# Clase 17
# Introducción a LT

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 553-560

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

# Contexto

- Bienvenidos a un nuevo capítulo: Líneas de Transmisión.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

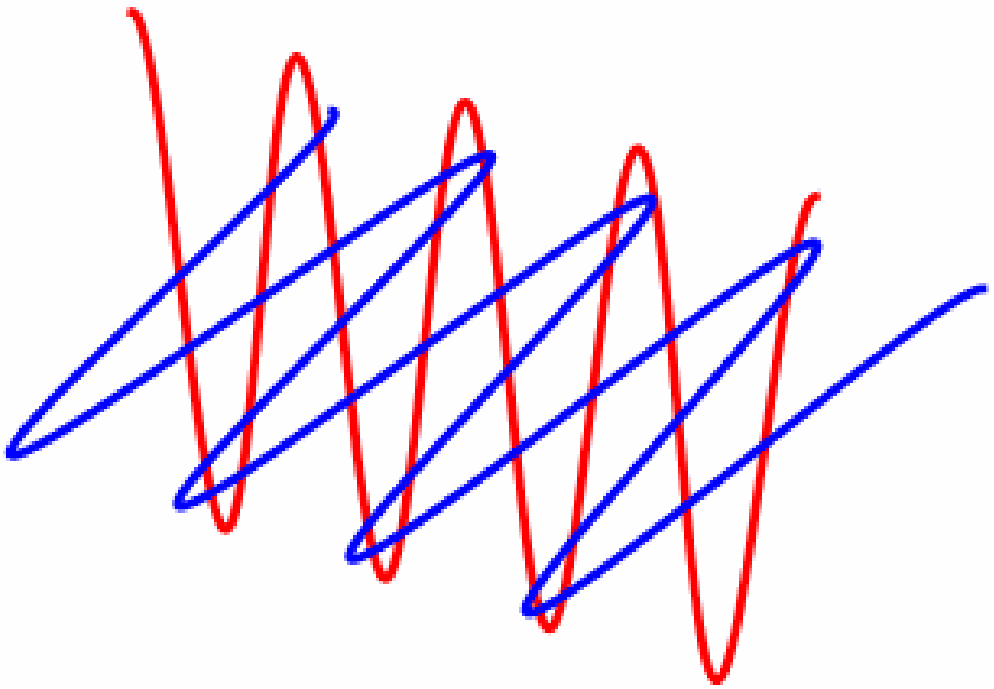
- **OA-14:** Distinguir las ecuaciones y el significado de una línea de transmisión general y las versiones correspondientes para líneas sin pérdidas, para pérdidas bajas, para pérdidas altas, y para líneas sin distorsión.

# Contenidos

- Motivación
- Parámetros Concentrados
- Parámetros Distribuidos
- Parámetros de una LT
- Ecuaciones de una LT
- Soluciones a las ecuaciones de una LT
- Impedancia de una LT

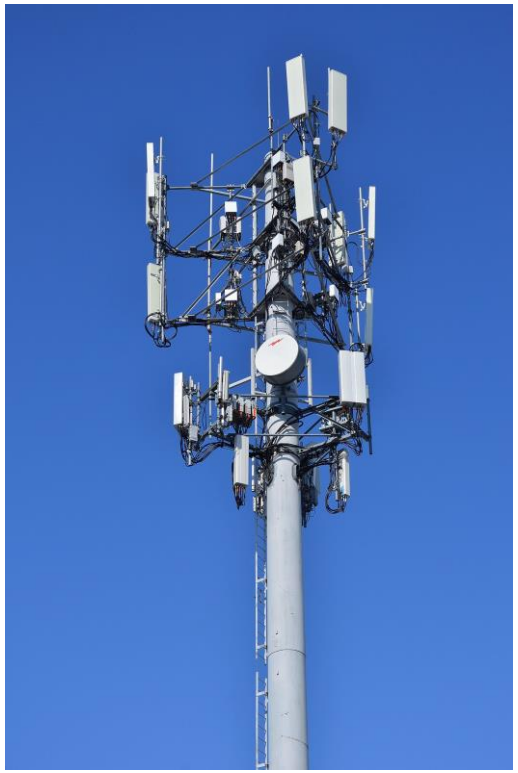
# Motivación

- Hasta ahora estudiamos ondas que se propagaban libremente por el espacio, sin mayores restricciones o limitantes.



# Motivación

- Esta es una situación real, clásica del mundo de radioaficionados, TV, imágenes satelitales, estaciones meteorológicas, uso militar, etc.

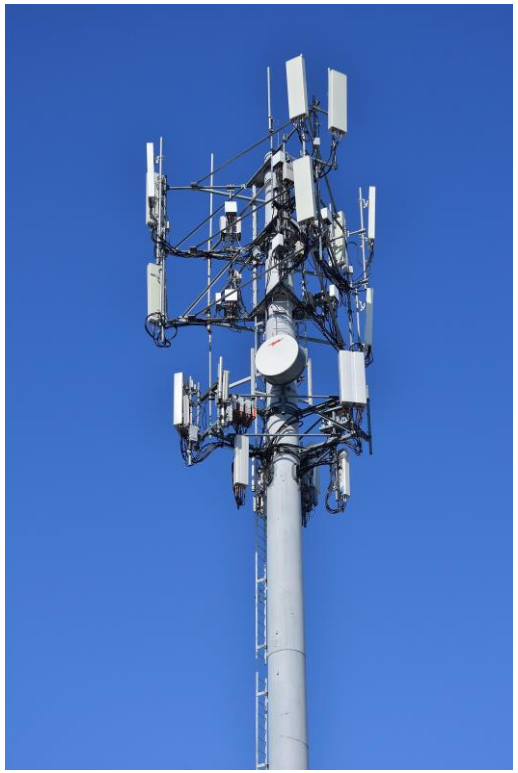




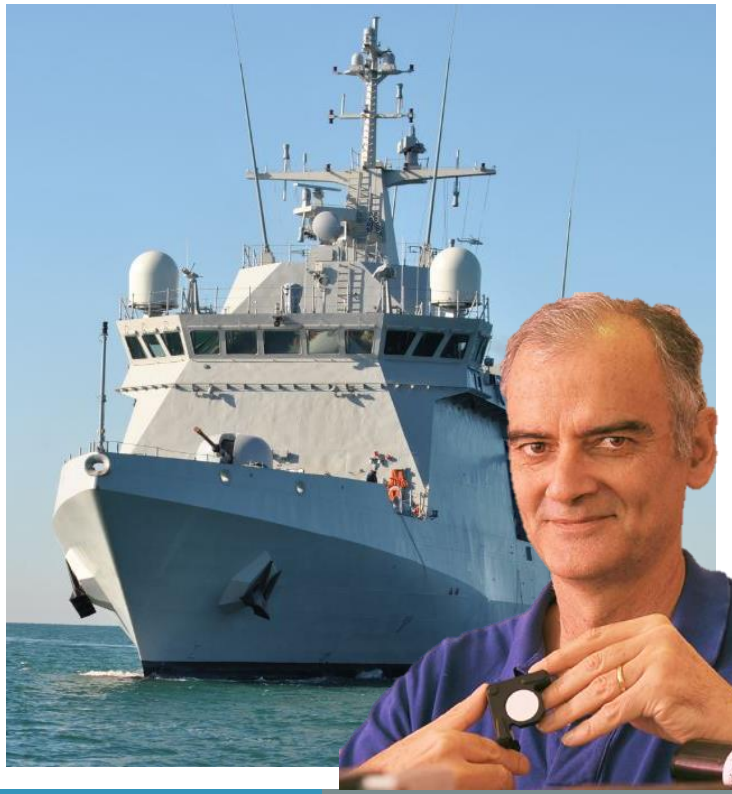


# Motivación

- Esta es una situación real, clásica del mundo de radioaficionados, TV, imágenes satelitales, estaciones meteorológicas, uso militar, etc.

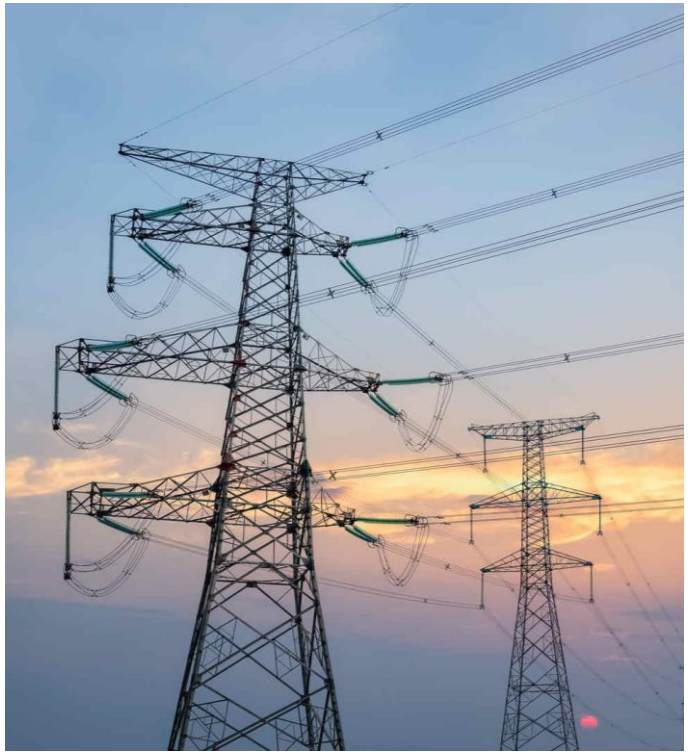




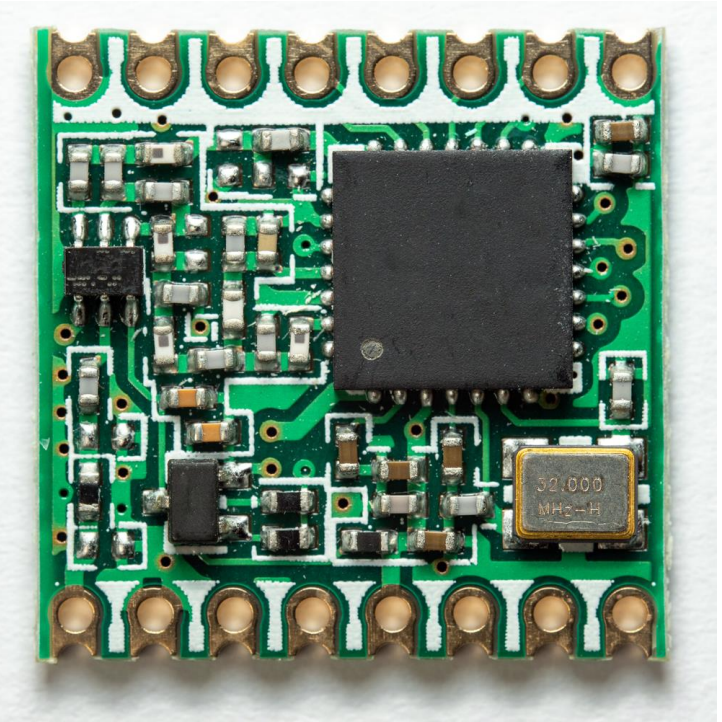


# Motivación

- Pero **no es la única**. También tenemos ondas confinadas a medios bastante restringidos.





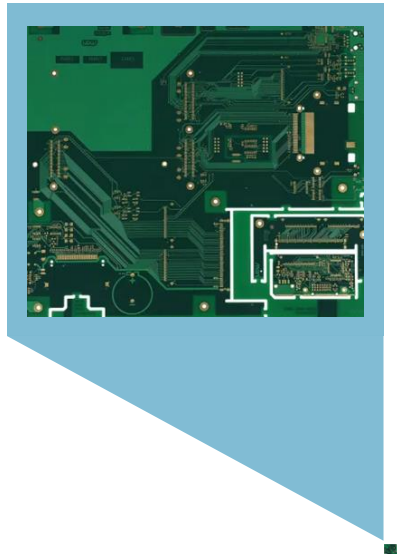
# Parámetros Concentrados

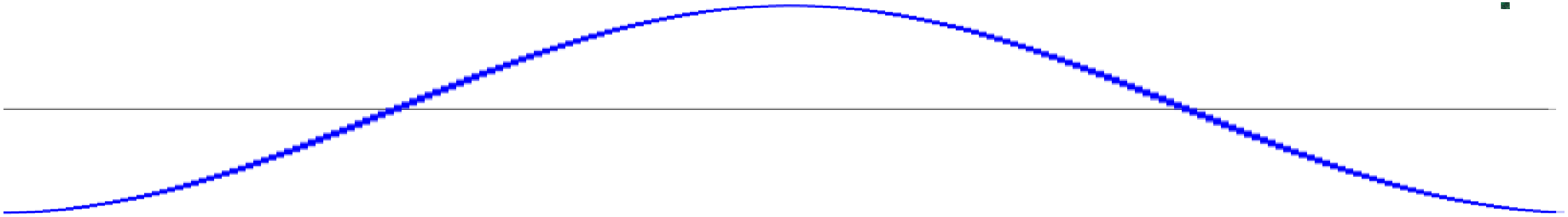
- La teoría de circuitos se basa en un supuesto fundamental: que la longitud de onda es mucho más grande que las dimensiones del circuito.

- Valor AC típico: $50[\mathrm{Hz}] \longrightarrow \ \lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f} = 6000\ [\mathrm{km}]$
- Largo de una PCB “grande”: $10\ [\mathrm{cm}]$

# Parámetros Concentrados

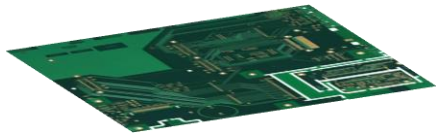
- Valor AC típico: $50[\mathrm{Hz}] \longrightarrow \quad \lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f} = 6000\ [\mathrm{km}]$
- Largo de una PCB “grande”: $10\ [\mathrm{cm}]$





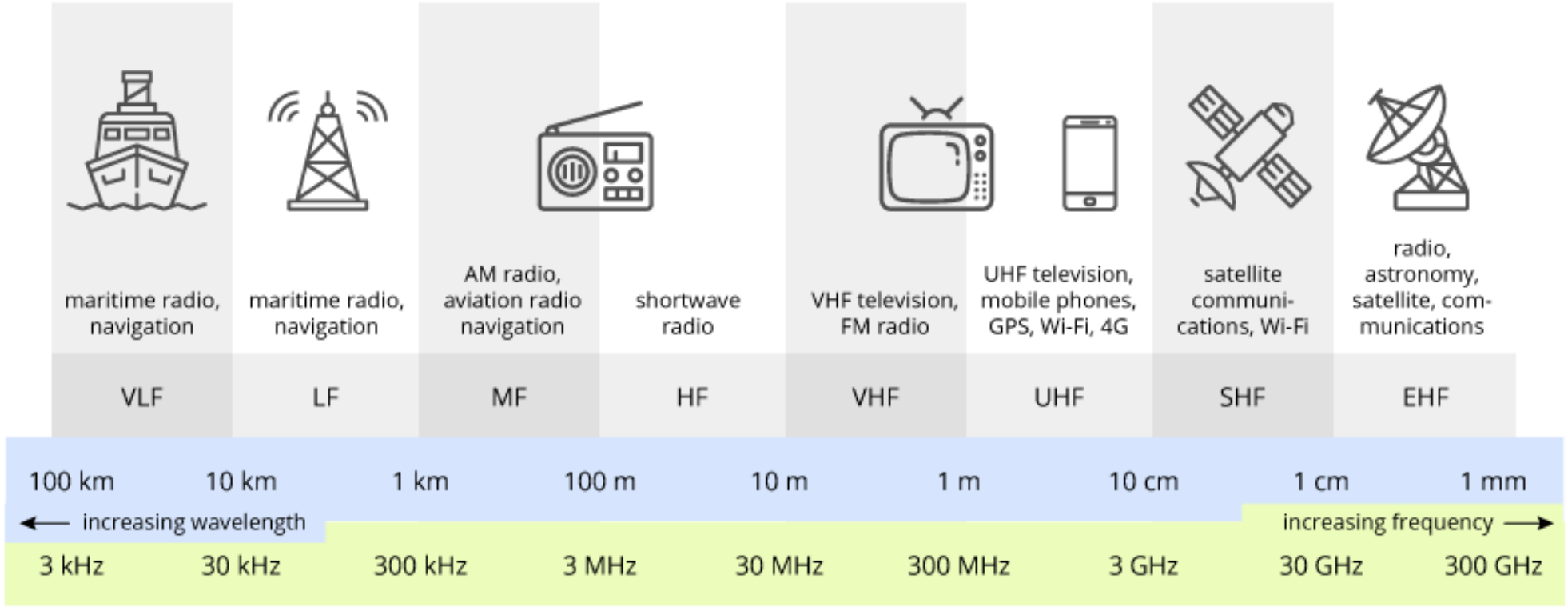
# Parámetros Concentrados

- Como la longitud de onda es tan grande, podemos asumir que el circuito recibe un campo que varía homogéneamente.
- En otras palabras, los cambios de voltaje se sienten iguales en toda la placa y a lo largo de todos los elementos del circuito.
- Esto se conoce como Parámetros concentrados.



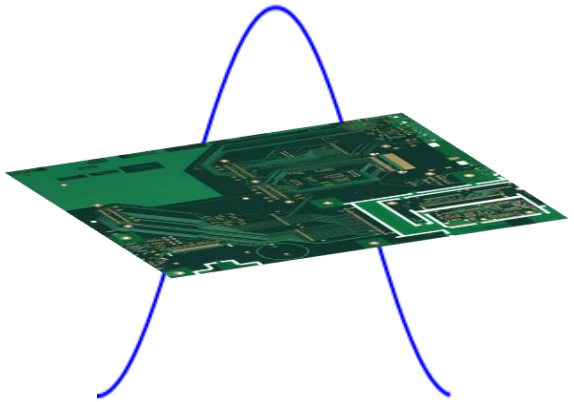
# Parámetros Distribuidos

- Cuando este supuesto no se cumple, la teoría de circuitos falla. Por tanto, debemos recurrir a la teoría de Líneas de Transmisión.



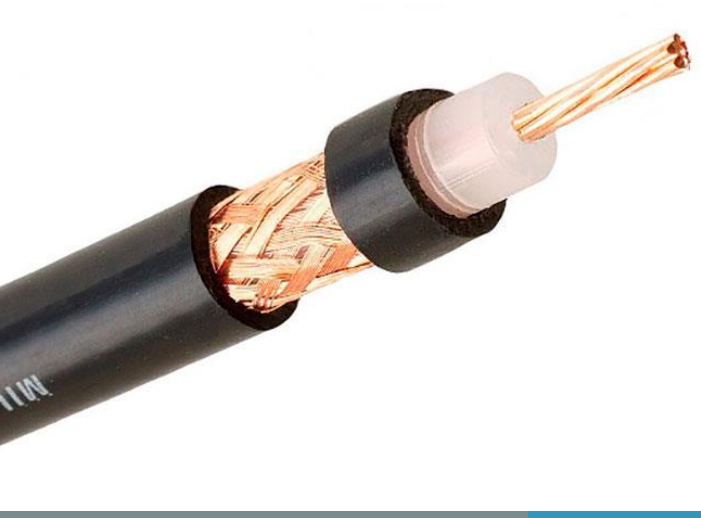
# Parámetros Distribuidos

- En este caso, las longitudes de onda son comparables al tamaño del circuito, cables, o incluso de algunos componentes. Por lo que los valores de campos, voltaje y corriente pueden variar a lo largo de ellos.



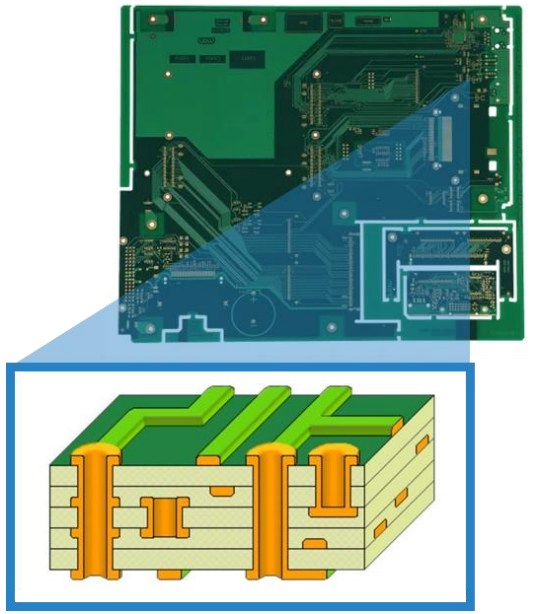
# Parámetros Distribuidos

- Las líneas de transmisión son empleadas para transportar ondas electromagnéticas.
- En este capítulo nos centraremos principalmente en 3 tipos de LT: cables coaxiales, cables paralelos y microstrips.



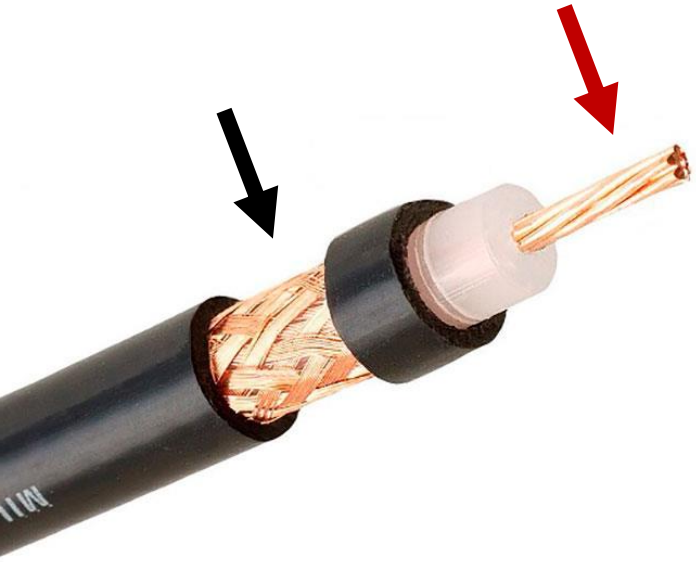


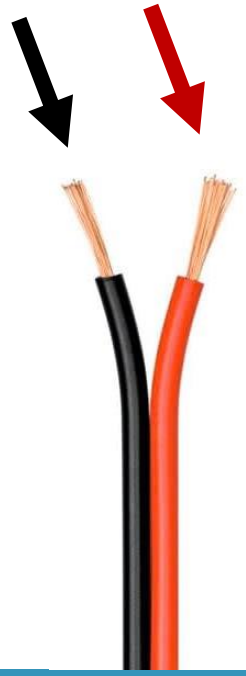




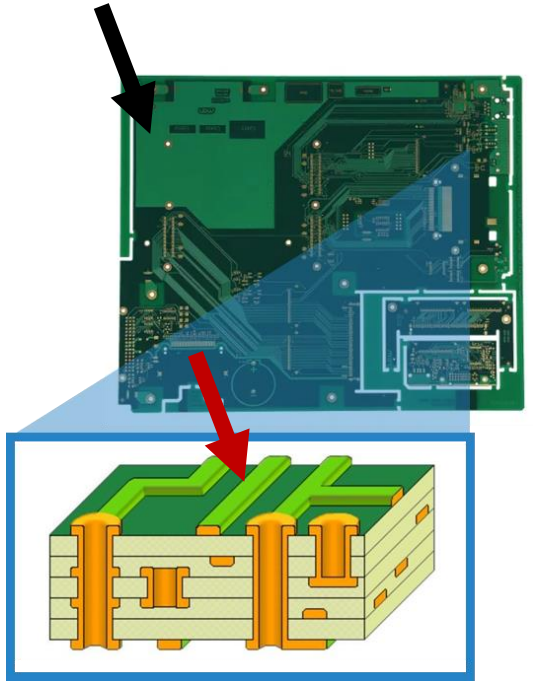
# Parámetros de una línea de transmisión

- En general, podemos representar una línea de transmisión como dos conductores.









# Parámetros de una línea de transmisión

- En general, podemos representar una línea de transmisión como dos conductores, que conectan un generador de ondas en un extremo, con una carga en el extremo opuesto.



# Parámetros de una línea de transmisión

- Adicionalmente, estos dos conductores suelen estar separados por algún medio dieléctrico. De modo que:



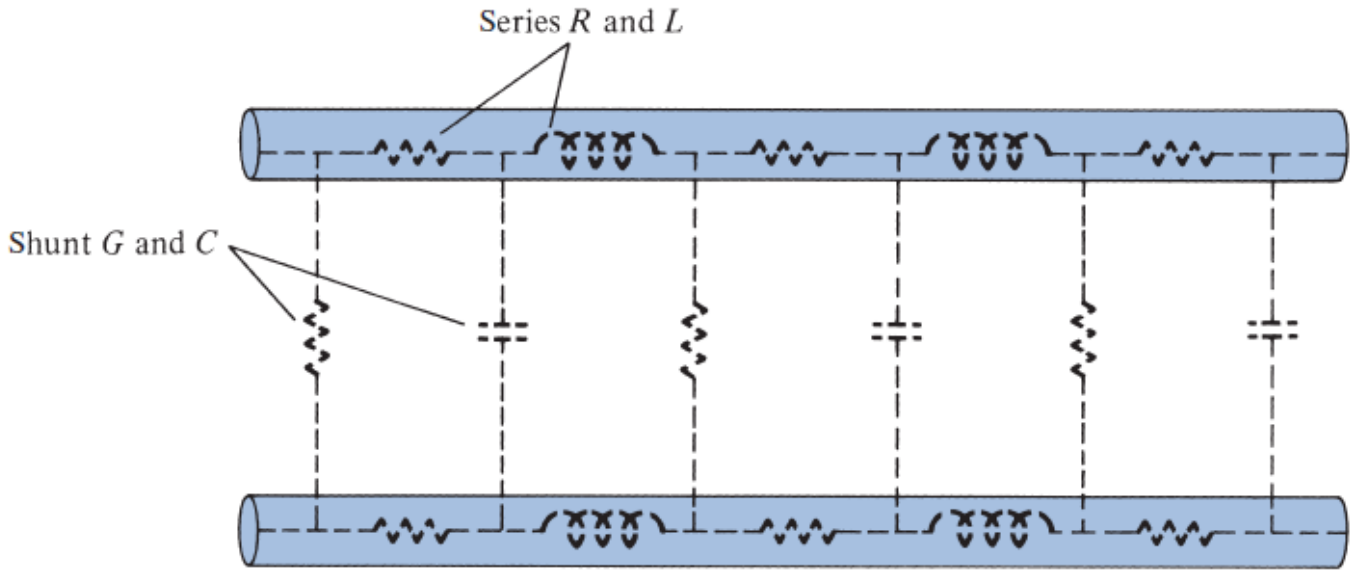
# Parámetros de una línea de transmisión

- Dado que la línea es un elemento conductor que transporta corriente. Tendrá una $L$ y una resistencia $R$ asociadas.
- Adicionalmente, como tenemos un dieléctrico, este tendrá cierta conductancia $G$, y generará una capacitancia $C$ entre las líneas.



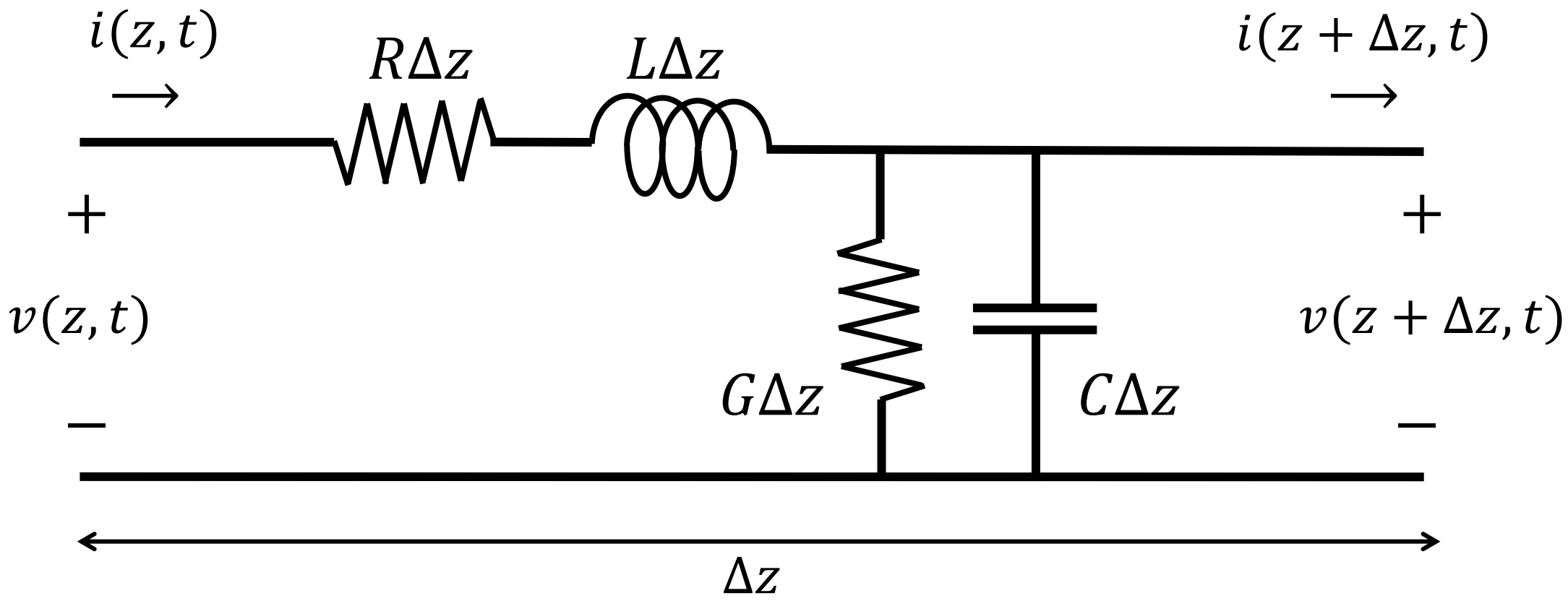
# Parámetros de una línea de transmisión

- **¡PERO!** Ahora la longitud de onda es comparable a las dimensiones de la línea. Por lo que no podemos asumir que dichos parámetros como discretos.
- Ahora se distribuyen uniformemente a lo largo de la línea



# Parámetros de una línea de transmisión

- Tomemos un trozo diferencial de la línea de transmisión.



# Ecuaciones de una línea de transmisión

- A partir de la figura anterior, podemos escribir las ecuaciones para voltaje y corriente:

$$v(z+\Delta z,t)-v(z,t)=-R\Delta z\, i(z,t)-L\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$i(z+\Delta z,t)-i(z,t)=-G\Delta z\, v(z,t)-\mathrm{C}\Delta z\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

# Ecuaciones de una línea de transmisión

- Dividamos por $\Delta z$ y tomemos el límite cuando $\Delta z \to 0$.
- Obtendremos las **Ecuaciones del Telegrafista**:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R\, i(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - \mathrm{C}\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

# Ecuaciones de una línea de transmisión

- Asumamos régimen sinusoidal permanente, de modo que podamos escribir todo en notación fasorial:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \qquad \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z)$$

- Derivando la primera e insertando la segunda, y viceversa:

$$\frac{d^2V(z)}{d^2z} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \qquad \frac{d^2I(z)}{d^2z} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z)$$

# Ecuaciones de una línea de transmisión

- Hagamos:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

- Reemplazando en las ecuaciones anteriores y reordenando, obtendremos las **Ecuaciones del Telefonista**:

$$\frac{d^2V(z)}{d^2z} - \gamma^2 V(z) = 0$$

$$\frac{d^2I(z)}{d^2z} - \gamma^2 I(z) = 0$$

# Ecuaciones de una línea de transmisión

- ¿Les resultan familiares?

$$\frac{d^2V(z)}{d^2z} - \gamma^2 V(z) = 0$$

$$\frac{d^2I(z)}{d^2z} - \gamma^2 I(z) = 0$$

# Ecuaciones de una línea de transmisión

- ¿Les resultan familiares?

$$\frac{d^2V(z)}{d^2z} - \gamma^2 V(z) = 0$$

$$\frac{d^2I(z)}{d^2z} - \gamma^2 I(z) = 0$$

- ¡Son ecuaciones de onda!
- ¿Cómo serán sus soluciones?

# Solución a las ecuaciones de LT

- Fasorialmente, podríamos escribir las magnitudes de la solución a la ecuación de onda como:

$$V(z) = V_0 e^{-\gamma z} \qquad I(z) = I_0 e^{-\gamma z}$$

- Pero las líneas de transmisión tienen **2 cables**, de modo que también hay ondas que viajan en sentido contrario. Luego:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}$$

# Solución a las ecuaciones de LT

- Fasorialmente, podríamos escribir las magnitudes de la solución a la ecuación de onda como:

$$V(z) = V_0 e^{-\gamma z} \qquad I(z) = I_0 e^{-\gamma z}$$

- Pero las líneas de transmisión tienen **2 cables**, de modo que también hay ondas que viajan en sentido contrario. Luego:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}$$

# Impedancia de una LT

- Derivando el voltaje y reemplazando en la ecuación del Telegrafista:

$$-\gamma\left(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}\right) = -(R + j\omega L)\left(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}\right)$$

- Trabajando cada fase por separado:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{(R + j\omega L)}{\gamma} \qquad Z_0 = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{(R + j\omega L)}{\gamma}$$

- Notemos que la impedancia es la misma.

# Impedancia de una LT

- Usando las impedancias, podemos escribir la corriente en función del voltaje:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

- Finalmente, las ecuaciones de onda en el dominio del tiempo serán:

$$v(z,t) = |V_0^+| e^{-\gamma z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_0^+) + |V_0^-| e^{\gamma z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_0^-)$$

$$i(z,t) = \frac{|V_0^+|}{Z_0} e^{-\gamma z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_0^+) - \frac{|V_0^-|}{Z_0} e^{\gamma z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_0^-)$$

# Resumen

- Establecimos las diferencias entre la teoría de circuitos y la teoría de líneas de transmisión, definiendo parámetros concentrados y distribuidos.
- Definimos una línea de transmisión, algunos ejemplos y su modelo general.
- Analizamos los parámetros de una línea de transmisión y definimos las ecuaciones que la definen.
- Resolvimos la ecuación de onda para una LT y determinamos su impedancia característica.

# Cerrando la clase de hoy

- Los parámetros de una línea de transmisión evidentemente dependerán del conductor y el dieléctrico.
- Analizaremos dichos casos la próxima clase.

Próxima Clase:

Líneas de transmisión con y sin pérdidas

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 560 – 571