cdot e^{-\frac{9t}{4}} + 3,889 \in [0,3) \\ 1,107 \cdot e^{-1,8(t-3)} + 2,777 \in [3,\infty) \end{cases}$$

Problema 2

El circuito de la figura 2 lleva operando durante mucho tiempo cuando en $t_0 = 0$, los interruptores cambian de posición dejando al circuito conectado solo a la fuente de voltaje sinusoidal. Determine la ecuación diferencial que modela el voltaje del capacitor vc(t) (incluidas condiciones iniciales) y la frecuencia natural del sistema ω_0.

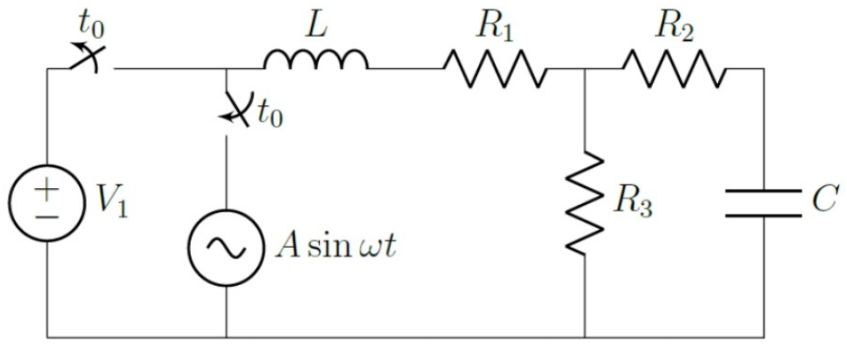
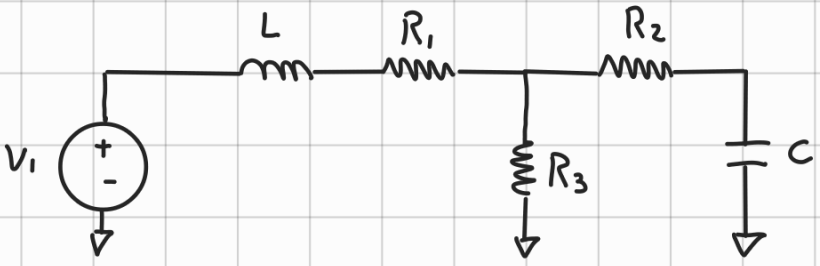


Figura 2: Circuito de 2do orden con fuente sinusoidal.

Instante $t<0$:

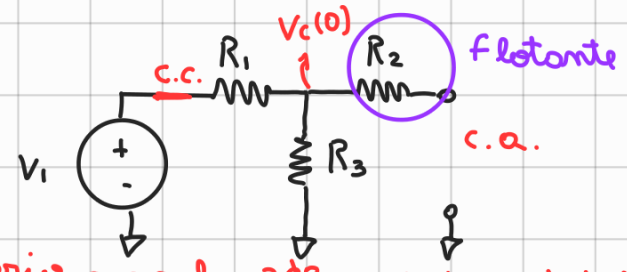


Paso 1: Condiciones iniciales $V_c(0)$ y otra para $\frac{dV_c(0)}{dt}$

↳ Mucho tiempo:

Inductor ⟶ c.c.

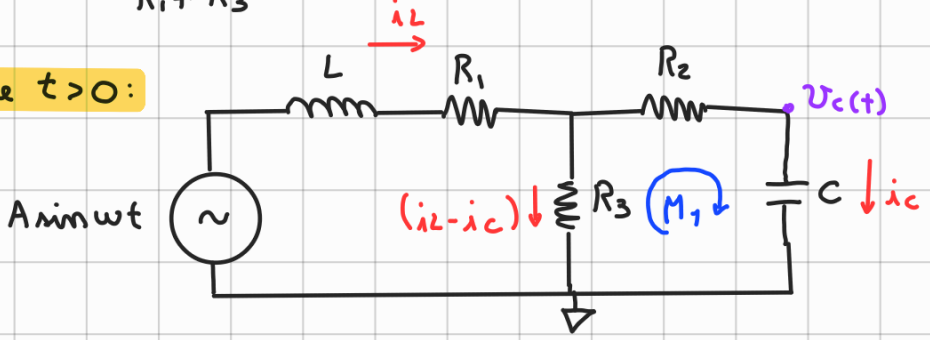
Capacitor ⟶ c.a.



$$i_L(0) = \frac{V_1}{R_1 + R_3}$$ } necesario para la 2da condición inicial

$$V_c(0) = V_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$ {primera condición inicial $V_c(0^-)$}

Instante $t>0$:



Sabiendo que (en capacitor) $\frac{2V_c(t)}{2t} \cdot C = i_c(t)$ ⟶ $\boxed{\frac{2V_c(0^+)}{2t} = \frac{i_c(0^+)}{C}}$

En M_1 : $v_c(0) + i_c(0) \cdot R_2 - (i_L(0) - i_c(0)) \cdot R_3 = 0$

Reemplazando: $v_c(0) = \frac{V_1 R_3}{R_1+R_3}$, $i_L(0) = \frac{V_1}{R_1+R_3}$ y $i_c(0) = C \cdot \frac{2v_c(0)}{2t}$

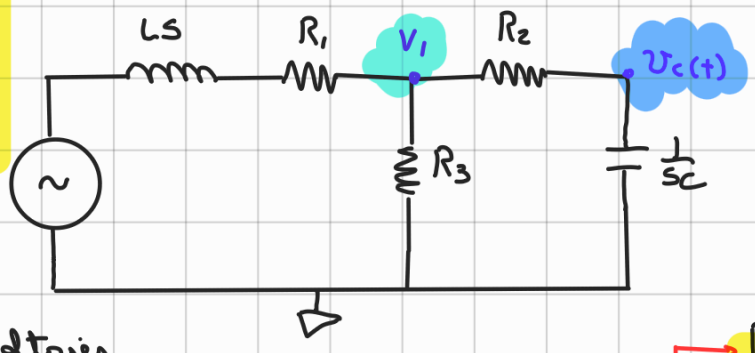
$$\frac{V_1 \cdot R_3}{R_1+R_3} + C \cdot \frac{2v_c(0)}{2t}\left[R_2+R_3\right] - \frac{V_1 \cdot R_3}{R_1+R_3} = 0$$

$$\therefore \frac{2v_c(0)}{2t} = 0 \quad \left[\text{ojo, podría no valer cero}\right] \Big\} 2^{da} \text{ condición inicial}$$

$\frac{2v_c(0)}{2t}$

$t>0$

Laplace: $s = \frac{2}{2t} = jw$



Divisor de voltaje

$$V_1 = \frac{A \sin wt \cdot \left[R_3 \,\|\, R_2 + \frac{1}{sC}\right]}{R_3 \,\|\, \left(R_2+\frac{1}{sC}\right) + R_1 + LS}$$

$R_3 \,\|\, R_2 + \frac{1}{sC}$

$\downarrow$

$\frac{R_3\left(R_2+\frac{1}{sC}\right)}{R_3+R_2+\frac{1}{sC}}$

$\downarrow$

$\frac{R_3 \cdot (1+R_2 C \cdot s)}{1+(R_3+R_2)sC}$

$$v_c = \frac{V_1 \cdot \frac{1}{sC}}{R_2+\frac{1}{sC}} \cdot \frac{sC}{sC} = \frac{V_1}{1+R_2 sC}$$

Reemplazo V_1 en v_c:

$$v_c(s) = A \sin wt \cdot \frac{R_3(1+R_2 sC)}{\left[1+(R_3+R_2)sC\right]} \cdot \frac{1}{(1+R_2 sC)} \cdot \frac{}{\frac{R_3(1+R_2 Cs)}{1+(R_3+R_2)sC} + R_1 + LS}$$

$$v_c(s)\left[R_3(1+R_2 sC) + (R_1+LS)\left[1+(R_2+R_3)sC\right]\right] = A \sin wt$$

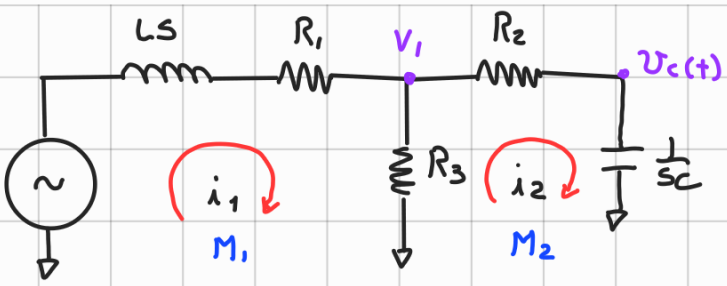
$$\left[R_3 + R_2 R_3 Cs + R_1 + R_1(R_2+R_3)Cs + LS + (R_2+R_3)LCs^2\right]$$

$$v_c(s)\left[s^2 + s \cdot \frac{(R_2 \cdot R_3 \cdot C + + R_1 R_2 \cdot C + R_1 R_3 \cdot C + L)}{LC \cdot (R_2+R_3)} + \frac{(R_1+R_3)}{LC \cdot (R_2+R_3)}\right] = \frac{A \sin wt \, R_3}{LC\,(R_2+R_3)}$$

$s^2 + 2z w_0 \cdot s + w_0^2$ } Ecuación característica.

$$w_0 = \sqrt{\frac{(R_1+R_3)}{LC(R_2+R_3)}}$$

Sin Laplace



Ecuaciones útiles

$v_L(t) = \frac{2\, iL(t)}{2t} \cdot L$

$i_c(t) = \frac{2\, v_c(t)}{2t} \cdot C$

$$v(t) = v_L(t) + i_1(t)\cdot R_1 + R_3(i_1(t) - i_2(t)) \quad \text{malla 1}$$

$$R_3(i_2(t) - i_1(t)) + R_2 \cdot i_2(t) + v_c(t) = 0 \quad \text{malla 2}$$

$$v(t) = L \cdot \frac{2\, iL(t)}{2t} + i_1(t)\cdot R_1 + R_3(i_1(t) - i_2(t))$$

$$v(t) = L \cdot iL'(t) + i_1(t)(R_1+R_3) - R_3 \cdot C \cdot v_c' \quad (1)$$

$\frac{d}{dt} iL(t) = iL'(t) = i_1'(t)$

$i_2(t) = i_c(t) = C \cdot v_c'(t)$

$$v_c(t) = i_1(t)\cdot R_3 - i_2(t)(R_2+R_3)$$

* $i_1(t) = \frac{v_c(t)}{R_3} + C\cdot(R_2+R_3)\cdot\frac{v_c'}{R_3}$ | derivo $\frac{2}{2t}$

* $i_1'(t) = \frac{v_c'}{R_3} + \frac{C\cdot(R_2+R_3)\cdot v_c''}{R_3}$

Reemplazo $i_1(t)$ y $i_1'(t)$ en (1):

$$v(t) = L\cdot\frac{v_c'}{R_3} + \frac{L\cdot C\cdot(R_2+R_3)\cdot v_c''}{R_3} + (R_1+R_3)\cdot\frac{v_c}{R_3} + (R_1+R_3)\cdot\frac{(R_2+R_3)\cdot C\, v_c'}{R_3} - R_3\cdot C\cdot v_c'$$

$$\frac{R_3\, v(t)}{LC\cdot(R_2+R_3)} = \frac{2^2 v_c(t)}{2t^2} + \frac{L + C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)\cdot R_3}{R_3\cdot(R_2+R_3)\cdot LC}\cdot\frac{2v_c(t)}{2t} + \frac{(R_1+R_3)\cdot v_c(t)}{(R_2+R_3)\cdot Lc}$$

($A\sin\omega t$ = $v(t)$)

→ mismo resultado usando Laplace y método de mallas.

Problema 3 [Tipo I2]

El circuito de la Figura 3 se encuentra operando por mucho tiempo cuando en $t_0 = 0$ el interruptor se abre.

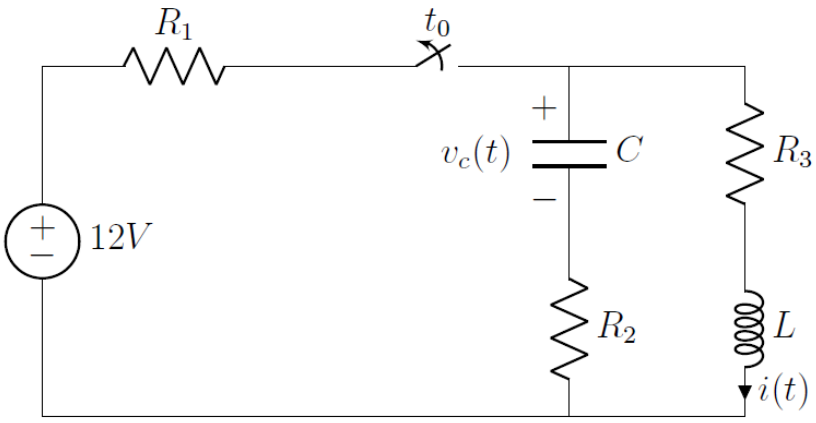
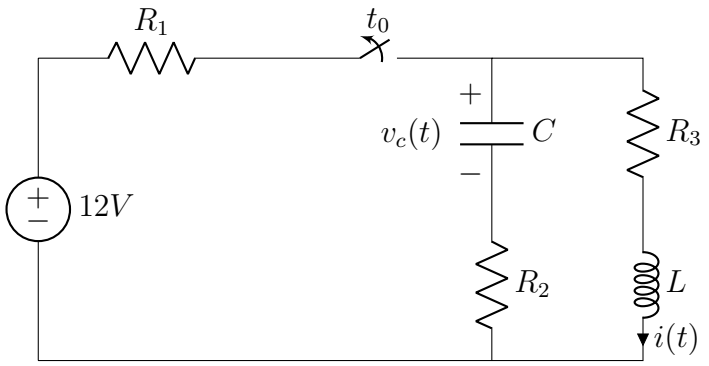


Figura 3: Circuito de 2do orden.

Problema 2 - Sistemas de segundo Orden y dasores. (7 puntos)

Pregunta 2a.

El circuito de la figura se encuentra operando por mucho tiempo cuando en $t_0 = 0$ el interruptor se abre.



a) Determine paso a paso la ecuación diferencial que modela la corriente del inductor del circuito para $t > 0$ y las condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación.

b) Para $t > 0$, considerando un valor de $L = 0.5$ [H], determine paso a paso los valores (o condiciones) de R_2, R_3 y C para obtener una respuesta natural del circuito con $\omega_0 = 10$ [rad/s] y una respuesta subamortiguada.

c) Con los valores (o condiciones) encontrados en el ítem anterior y eligiendo $\zeta = 0.9$, encuentre la corriente $i(t)$ resolviendo la ecuación diferencial (considere $R_1 = R_3 = 3$ [Ω]).

Nota: Cada pregunta tiene 6 puntos, se obtiene el promedio de ellas y se añade el punto base.

Solución Problema 2a.

a) Planteamos la ecuación de malla para $t > 0$,

$$v_C(t) + v_L(t) + i_L(t)(R_2 + R_3) = 0$$

Notamos que,

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Derivamos a ambos lados y obtenemos,

$$\frac{i_C(t)}{C} + L\frac{di_L^2(t)}{dt^2} + \frac{di_L(t)}{dt}(R_2 + R_3) = 0$$

Como $i_C(t) = i_L(t)$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{di_L(t)}{dt}\frac{(R_2 + R_3)}{L} + \frac{i_L(t)}{LC} = 0$$

1 punto

Para las condiciones iniciales sabemos que después de mucho tiempo operando en $t < 0$, el capacitor es circuito abierto, mientras que el inductor es un cortocircuito, por lo que,

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12\frac{R_3}{R_3 + R_1}$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{12}{R_3 + R_1}$$

1 punto

b) De la ecuación diferencial obtenemos el polinomio característico,

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 0.02\ F$$

1 punto

Como necesitamos que $\zeta < 1$, para que la respuesta sea subamortiguada,

$$2\zeta\omega_0 = \frac{(R_2 + R_3)}{L}$$

$$R_2 + R_3 < 10$$

1 punto

c) Encontramos las raíces del polinomio característico,
Reemplazando,

$$s^2 + 18s + 100 = 0$$

$$s = \frac{-18 \pm \sqrt{-76}}{2} = -9 \pm j4.36$$

1 punto

De esta forma,

$$i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4.36t + A_2 \sin(4.36t))$$

$$i(0) = A_1 = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -9A_1 + 4.36A_2 = \frac{V_L(0^+)}{L}$$

Sabemos que el voltaje $V_L(0^+) = V_C(0) - i_L(0)(R_2 + R_3) = 12\frac{3}{6} - 2 * 9 = -12$, entonces,

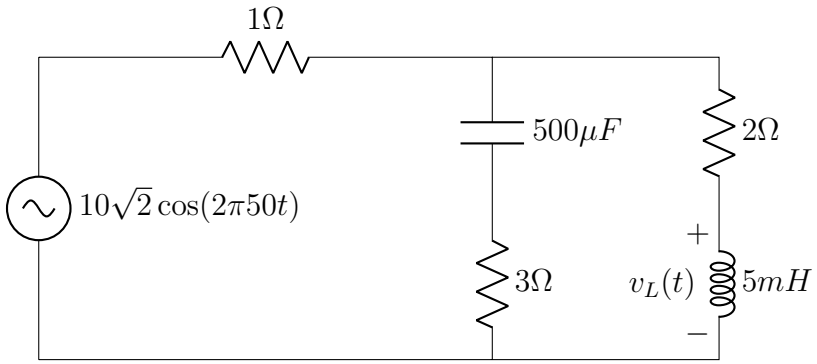
$$A_2 = \frac{-12 * 2 + 18}{4.36} = -1.38$$

$$i(t) = e^{-9t}(2\cos 4.36t - 1.38\sin 4.36t)$$

1 punto

Pregunta 2b.

Considere el siguiente circuito operando en régimen sinusoidal permanente,



a) Utilice cualquier método para encontrar paso a paso el voltaje del inductor en función del tiempo $v_L(t)$.

b) Calcule paso a paso las potencias activa, reactiva y aparente de cada una de las cuatro cargas seleccionadas en la figura (Capacitor, inductor, y resistores de 2 y 3 [Ω]) y de la carga equivalente total de ellas.

Solución Problema 2b.

a) Como el sistema está operando a una $\omega = 50\pi$, podemos encontrar las impedancias asociadas al capacitor y al inductor,

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j6.37$$

$$Z_L = j\omega L = j1.57$$

Ahora podemos encontrar el valor de la impedancia equivalente a las 4 de la derecha:

$$Z_{eq} = \frac{(3 - j6.37)(2 + j1.57)}{5 - j4.8} = \frac{7.04\angle -64.72.54\angle 38.13}{6.93\angle -43.8}$$

Problema 4

Para el circuito de la Figura 4:

a) Calcule las condiciones iniciales del voltaje en el capacitor ($V_c(0^+)$ y $\frac{dV_c(0^+)}{dt}$).

   ** Hint: Recuerde que el capacitor se opone a los cambios bruscos de voltaje pero no de corriente.

b) Obtenga la ecuación diferencial del voltaje en el capacitor.
c) Obtenga la ecuación en el tiempo del voltaje en el capacitor.

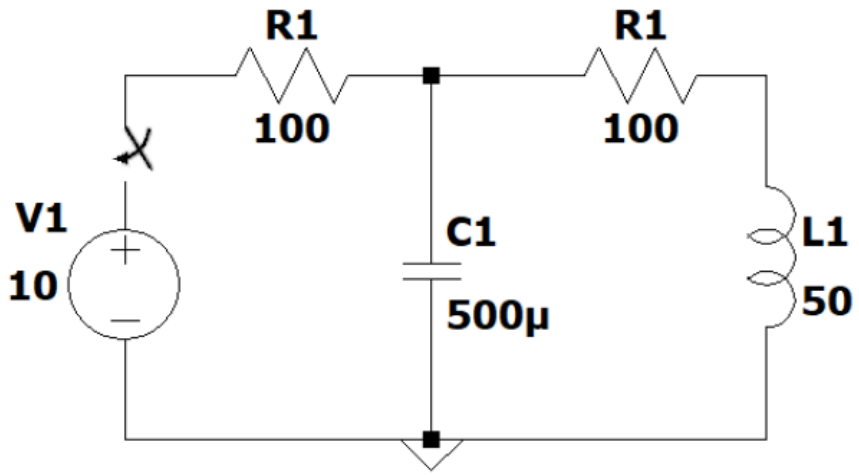
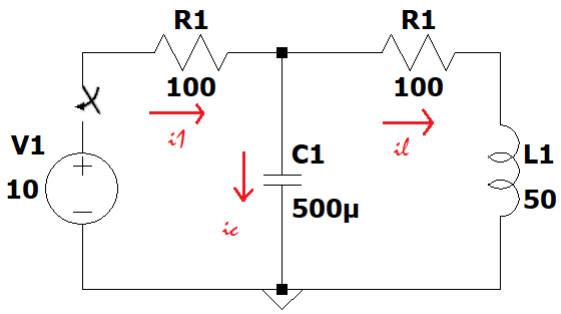


Figura 4: Circuito de 2do orden.

Solución:

Sabemos que el capacitor se opone a cambios bruscos de voltaje por lo que $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$, además $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$. Para encontrar $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$ hay que analizar el circuito en $t = 0^+$. Por mallas:



$$i_1 = i_c + i_L$$
$$10 = 100i_1 + v_c$$
$$v_c = 100i_L + v_L$$

Pero se sabe que $v_c(0) = 0$ y que $i_L(0) = 0$, por lo tanto remplazando y desarrollando la segunda ecuación queda $i_c = \frac{1}{10}$. Luego $\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c}{C1} = 200$. Entonces las condiciones iniciales son $v_c(0^+) = 0$ y $\frac{dv_c(0^+)}{dt} = 200$.

Para la ecuación diferencial se puede usar divisor de voltaje en Laplace:

$$v_c = \frac{(\frac{1}{SC} \parallel R + SL)}{(\frac{1}{SC} \parallel R + SL) + R} \cdot v_1 = \frac{S\frac{1}{RC} + \frac{1}{CL}}{S^2 + S(\frac{R^2C+L}{RCL}) + \frac{2}{CL}} \cdot v_1$$
$$S\frac{v_1}{RC} + \frac{v_1}{CL} = S^2 v_c + S(\frac{R^2C + L}{RCL})v_c + \frac{2}{CL}v_c$$

Luego, pasando a la ecuación diferencial y remplazando los valores:

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + 22\frac{dv_c}{dt} + 80v_c = 400$$

Finalmente, para obtener la ecuación de v_c en el tiempo, hay que encontrar la solución forzada y la homogénea. Para la particular (v_c^p) ocupamos coeficientes indeterminados con $g(t) = 400$ (el lado derecho de la ecuación anterior).

$$v_c^p = \alpha g(t) + \beta\frac{dg(t)}{dt} + \gamma\frac{d^2g(t)}{dt^2}$$
$$v_c^p = \alpha g(t) = \alpha 400$$

Esto se remplaza en la ecuación diferencial y se llega a $\alpha = \frac{1}{80}$ y $v_c^p = 5$. Ahora, para la respuesta homogénea, determinamos el coeficiente de amortiguación.

$$w_0 = \sqrt{80}$$
$$2\zeta w_0 = 22 \rightarrow \zeta = \frac{11}{\sqrt{80}}$$

Como ζ es mayor que 1, la respuesta homogenea es sobreamortiguada:

$$v_c^h = Ae^{(-\zeta w_0 + w_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + Be^{(-\zeta w_0 - w_0\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

A y B se obtienen con las condiciones iniciales:

$$v_c(0) = A + B + 5 = 0 \rightarrow B = -A - 5$$
$$\frac{dv_c(0)}{dt} = A(-\zeta w_0 + w_0\sqrt{\zeta^2-1}) + B(-\zeta w_0 - w_0\sqrt{\zeta^2-1}) = 200$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que $A = 8{,}822$ y $B = -13{,}822$. Luego la ecuación en el tiempo del voltaje en el capacitor es:

$$v_c(t) = 8{,}822e^{(-4{,}596)t} - 13{,}822e^{(-17{,}403)t} + 5(V)$$