Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Teoría Electromagnética IEE2113
Profesora: Marilyn Cruces
Ayudantes: Sebastián Silva, Pilar Merino, Javier Villegas, Joaquín Monje, Antonio Dávila, David Rodríguez

---

Interrogación I

Instrucciones

- Tiempo Límite de la Evaluación: 2 horas.
- Puntaje Máximo: 5 puntos.
- Se prohíbe el uso de otros dispositivos electrónicos, tales como celulares, tablets, computadores, etc.
- Responda cada pregunta en una hoja separada. No combine respuestas de distintas preguntas en una misma hoja.
- Para cada pregunta escriba su nombre y el número de pregunta en la hoja correspondiente. Aquellas hojas que carezcan de esta información no serán corregidas.
- Responda con letra legible. Desarrollos tachados o garabateados no serán considerados en la corrección. En caso de que se solicite una expresión o respuesta numérica, está debe estar reducida a su mínimo, claramente señalada, y encerrada en un recuadro.
- Solo habrá 3 instancias de dudas: al inicio de la evaluación, a los 45 minutos y a los 90 minutos. Las dudas a tratar serán exclusivamente de enunciado.
- Este curso se adscribe y compromete al Código de Honor UC.
- En caso de detectar copia u otro tipo de acto deshonesto en esta evaluación, se le solicitará firmar esta hoja a modo de respaldo. La falta implicará la reprobación inmediata del curso con nota 1.1 y el caso será notificado a la Dirección de Pregrado.

Pregunta 1

a) Explique qué es la *fem*, cómo se deduce y su conexión con la *fem* inducida. (0.3 pts)

- Mencionar que no es una fuerza en el sentido mecánico si no el trabajo realizado por una fuente para mover una carga eléctrica a lo largo del circuito.
- Se deduce desde la ley de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Por definición, el lado izquierdo es la fuerza electromotriz (fem) inducida en el circuito:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Luego se obtiene

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Definiendo el flujo magnético como:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Por ende

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- La *fem* puede surgir de fuentes distintas, como reacciones químicas para el caso de la pila. Una en particular es la *fem* inducida, en la cual un cambio de flujo magnético induce una diferencia de potencial que mueve cargas a través de un circuito cerrado.

b) Explique el rol de la relatividad especial en el contexto del electromagnetismo. (0.2 pts)

Un ejemplo clásico es el de un observador moviéndose junto a un cable con corriente: en un marco, el cable es neutro y aparece un campo magnético que desvía una carga en movimiento; en otro, hay una contracción de longitudes que hace aparecer una densidad de carga neta (por contracción de electrones o protones), generando un campo eléctrico. Aunque el mecanismo cambia con el marco, el efecto final sobre la carga de prueba es el mismo.

c) Explique las diferencias entre la propagación de una onda electromagnética en el vacío vs en la materia y cuáles son las simplificaciones que se pueden hacer en el caso de un material simple. Describa qué constantes caracterizando el medio aparecen y como se comparan estas con el vacío. (0.3 pts)

Vacío vs. Materia:

- En el vacío, las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz, mientras que en la materia la velocidad de propagación es menor y depende del medio.

- En la materia, hay que considerar la reacción del medio al paso de la onda EM, como la polarización y la magnetización.

Simplificaciones para un Material Dieléctrico Simple:

- La polarización P cambia linealmente con el campo eléctrico E.
- La magnetización M cambia linealmente con el campo magnético H.
- No hay conductividad, por lo que no se generan corrientes libres, simplificando las ecuaciones de Maxwell.

Constantes caracterizando el medio: en lugar de usar las constantes del vacío, se trabaja con la permitividad ε y la permeabilidad μ del medio, que se relacionan con las del vacío mediante factores relativos: $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ y $\mu = \mu_r \mu_0$.

d) Considerando una onda electromagnética propagándose en un medio simple, derive la ecuación de propagación que obedece el campo magnético. (0.2 pts)

Partimos de la cuarta ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Aplicamos el rotacional a ambos lados:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times \left(\mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Para un medio simple sin corrientes libres ($\vec{J} = 0$):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu\varepsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Usamos la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

Y la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

Entonces:

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

Aplicamos la tercera ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Sustituimos:

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \left(-\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right)$$

Finalmente:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Pregunta 2

Considere un solenoide ideal orientado en la dirección z inmerso en un medio simple, en cuyo interior se encuentra un campo de intensidad dado por:

$$\mathbf{H}(t) = H_0 \cos(\omega t)\, \hat{z}\,.$$

a) Determine el campo eléctrico inducido $\mathbf{E}$ en el interior del solenoide. (0.4 pts)

Uso la tercera ecuación de Maxwell:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Elijo una trayectoria circular de radio r, centrada en el eje del solenoide:

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}(\mu H_0 \pi r^2 \cos(\omega t))$$

$$E \cdot 2\pi r = \mu\pi r^2 H_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t) = \mu r \omega H_0 \sin(\omega t)\, \hat{\theta}$$

b) Calcule el vector de Poynting en la región interior del solenoide. Explique en qué dirección apunta. (0.5 pts)

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\mu r \omega H_0 \sin(\omega t) \cdot H_0 \cos(\omega t)\, [\hat{\theta} \times \hat{z}]$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\mu r \omega H_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)\, \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{4}\mu r\omega H_0^2 \sin(2\omega t)\,\hat{r}$$

Apunta en la dirección $\hat{r}$, la cual es hacia afuera del solenoide. Cómo $\hat{r}$ es angular este rota.

c) Calcule la potencia media transportada por el campo EM. (0.1 pts)

Esto se hace con el valor rms. Por lo tanto, tomamos:

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\mu r\omega H_0^2\right)$$

$$\langle S\rangle = \frac{1}{8}\mu r\omega H_0^2$$

Pregunta 3

Los muones son partículas que se generan a 10 km de altura sobre la superficie de la Tierra, tras la interacción de rayos cósmicos con la atmósfera. Los muones son inestables y decaen espontáneamente a un electrón y dos neutrinos, con un decaimiento dado por la exponencial

$$N(t) = N_0\, e^{-t/\tau},$$

donde N_0 es el número inicial de muones y τ su vida media. Si los muones viajan a una velocidad de $0.998\,\mathrm{c}$ y tienen una vida media en reposo de $2.2\,\mu s$.

a) ¿Qué distancia atraviesa el muón en su propio marco antes de decaer? (0.2 pts)

En el marco del muón, este está en reposo porque no se mueve. Sin embargo, lo que sí se puede determinar es, desde el punto de vista del muón, cuál es la distancia del lugar de su creación al suelo. De acuerdo al muón, la Tierra se acerca a este con una velocidad $v = 0.998\,c$.

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

$$= 0.998 \cdot 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} \approx 660\,\mathrm{m}$$

Según el muón, la distancia que recorre antes de decaer es aproximadamente $\sim 660\,\mathrm{m}$.

b) ¿Cuál es la distancia máxima que recorre el muón según un observador en la Tierra? (0.4 pts)

En el marco de la Tierra, el muón al moverse a una velocidad de $0.998\,c$ experimenta dilatación temporal:

$$\tau' = \gamma \cdot \tau = 16 \cdot 2.2\,\mu\mathrm{s} \approx 35\,\mu\mathrm{s}$$

Luego, la distancia recorrida desde la Tierra es:

$$d = v \cdot \tau' = 0.998\, c \cdot 35 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$$
$$= 0.998 \cdot 3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s} \cdot 35 \cdot 10^{-6}\,\text{s} \approx 10.4\,\text{km}$$

c) Según un observador en la Tierra, ¿qué fracción del número inicial de muones sobrevive después de recorrer 10 km? (0.2 pts)

Según un observador en la Tierra, la fracción de muones que sobrevive después de recorrer 10 km está dada por:

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{N_0} = e^{-t/\tau}$$

El tiempo que el muón tarda en recorrer 10 km es:

$$t_{10\,\text{km}} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{10\,000\,\text{m}}{3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s}} \approx 33\,\mu\text{s}$$

Sustituyendo:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-33\,\mu\text{s}/35\,\mu\text{s}} \approx e^{-0.94} \approx 0.39$$

Entonces, aproximadamente el 39% de los muones sobrevive después de recorrer 10 km.

d) ¿Cómo se relacionan ambas mediciones para explicar la detección de muones en la superficie? (0.2 pts)

Si no existiera dilatación temporal, el tiempo de vida del muón sería de apenas 2.2 μs, lo cual le permitiría recorrer solamente una distancia de aproximadamente 660 m. Esto es muy inferior a los 10 km necesarios para llegar al suelo, por lo que sin dilatación temporal prácticamente **ningún muón** alcanzaría a detectarse en la superficie terrestre.

Pregunta 4

Considere que para un observador en reposo, un campo electromagnético está dado por:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \left[\cos(\theta)\,\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\,\hat{\mathbf{y}}\right] \cos\big(kz - \omega t\big)$$
$$\mathbf{B}(z,t) = B_0 \left[\cos(\theta)\,\hat{\mathbf{y}} - \sin(\theta)\,\hat{\mathbf{x}}\right] \cos\big(kz - \omega t\big)$$

Calcule el campo $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ visto por un observador moviéndose a una velocidad v a lo largo del eje x. (1 pt)

El tensor electromagnético está dado por:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

En nuestro caso:

- $E_z = 0,\ B_z = 0$
- $E_x = E_0 \cos(\theta) \cos(kz - \omega t)$
- $E_y = E_0 \sin(\theta) \cos(kz - \omega t)$
- $B_x = -B_0 \sin(\theta) \cos(kz - \omega t)$
- $B_y = B_0 \cos(\theta) \cos(kz - \omega t)$

Componente en $\hat{x}$
Como el observador se mueve a lo largo del eje x, estas componentes se mantienen invariantes:

$$E'_x = E_x = E_0 \cos(\theta) \cos(kz - \omega t)$$
$$B'_x = B_x = -B_0 \sin(\theta) \cos(kz - \omega t)$$

Componente en $\hat{y}$

$$\frac{E'_y}{c} = F'_{20} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Lambda_2^\mu \Lambda_0^\nu F_{\mu\nu} = \gamma \frac{E_y}{c} \Rightarrow E'_y = \gamma E_y = \gamma E_0 \sin(\theta) \cos(kz - \omega t)$$

$$B'_y = F'_{13} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Lambda_1^\mu \Lambda_3^\nu F_{\mu\nu} = \gamma B_y = \gamma B_0 \cos(\theta) \cos(kz - \omega t)$$

Componente en $\hat{z}$

$$\frac{E'_z}{c} = F'_{30} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Lambda_3^\mu \Lambda_0^\nu F_{\mu\nu} = \gamma\beta B_y \Rightarrow E'_z = \gamma \frac{v}{c} B_y = \gamma \frac{v}{c} B_0 \cos(\theta) \cos(kz - \omega t)$$

$$B'_z = F'_{21} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Lambda_2^\mu \Lambda_1^\nu F_{\mu\nu} = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y = \gamma \frac{v}{c^2} E_0 \sin(\theta) \cos(kz - \omega t)$$

Poniendo todo junto:

$$\vec{E}'(z,t) = \left[E_0 \cos(\theta)\, \hat{x} + \gamma E_0 \sin(\theta)\, \hat{y} + \gamma \frac{v}{c} B_0 \cos(\theta)\, \hat{z} \right] \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{B}'(z,t) = \left[-B_0 \sin(\theta)\, \hat{x} + \gamma B_0 \cos(\theta)\, \hat{y} + \gamma \frac{v}{c^2} E_0 \sin(\theta)\, \hat{z} \right] \cos(kz - \omega t)$$

Pregunta 5

Una onda armónica dada por:

$$\mathbf{E_1}(x,t) \ = \ E_{10} \, \sin\big(k_1 x - \omega_1 t\big) \, \hat{\mathbf{z}},$$
$$\mathbf{H_1}(x,t) \ = \ -H_{10} \, \sin\big(k_1 x - \omega_1 t\big) \, \hat{\mathbf{y}},$$

se propaga en un medio dieléctrico simple con permeabilidad μ_1 y permitividad ϵ_1.

a) Determine bajo qué condiciones estas ondas describen una onda electromagnética. (0.5 pts)

Partimos de las ecuaciones de Maxwell en un medio simple:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dado que los campos eléctricos y magnéticos son:

$$\vec{E}_1(x,t) = E_{10}\sin(k_1 x - \omega t)\,\hat{z}, \qquad \vec{H}_1(x,t) = -H_{10}\sin(k_1 x - \omega t)\,\hat{y}$$

Calculamos los rotacionales:

$$\nabla \times \vec{E}_1 = \left(0, -\frac{\partial E_z}{\partial x}, 0\right) = (0, -k_1 E_{10}\cos(k_1 x - \omega t), 0)$$

$$-\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\mu_1 \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = (0, \mu_1 \omega H_{10}\cos(k_1 x - \omega t), 0)$$

Igualando términos:

$$-E_{10}k_1\cos(k_1 x - \omega t) = \mu_1 \omega H_{10}\cos(k_1 x - \omega t) \quad \Rightarrow \quad E_{10}k_1 = -\mu_1 \omega H_{10}$$

Luego:

$$\nabla \times \vec{H}_1 = \left(0, 0, -\frac{\partial H_y}{\partial x}\right) = (0, 0, -k_1 H_{10}\cos(k_1 x - \omega t))$$

$$\frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} = \varepsilon_1 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = (0, 0, -\varepsilon_1 \omega E_{10}\cos(k_1 x - \omega t))$$

Igualando:

$$-k_1 H_{10} = -\varepsilon_1 \omega E_{10}$$

Entonces, para que estas funciones representen una onda electromagnética en un medio simple, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$E_{10}k_1 = \mu_1 \omega H_{10} \qquad \text{(condición 1)}$$

$$\varepsilon_1 \omega E_{10} = k_1 H_{10} \qquad \text{(condición 2)}$$

Dividiendo ambas condiciones entre sí, obtenemos:

$$\mu_1 \varepsilon_1 = \left(\frac{k_1}{\omega}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \varepsilon_1 = \frac{k_1^2}{\omega^2}$$

b) Si esta onda electromagnética pasa completamente a un segundo medio ideal, con permitividad ϵ_2, permeabilidad μ_2, normalmente en una frontera donde $x = 0$, determine la forma del campo magnético $\mathbf{H}_2(x,t)$ y eléctrico $\mathbf{E}_2(x,t)$ en el segundo medio. (0.4 pts)

Aplicamos condiciones de frontera para el paso completo de la onda de un medio al otro:

$$E_{T1} = E_{T2}, \qquad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$
$$H_{T1} = H_{T2}, \qquad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

como el campo solo tiene componentes tangenciales, las magnitudes se mantienen continuas en la frontera $x = 0$. Por tanto

$$\vec{E}_2(x,t) = E_{20}\sin(k_2 x - \omega t)\,\hat{z}$$
$$\vec{H}_2(x,t) = -H_{20}\sin(k_2 x - \omega t)\,\hat{y}$$

De las condiciones de onda:

$$\mu_2\varepsilon_2 = \left(\frac{k_2}{\omega}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$$

luego,

$$\vec{E}_2(x,t) = E_{20}\sin\left(\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,x - \omega t\right)\,\hat{z}$$

$$\vec{H}_2(x,t) = -H_{20}\sin\left(\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,x - \omega t\right)\,\hat{y}$$

La dirección de propagación no cambia, pero la longitud de onda sí, ya que depende de k_2, el cual cambia al pasar al nuevo medio.

c) Escriba estas ecuaciones en forma fasorial. (0.1 pts)

$$\vec{E}_1 = \mathrm{Re}\left[E_{10}e^{i(k_1 x - \omega t)}\hat{z}\right], \qquad \vec{H}_1 = \mathrm{Re}\left[-H_{10}e^{i(k_1 x - \omega t)}\hat{y}\right]$$

$$\vec{E}_2 = \mathrm{Re}\left[E_{20}e^{i(k_2 x - \omega t)}\hat{z}\right] = \mathrm{Re}\left[E_{20}e^{i(\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,x - \omega t)}\hat{z}\right]$$

$$\vec{H}_2 = \mathrm{Re}\left[-H_{20}e^{i(k_2 x - \omega t)}\hat{y}\right] = \mathrm{Re}\left[-H_{20}e^{i(\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,x - \omega t)}\hat{y}\right]$$