Clase 25
WG Rectangulares: TEM/TE/TM

Sadiku, M. (2018).*Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 634 – 653

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- La clase pasada estudiamos las ondas TEM, TE y TM.
- Dedujimos algunas relaciones, y determinamos parámetros en el espacio libre.
- Ahora impondremos la condición de estar dentro de una guía de ondas rectangular.

- Objetivos de Aprendizaje:

  OA-18: Diseñar una guía de onda rectangular y determinar sus modos de propagación posibles, así como las pérdidas provocadas por el uso de conductores no perfectos.

Contenidos

- Ecuaciones de Helmholtz
- Guías Rectangulares: Caso TEM
- Guías Rectangulares: Caso TE
- Guías Rectangulares: Caso TM
- Modos TE_{mn} y TM_{mn}

Recordando: Ecuaciones de Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

- Recordando la notación fasorial:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon(j\omega)^2\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon(j\omega)^2\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla^2\mathbf{E} + \mu\varepsilon\omega^2\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla^2\mathbf{B} + \mu\varepsilon\omega^2\mathbf{B} = 0$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0} \qquad \boxed{\nabla^2\mathbf{B} + k^2\mathbf{B} = 0}$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

- Apliquemos la Ecuación de Helmholtz a la componente $\mathbf{E}_x$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_x = 0$$

- Pero la clase pasada vimos que en ondas TEM:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\beta E_x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\beta^2 E_x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

- Aplicando dicha condición:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+0\right)E_{sx}(x,y)e^{-j\beta z}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_{sx}=0$$

- Definamos

$$E_{sx}(x,y)=f(x)g(y)$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}=0$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

- Separando las 2 EDOs y resolviendo:

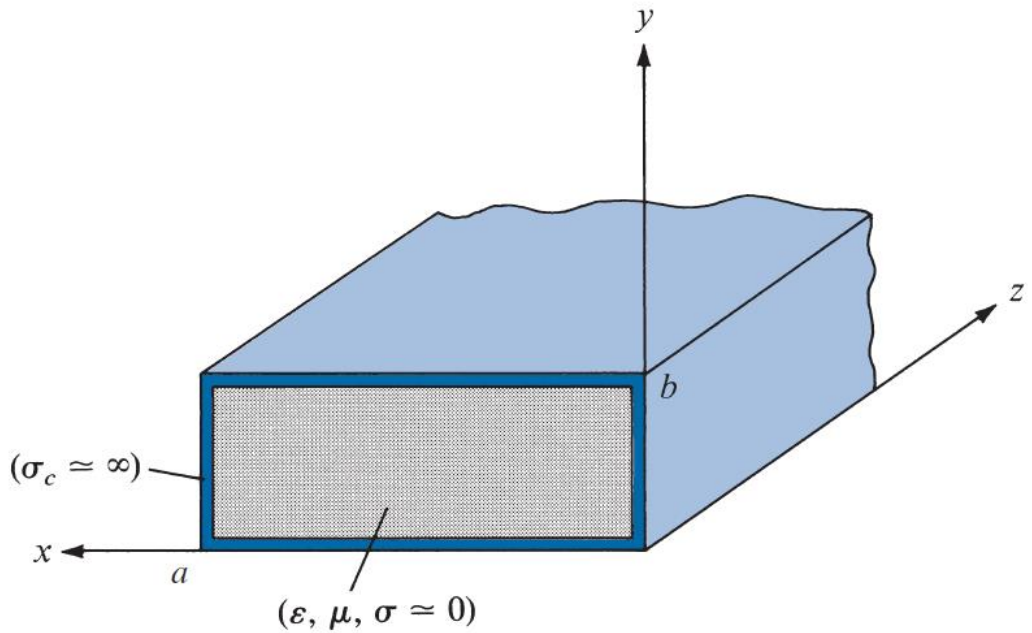
$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$f(x) = Ax + B \qquad g(y) = Cy + D$$

$$E_{sx}(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

- Consideremos el hecho de que ahora estamos en una guía de ondas rectangular, con paredes que son conductores perfectos:



- Por condiciones de borde:

$$E_{sx}(x,0) = 0$$
$$E_{sx}(x,b) = 0$$
$$E_{sx}(0,0) = 0$$
$$E_{sx}(a,b) = 0$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

- Aplicando las condiciones de borde:

$$E_{sx}(x,0) = D(Ax + B) = 0 \quad \Longrightarrow D = 0$$

$$E_{sx}(x,b) = (Ax + B)(Cb + D) = Cb(Ax + B) = 0 \quad \Longrightarrow C = 0$$

- Luego:

$$E_{sx}(x,y) = (Ax + B)(Cy + D) = 0$$

$$\boxed{E_x(x,y) = 0}$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

- Este mismo resultado ocurrirá con E_y, H_x y H_y.

- Conclusión:

En guías de ondas rectangulares no pueden existir ondas TEM

Guías Rectangulares: Caso TE

- Apliquemos la Ecuación de Helmholtz a la componente $\mathbf{E}_x$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_x = 0$$

- Pero la clase pasada vimos que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\beta E_x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\beta^2 E_x$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Reemplazando:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2-\beta^2\right)E_x=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)E_x=0$$

- Podemos hacer lo mismo para las demás componentes, incluyendo:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)H_z=0$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Reescribiendo la componente H_z:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)H_{sz}(x,y)e^{-j\beta z}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)H_{sz}(x,y)=0$$

- Podemos resolver con el método de separación de variables:

$$H_{sz}(x,y)=f(x)g(y)$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Resolvemos:

$$\frac{\partial^2\big(f(x)g(y)\big)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\big(f(x)g(y)\big)}{\partial y^2}+k_c^2 f(x)g(y)\ =0$$

$$g(y)\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+f(x)\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}+k_c^2 f(x)g(y)\ =0$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}+k_c^2=0$$

- Redefiniendo $k_c^2=k_x^2+k_y^2$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Separemos la ecuación:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}+k_x^2+k_y^2=0$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+k_x^2 f(x)\ =0 \qquad \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}+k_y^2 g(y)\ =0$$

$$f(x)=A\cos(k_x x)+B\sin(k_x x)$$

$$g(y)=C\cos(k_y y)+D\sin(k_y y)$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Recordando que definimos $H_{sz} = f(x)g(y)$

$$H_{sz} = [A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)]\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right]$$

- Ahora podemos aplicar las soluciones de Ondas TE vistas la clase pasada:

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad H_x = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Recordando que definimos $H_{sz}(x,y) = f(x)g(y)$

$$H_{sz}(x,y) = [A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)]\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right]$$

$$\frac{\partial H_{sz}}{\partial x} = k_x[-A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)]\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right]$$

$$\frac{\partial H_{sz}}{\partial x} = k_y[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)]\left[-C\sin\left(k_y y\right) + D\cos\left(k_y y\right)\right]$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Recordando que definimos $H_{sz} = f(x)g(y)$

$$E_{sx} = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_{sz}}{\partial y} = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2}[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)]\left[-C\sin\left(k_y y\right) + D\cos\left(k_y y\right)\right]$$

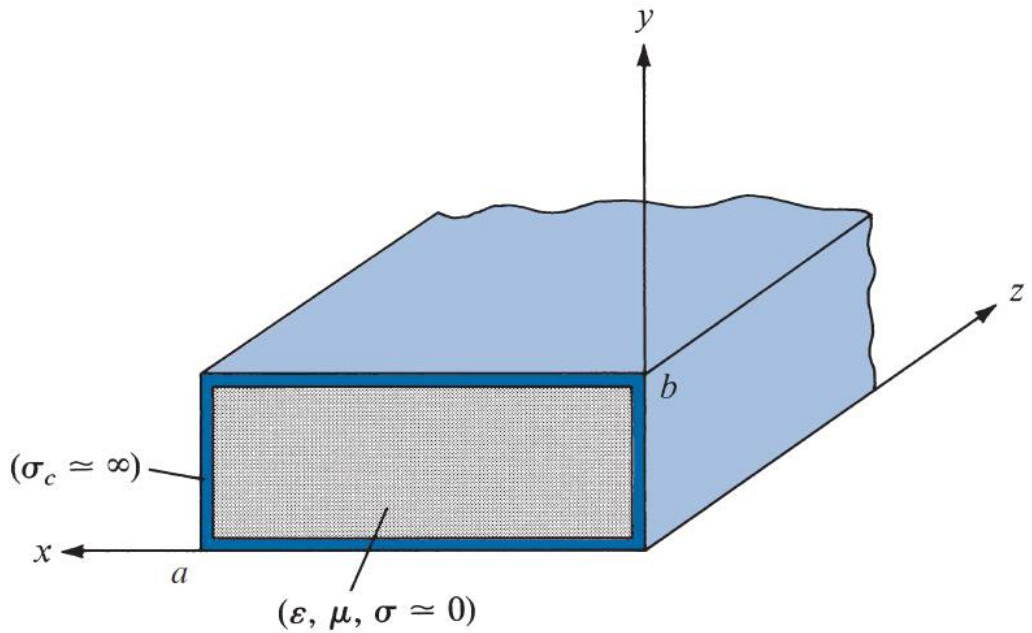
$$E_{sy} = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_{sz}}{\partial x} = \frac{j\omega\mu k_x}{k_c^2}[-A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)]\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right]$$

$$H_{sx} = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_{sz}}{\partial x} = -\frac{j\beta k_x}{k_c^2}[-A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)]\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right]$$

$$H_{sy} = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_{sz}}{\partial y} = \frac{-j\beta k_y}{k_c^2}[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)]\left[-C\sin\left(k_y y\right) + D\cos\left(k_y y\right)\right]$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Consideremos el hecho de que ahora estamos en una guía de ondas rectangular, con paredes que son conductores perfectos:



- Por condiciones de borde:

$$E_{sx}(x,0) = 0$$
$$E_{sx}(x,b) = 0$$
$$E_{sy}(0,y) = 0$$
$$E_{sy}(a,y) = 0$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Veamos para E_{sx}:

$$E_{sx}(x,0) = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} D[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)] = 0 \quad \Longrightarrow D = 0$$

$$E_{sy}(0,y) = \frac{j\omega\mu k_x}{k_c^2} B\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right] = 0 \quad \Longrightarrow B = 0$$

$$E_{sx}(x,b) = \frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} AC\cos(k_x x)\sin\left(k_y b\right) = 0$$

$$E_{sy}(a,y) = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} AC\sin(k_x a)\cos\left(k_y y\right) = 0$$

Debemos descartar la solución obvia con $A = C = 0$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Veamos para E_{sx}:

$$E_{sx}(x,0) = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} D[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)] = 0 \quad \Longrightarrow D = 0$$

$$E_{sy}(0,y) = \frac{j\omega\mu k_x}{k_c^2} B\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right] = 0 \quad \Longrightarrow B = 0$$

$$E_{sx}(x,b) = \frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} AC\cos(k_x x)\sin\left(k_y b\right) = 0 \quad \Longrightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$E_{sy}(a,y) = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} AC\sin(k_x a)\cos\left(k_y y\right) = 0 \quad \Longrightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Luego, aplicando estas condiciones a $H_{sz}(x,y)$:

$$H_{sz}(x,y) = \left[A\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + 0\right]\left[C\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + 0\right]$$

$$H_{sz}(x,y) = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

- Asimismo:

$$H_z(x,y) = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

Guías Rectangulares: Caso TE

- Luego, el resto de campos será:

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Guías Rectangulares: Caso TM

- Mismo análisis, distinto Modo. Ahora analizamos E_z:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)E_z=0$$

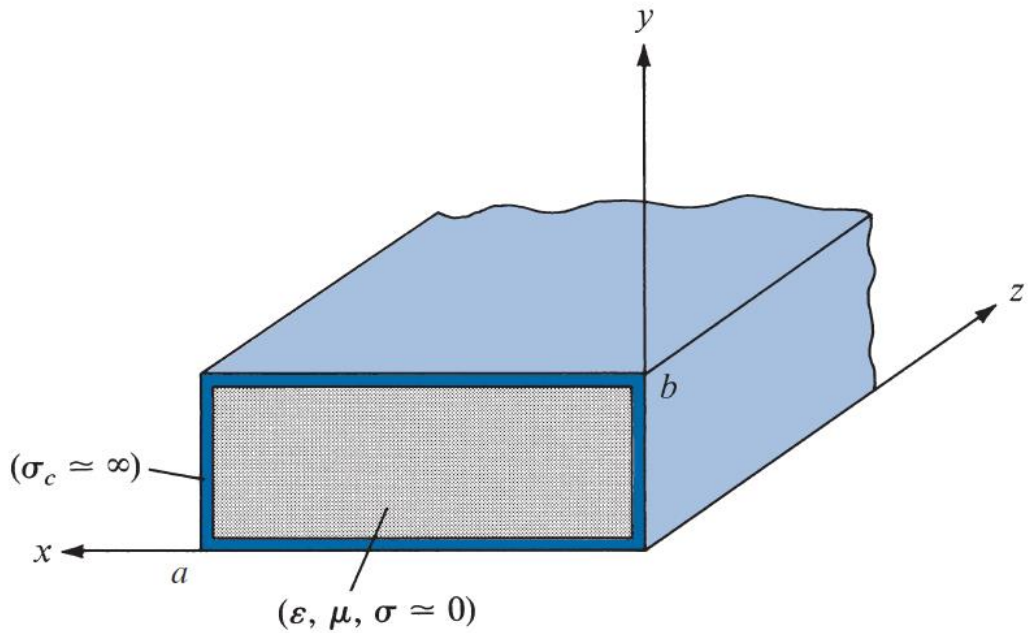
$$E_{sz}=[A\cos(k_x x)+B\sin(k_x x)]\left[C\cos\left(k_y y\right)+D\sin\left(k_y y\right)\right]$$

- Pero las ecuaciones de campos ahora serán para el modo TM:

$$E_x=\frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad E_y=\frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_x=\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_y=\frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Guías Rectangulares: Caso TM

- Las condiciones de borde son evidentemente las mismas.



$$E_{sz}(x,0) = 0$$
$$E_{sz}(x,b) = 0$$
$$E_{sz}(0,y) = 0$$
$$E_{sz}(a,y) = 0$$

Guías Rectangulares: Caso TM

- Esta vez, aplicamos las condiciones directo sobre E_z:

$$E_{sz}(x,0) = C[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)] = 0 \quad \Longrightarrow C = 0$$

$$E_{sz}(0,y) = A\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right] = 0 \quad \Longrightarrow A = 0$$

$$E_{sz}(x,b) = BD\sin(k_x x)\sin\left(k_y b\right) = 0$$

$$E_{sz}(a,y) = BD\sin(k_x a)\sin\left(k_y y\right) = 0$$

Debemos descartar la solución obvia con $\mathrm{B} = D = 0$

Guías Rectangulares: Caso TM

- Esta vez, aplicamos las condiciones directo sobre E_z:

$$E_{sz}(x,0) = C[A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)] = 0 \quad \Longrightarrow C = 0$$

$$E_{sz}(0,y) = A\left[C\cos\left(k_y y\right) + D\sin\left(k_y y\right)\right] = 0 \quad \Longrightarrow A = 0$$

$$E_{sz}(x,b) = BD\sin(k_x x)\sin\left(k_y b\right) = 0 \quad \Longrightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$E_{sz}(a,y) = BD\sin(k_x a)\sin\left(k_y y\right) = 0 \quad \Longrightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$$

Guías Rectangulares: Caso TM

- Luego, aplicando estas condiciones a $H_{sz}(x,y)$:

$$E_{sz}(x,y) = \left[0 + B\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right]\left[0 + D\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]$$

$$E_{sz}(x,y) = B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

- Asimismo:

$$E_z(x,y) = B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

Guías Rectangulares: Caso TM

- Luego, el resto de campos será:

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Modos TE_{mn} y TM_{mn}

- Anteriormente concluimos que:

$$H_z^{TE}(x,y) = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

$$E_z^{TM}(x,y) = B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

- Notemos que tenemos infinitas soluciones posibles, dependiendo de los valores de m y n.
- A partir de estos valores, generaremos distintos patrones de campo, conocidos como **modos $\boldsymbol{TE_{mn}}$** y modos $\boldsymbol{TM_{mn}}$

Modos TE_{mn}

- Tomemos el caso TE_{mn}, cuyas soluciones son:

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Modos TE_{mn}

- Para el modo TE_{00}:

$$E_x = 0 \qquad H_x = 0$$
$$E_y = 0 \qquad H_y = 0$$

De modo que este modo **no existe en WG rectangulares.**

- Para modos TE_{m0}:

$$E_x = 0 \qquad H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A_{m0} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \qquad H_y = 0$$

Modos TE_{mn}

- Para modos TE_{0n}:

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \qquad H_x = 0$$

$$E_y = 0 \qquad H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Modos TM_{mn}

- Tomemos el caso TM_{mn}, cuyas soluciones son:

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Modos TE_{mn}

- Para el modo TM_{00}:

$$E_x = 0 \qquad H_x = 0$$
$$E_y = 0 \qquad H_y = 0$$

De modo que este modo **no existe en WG rectangulares.**

- Para modos TM_{m0}:

$$E_x = 0 \qquad H_x = 0$$
$$E_y = 0 \qquad H_y = 0$$

De modo que estos modos **no existen en WG rectangulares.**

Modos TM_{mn}

- Para el modo TM_{0n}:

$$E_x = 0 \qquad H_x = 0$$
$$E_y = 0 \qquad H_y = 0$$

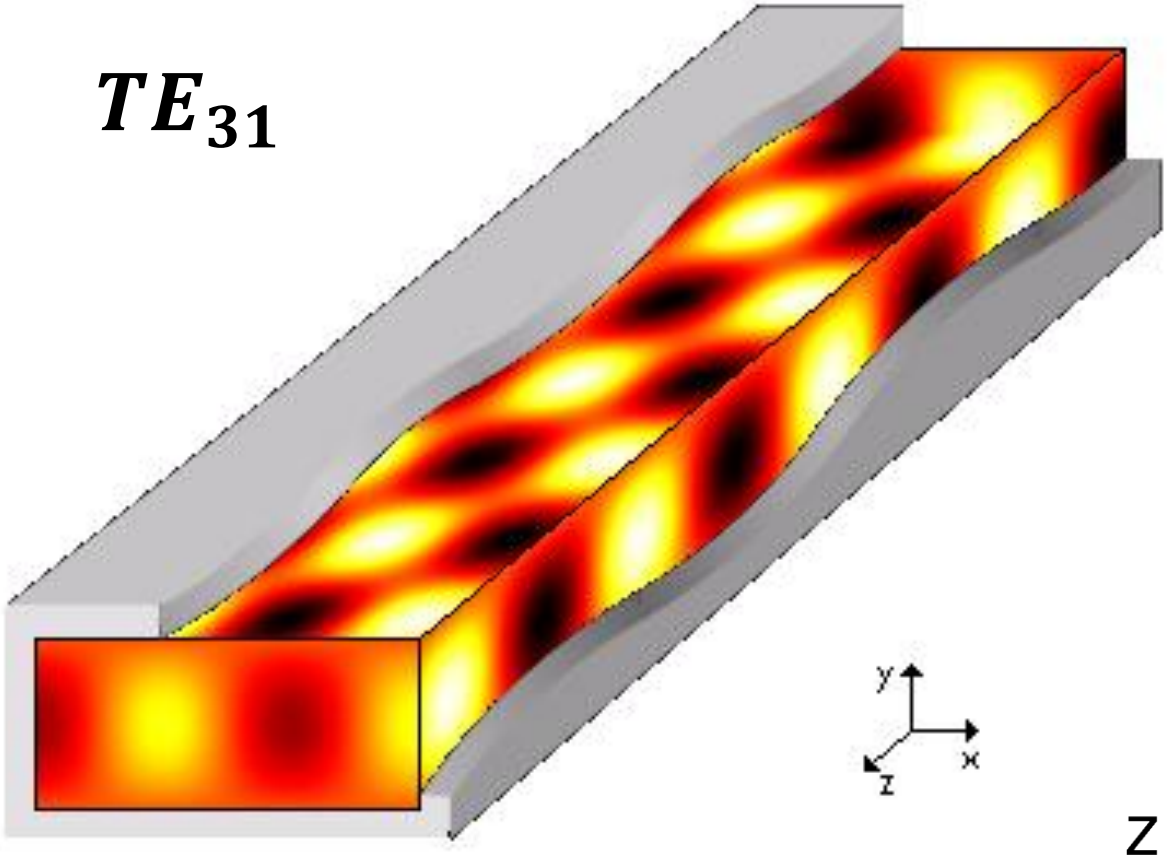
De modo que este modo **no existe en WG rectangulares.**

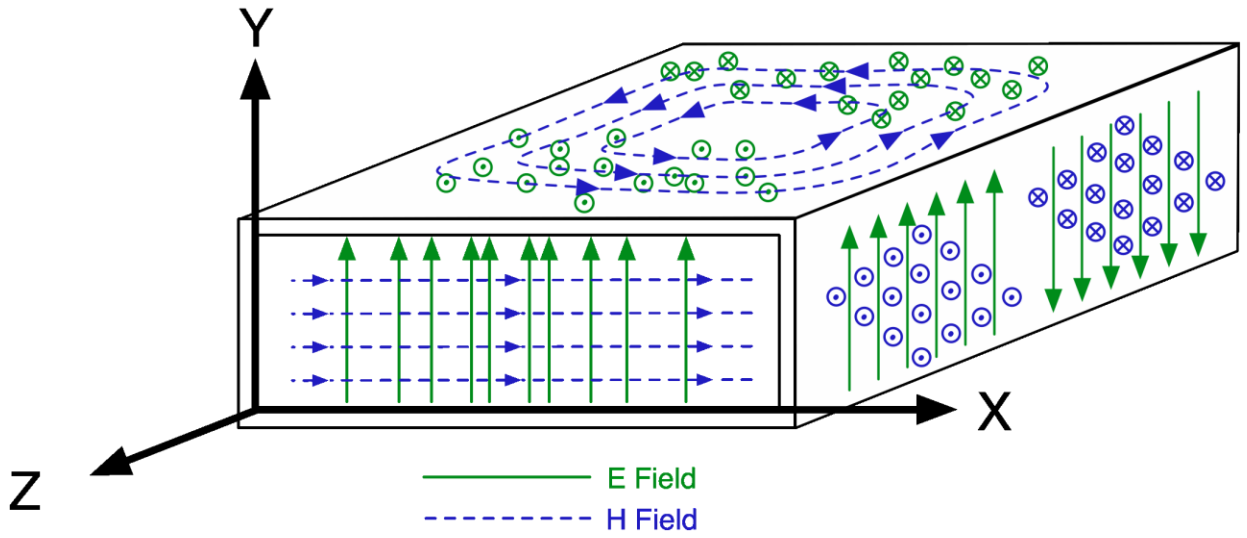
- De modo que la condición de existencia para los modos TM en WG rectangulares es:

$$m \neq 0 \qquad n \neq 0$$

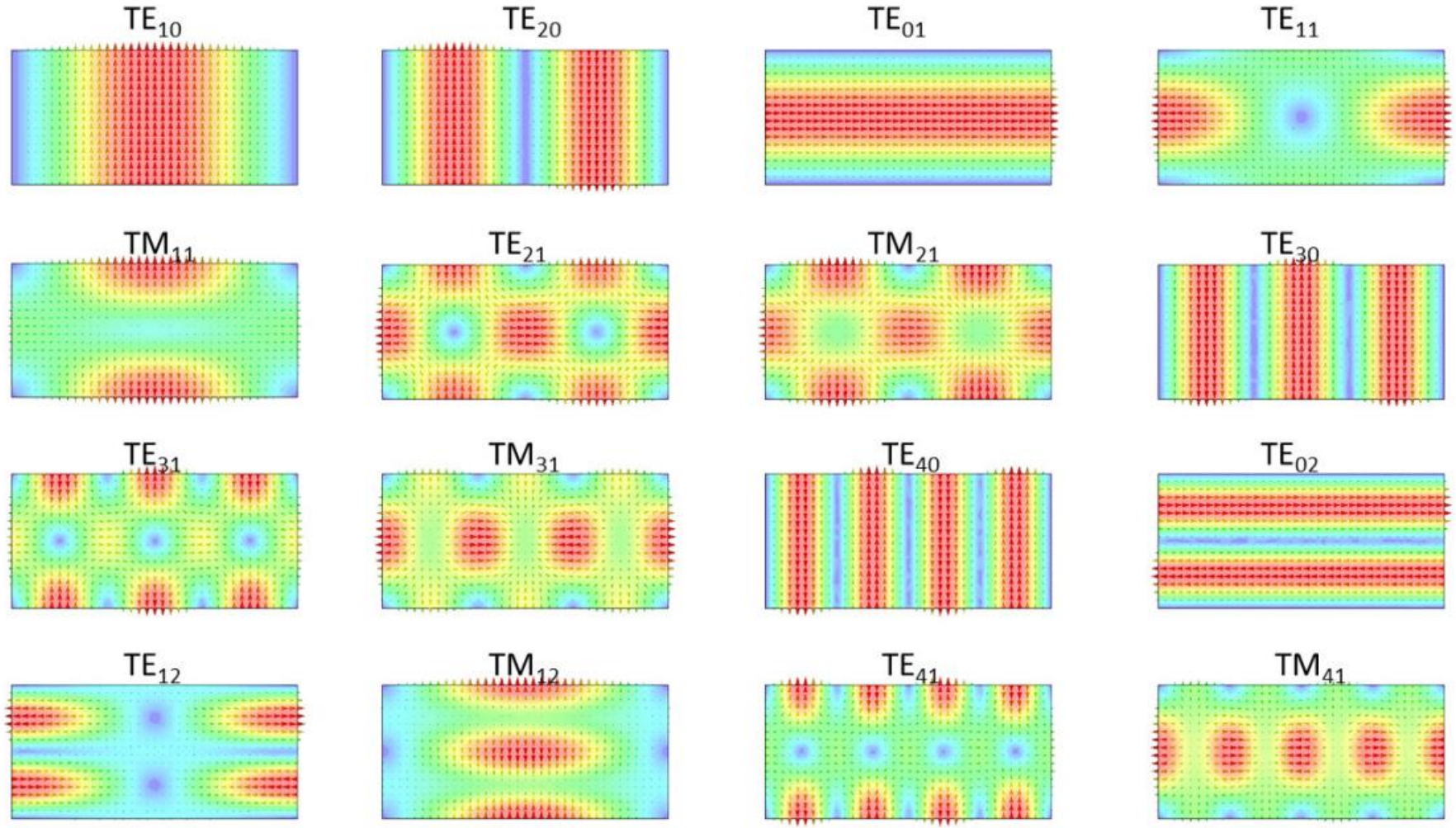
¿Cómo luce un modo TE_{mn} , TM_{mn}?

TE_{31}





¿Cómo luce un modo TE_{mn} , TM_{mn} ?



Jensen E. (2013). Proceedings of the CAS-CERN Accelerator School: Advanced Accelerator Physics.

Resumen

- Restringimos nuestro análisis pasado al caso de WG rectangulares.
- Demostramos la infactibilidad de ondas TEM en WG rectangulares.
- Deducimos las ecuaciones de ondas TE y TM en WG rectangulares.
- Estudiamos algunos casos particulares y la condición de existencia de los modos TM.
- Vimos cómo lucen los modos TE y TM.

Cerrando la clase de hoy

- Ya determinamos las ecuaciones de WG rectangulares.
- Nos queda realizar el mismo análisis de propagación que hemos visto en otros capítulos: frecuencias, velocidades, atenuación, potencia, etc.

Próxima Clase:

Propagación en WG rectangulares.

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 654 – 665.