Clase 06
Magnetostática en el Vacío

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 297 – 325

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 349 – 367

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- La clase pasada logramos introducir el concepto de magnetismo como un fenómeno relativista del movimiento de cargas.
- Análogo al caso eléctrico, estudiaremos el caso de campos magnéticos estáticos en el vacío.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-01:** Plantear y resolver ecuaciones para la determinación de Fuerzas, Campos, Flujos, Potenciales, Torques y Energías electromagnéticas en problemas de mediana complejidad.
- **OA-02:** Comprender y aplicar el concepto de expansión multipolar para la estimación precisa de campos electromagnéticos.
- **OA-05:** Determinar e interpretar la relación entre electricidad y magnetismo, empleando los elementos de la Mecánica Relativista.

Contenidos

- Electrodinámica Relativista
- Ley de Biot-Savart
- Ley de Ampère
- Flujo Magnético
- Potencial Magnético
- Energía Magnética
- Ley de Lorentz
- Torque Magnético
- Dipolo Magnético

Electrodinámica Relativista

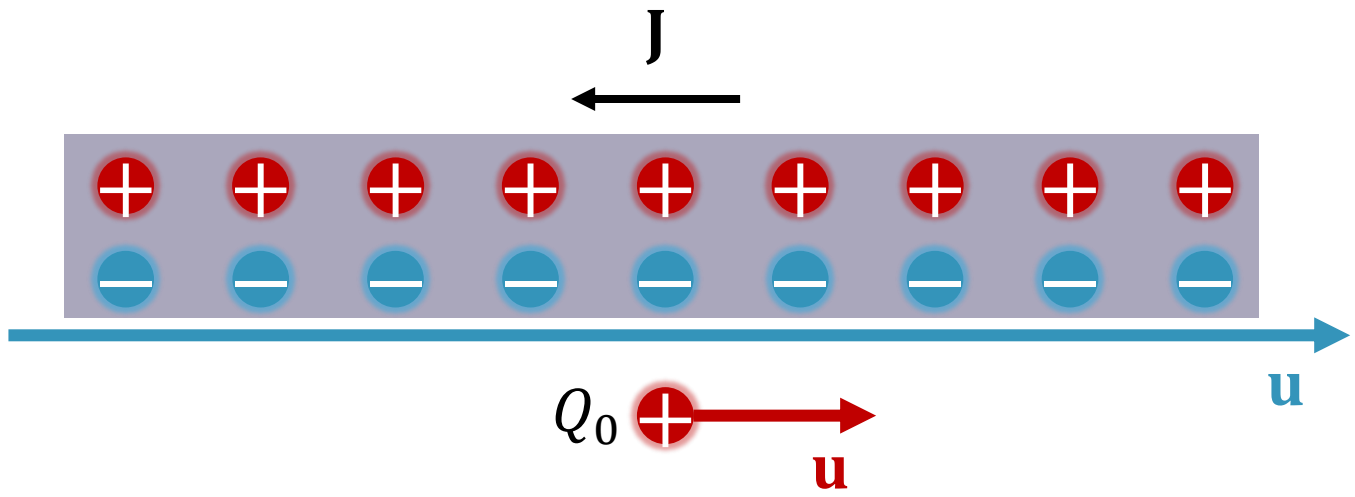
- Anteriormente vimos que el magnetismo no es más que un efecto relativista de la electrodinámica.

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv + Q_0 \mathbf{u} \times \left[\mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right]$$

Ley de Coulomb ***Ley de Biot-Savart***

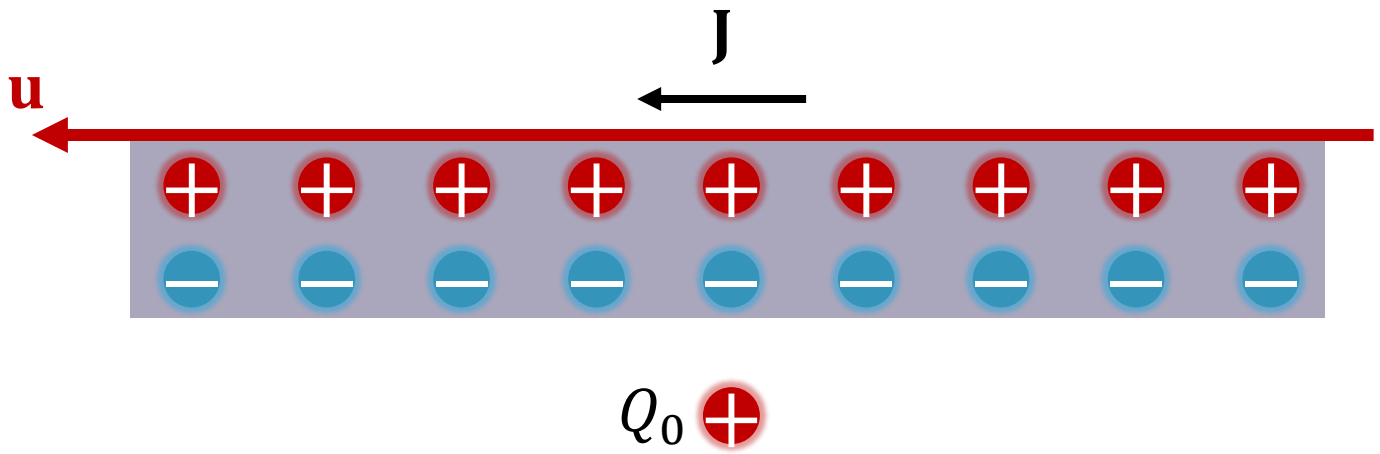
Electrodinámica Relativista

Consideremos un cable con un Flujo de electrones $-\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{u}$ y una carga de prueba Q_0 que se mueve con igual rapidez y sentido. Consideremos el cable como sistema inercial de referencia.



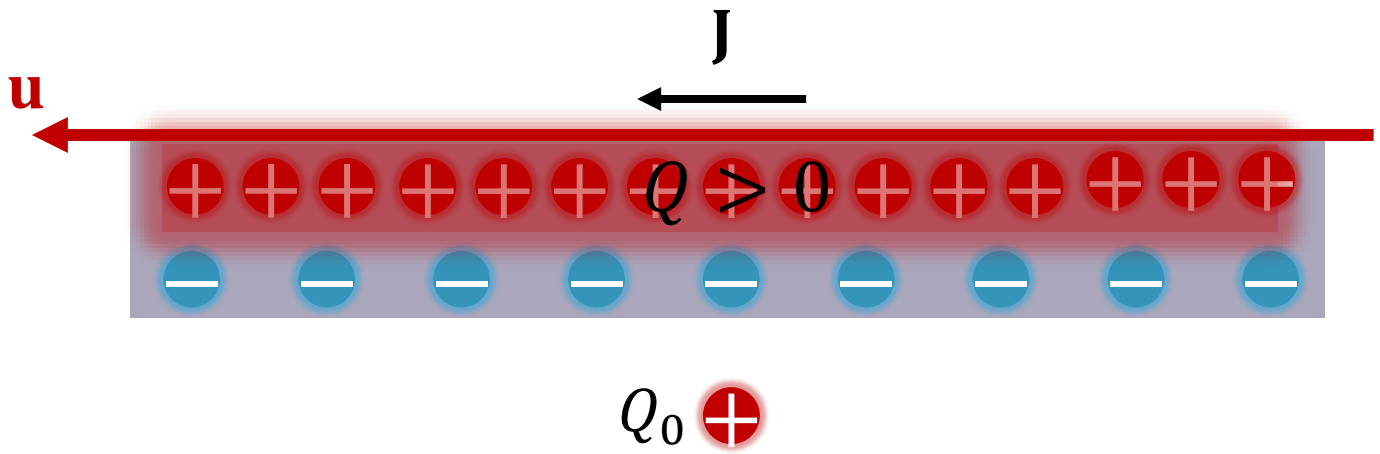
Electrodinámica Relativista

Ahora cambiemos de sistema inercial y posicionémonos sobre los electrones.



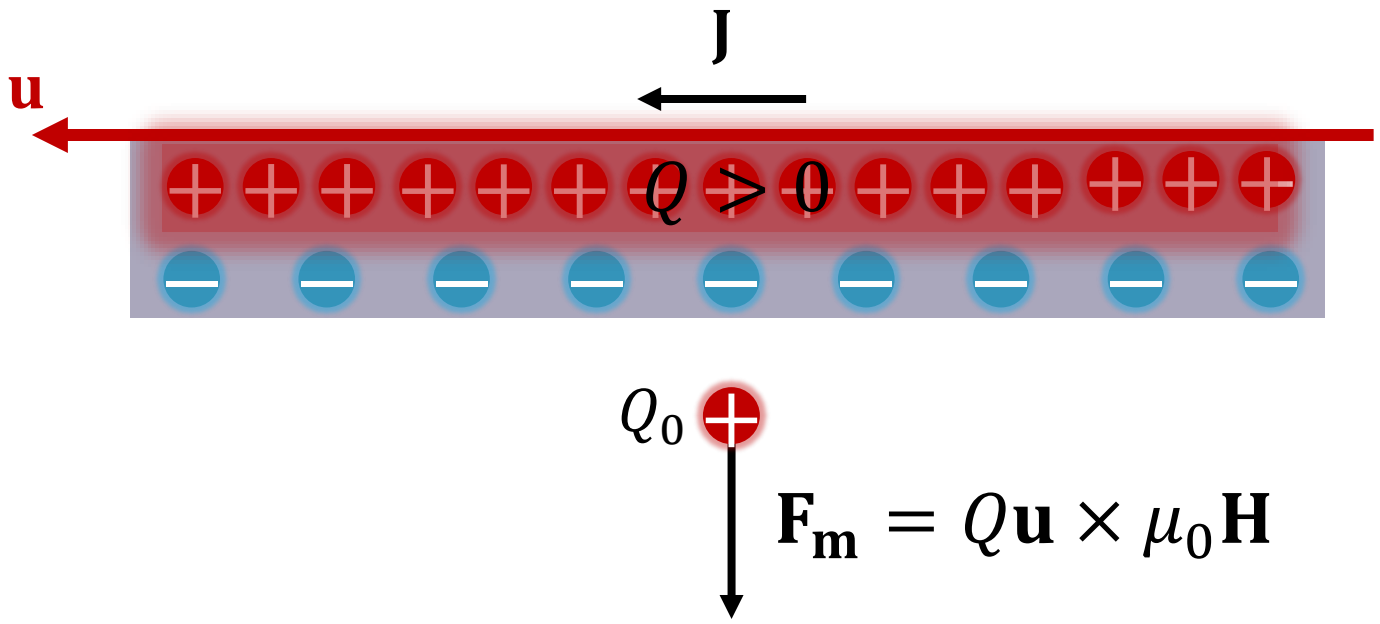
Electrodinámica Relativista

Por contracción de longitudes, la carga Q_0 percibirá los protones en movimiento como si estuviesen más cerca, generando una densidad de carga positiva.



Electrodinámica Relativista

En consecuencia, la carga de prueba experimentará una fuerza en sentido radial al cable, que la alejará de este. A esta fuerza la llamamos “Fuerza Magnética”.



Ley de Biot-Savart

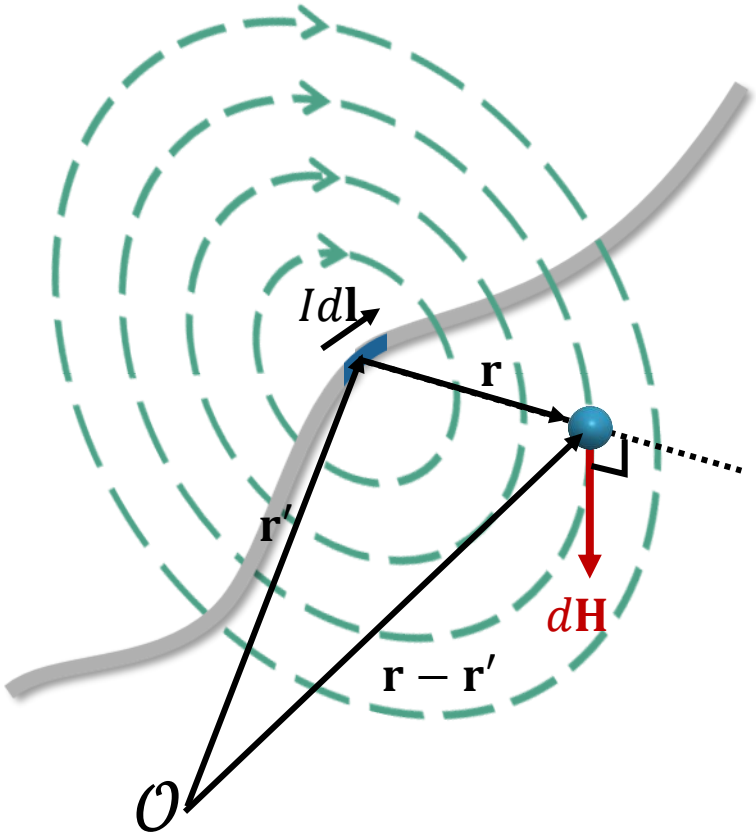
- Nuevamente:

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv + Q_0 \mathbf{u} \times \left[\mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right]$$

Ley de Coulomb ***Ley de Biot-Savart***

Ley de Biot-Savart

- Esta ley describe el campo magnético a nivel macroscópico.



$$d\mathbf{H} = \frac{Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Ley de Biot-Savart

- Al igual que con otras ecuaciones, podemos escribirla para el caso lineal, superficial y volumétrico.

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

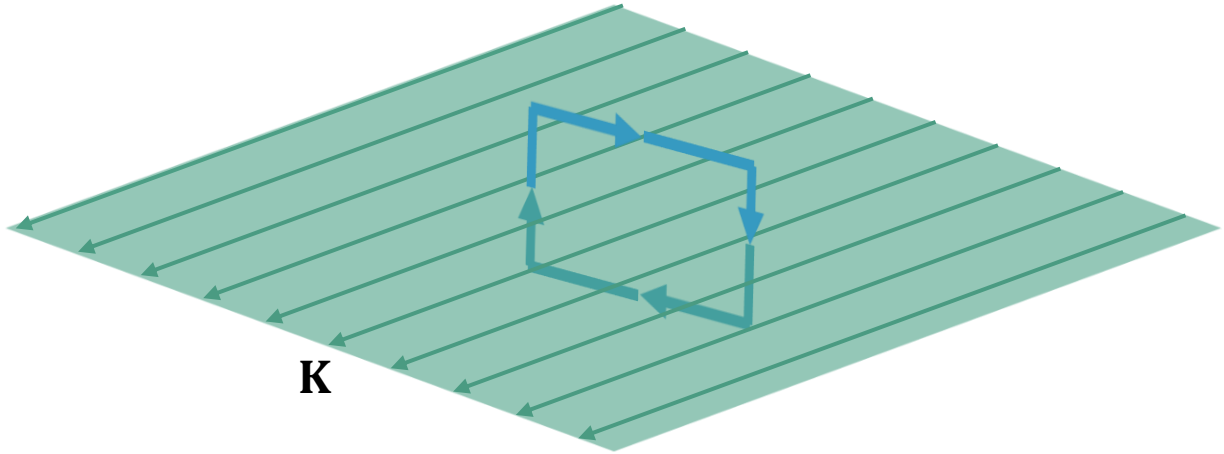
$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{J} dS' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{H} = \int_V \frac{\mathbf{J} dv' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Ley de Ampère

- Es un análogo a la ley de Gauss. Nos establece una relación entre la intensidad de campo y la cantidad fuentes encerradas.

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{enc}$$



- En lugar de superficies gaussianas, aquí usamos *caminos amperianos*.

Ley de Ampère

- Aplicando el Teorema de Stokes:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

- La corriente encerrada será:

$$\boldsymbol{I_{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

- Luego

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Ley de Ampère diferencial

Notemos que $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$
$\mathbf{H}$ no es conservativo

Ley de Ampère

- Con esto ya tenemos nuestra tercera ecuación de Maxwell en sus formas integral y diferencial:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Forma integral

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Forma diferencial



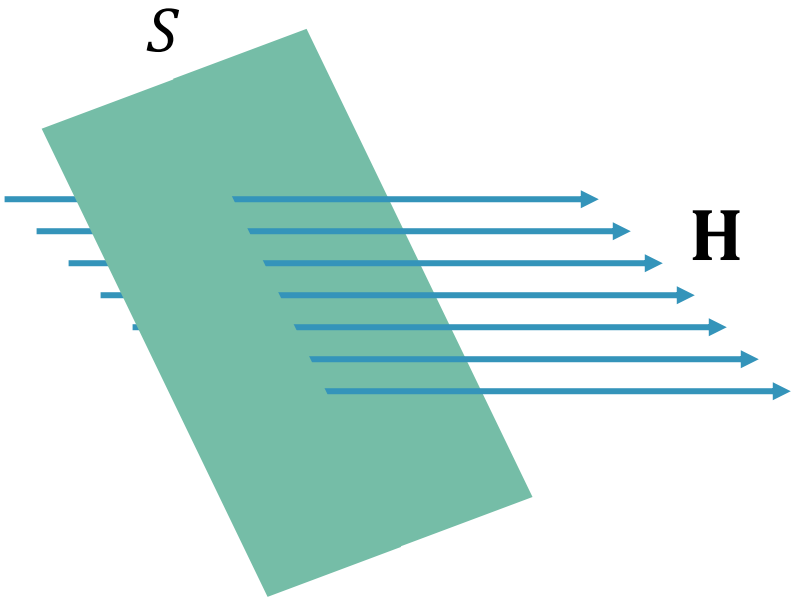
OJITO: Esta ecuación de Maxwell también está incompleta. Más adelante veremos por qué.

Densidad de Flujo Magnético ($\mathbf{B}$)

- Similar a la densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$, se define como la cantidad de campo magnético que circula perpendicularmente a través de una superficie.

- De igual forma, su comportamiento depende del medio:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$



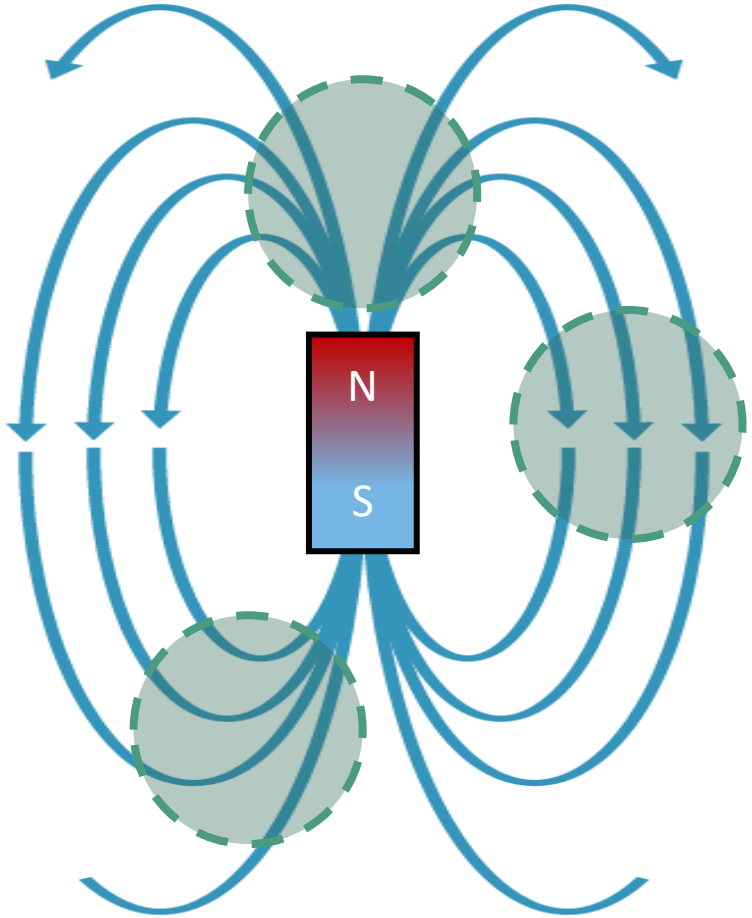
Flujo Magnético (Ψ)

- Asimismo, el flujo magnético estará dado por:

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- Pero en un campo magnético las líneas de flujo siempre son cerradas. Luego, para una superficie cerrada:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



Flujo Magnético (Ψ)

- Aplicando divergencia:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \cdot \mathbf{B}\, dS = 0$$

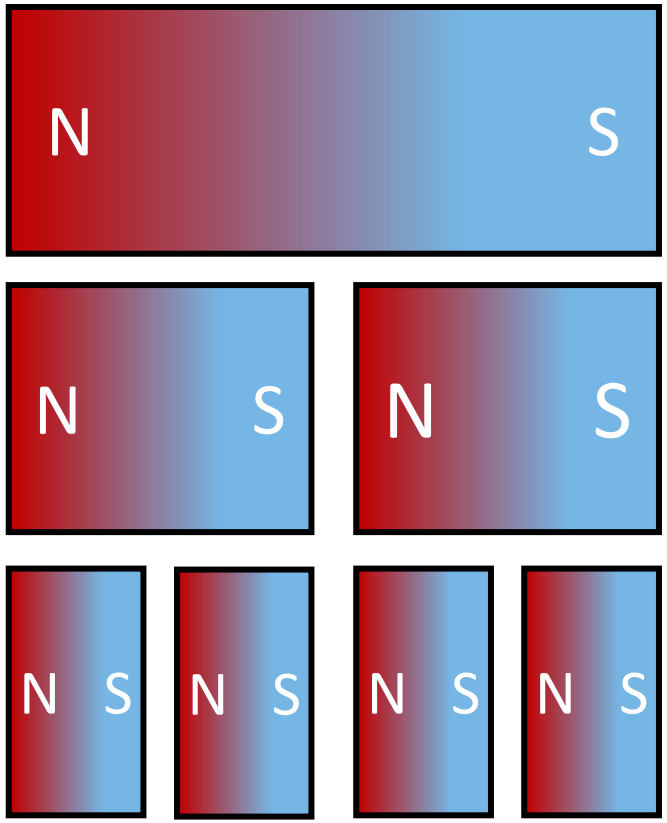
- Con esto tenemos la cuarta Ecuación de Maxwell, que niega la existencia de monopolos magnéticos:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Forma integral

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Forma diferencial



Potencial Vectorial Magnético

- De la cuarta ley de Maxwell obtuvimos que:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Por propiedades del operador nabla sabemos que:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0$$

- Así, podemos establecer un potencial vectorial $\mathbf{A}$, tal que:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Potencial Vectorial Magnético

- De Biot-Savart:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \int_L \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l}' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{a_R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = -\int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \times \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)$$

Mismo truco que usamos en Polarización y Dieléctricos (Cap. 04, slide 17)

$$\mathbf{B} = -\int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\boldsymbol{\nabla} \times d\mathbf{l}' - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) -\right] = -\int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[0 - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)\right]$$

$$\mathbf{B} = \int_L \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \boldsymbol{\nabla} \times \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Potencial Vectorial Magnético

- Así:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Potencial Vectorial Magnético

- Notemos que reemplazando en la ecuación de flujo:

$$\Psi = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Densidad de Energía (w_M)

- En la clase de electrostática vimos que la energía puede escribirse como:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(V)(\rho_\tau d\tau)$$

- En este sentido, las cargas se interpretan como el elemento generador del campo. Mientras que el potencial escalar es la energía normalizada por unidad de carga.

Densidad de Energía (w_M)

- Para el caso magnético, podemos hacer la misma analogía a nivel vectorial:

$$W_M = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{J}dv)$$

- Donde las densidades de corriente (cargas en movimiento) generan el campo, y el potencial vectorial es la energía normalizada por unidad de corriente.

Densidad de Energía (w_M)

- De la tercera ecuación de Maxwell tenemos que: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

$$W_M = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}) dv$$

- Usando la identidad: $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})$

$$W_M = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{H} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) dv \; - \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv$$

Densidad de Energía (w_M)

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$W_M = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})dv - \frac{1}{2}\int_v \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})dv$$

$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{D}dV$

$$W_M = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\cdot dv - \frac{1}{2}\oint_S \mathbf{A}\times\mathbf{H}\, d\boldsymbol{S}$$

- $\mathbf{A}$ varia a razón $1/r$, $\mathbf{H}$ varía a razón $1/r^2$, y $d\mathbf{S}$ varía a razón r^2. Luego, si la superficie crece infinitamente, el segundo término de W_M desaparece:

$$W_M = \frac{1}{2}\int_v \frac{B^2}{\mu_0} dv \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_M = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Densidad de Energía

Ley de Lorentz

- De nuestra clase anterior

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv + Q_0 \mathbf{u} \times \left[\mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right]$$

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_e + Q_0 \mathbf{u} \times \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_m = Q_0 \mathbf{u} \times \mathbf{B}}$$

Ley de Lorentz

Ley de Lorentz

- Consideremos que en lugar de una carga Q_0 tenemos un cable por el que circula una densidad de cargas dQ

$$d\mathbf{F}_m = dQ\mathbf{u} \times \mathbf{B} = dQ\ \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} \times \mathbf{B}$$

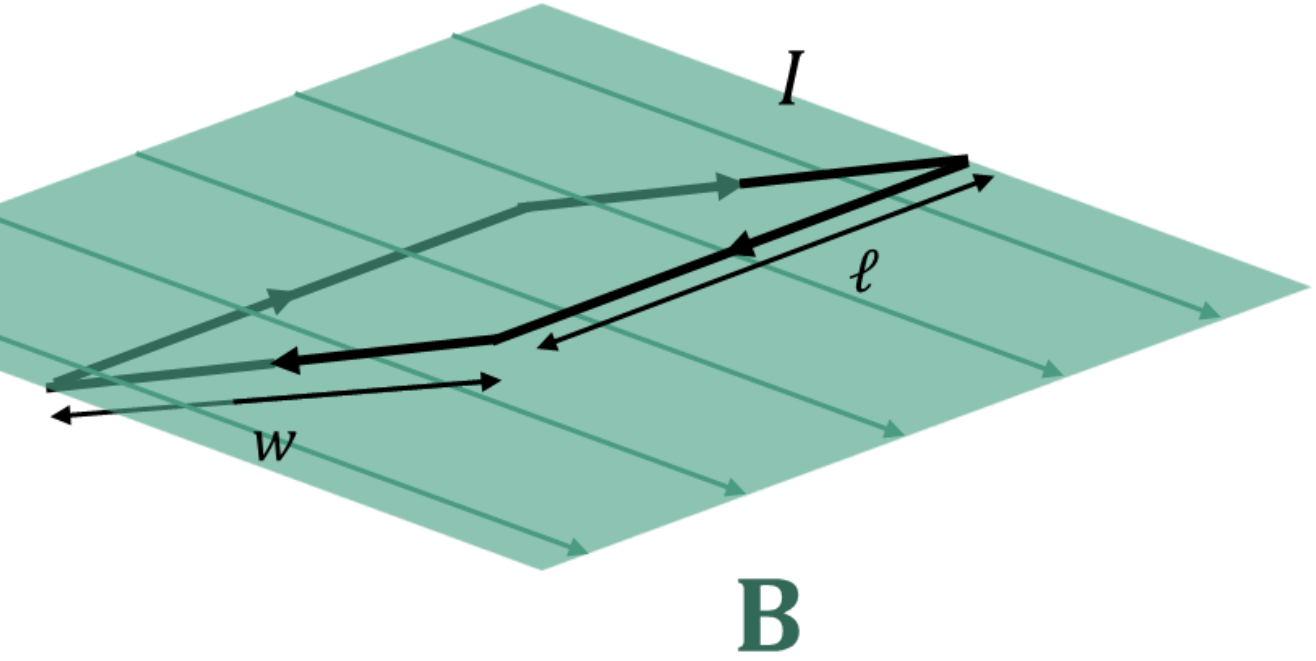
$$d\mathbf{F}_m = Id\boldsymbol{l} \times \mathbf{B}$$

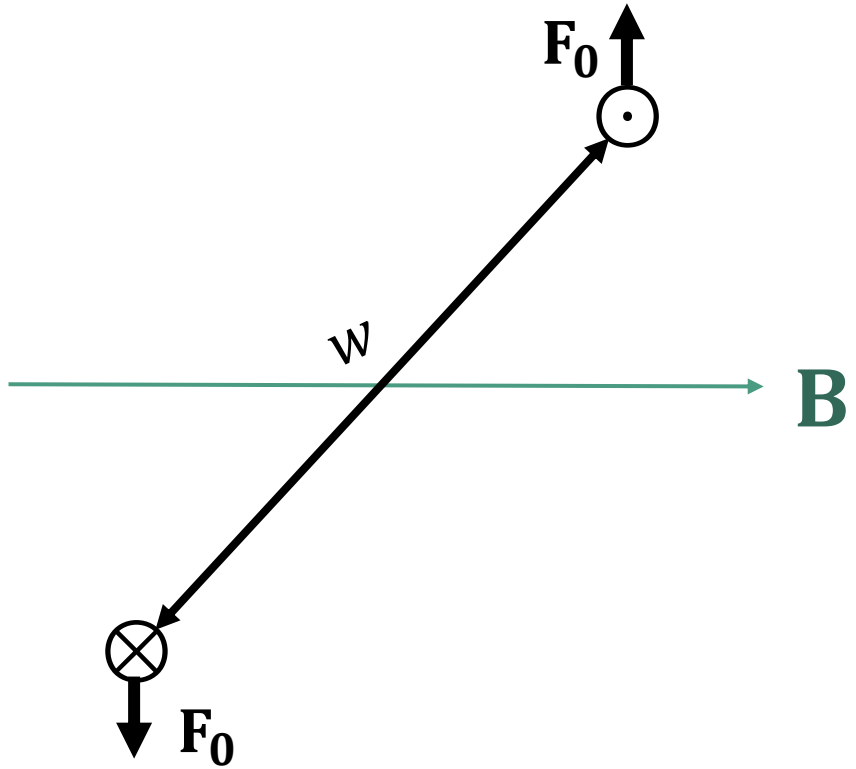
$$\mathbf{F}_m = \oint_L Id\boldsymbol{l} \times \mathbf{B}$$

¡Podemos interpretar B como la fuerza por unidad de elemento de corriente!

Torque Magnético

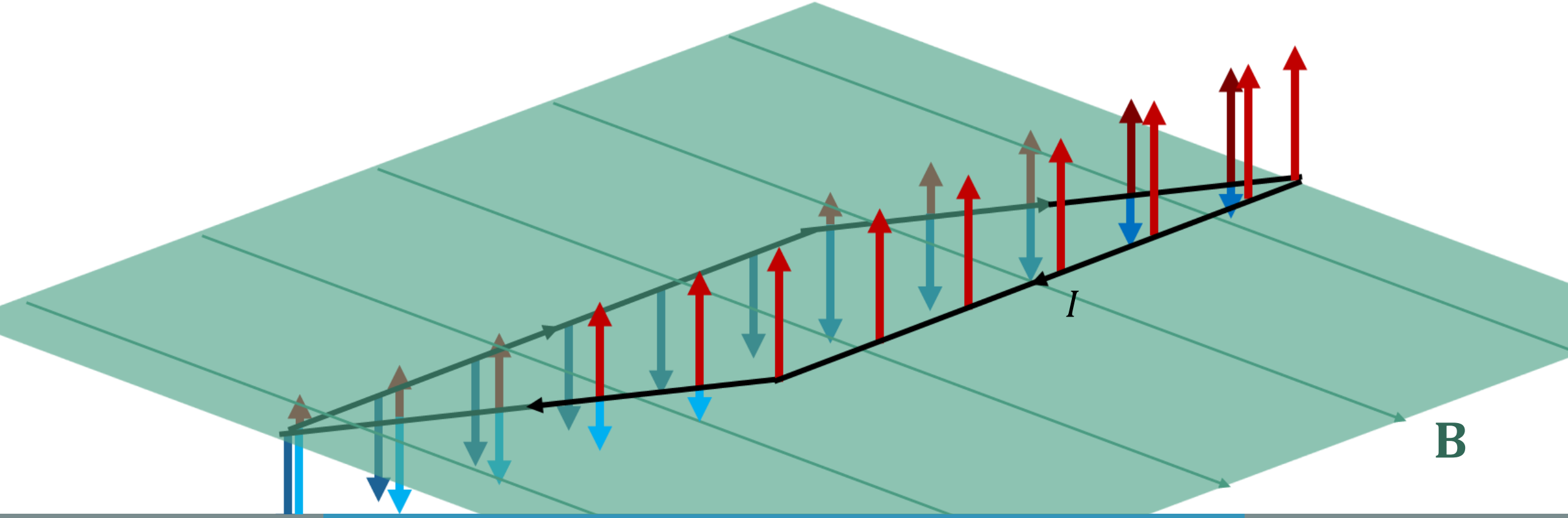
- Consideremos una espira por la cual circula una corriente I, posicionada dentro de en un campo uniforme $\mathbf{B}$.





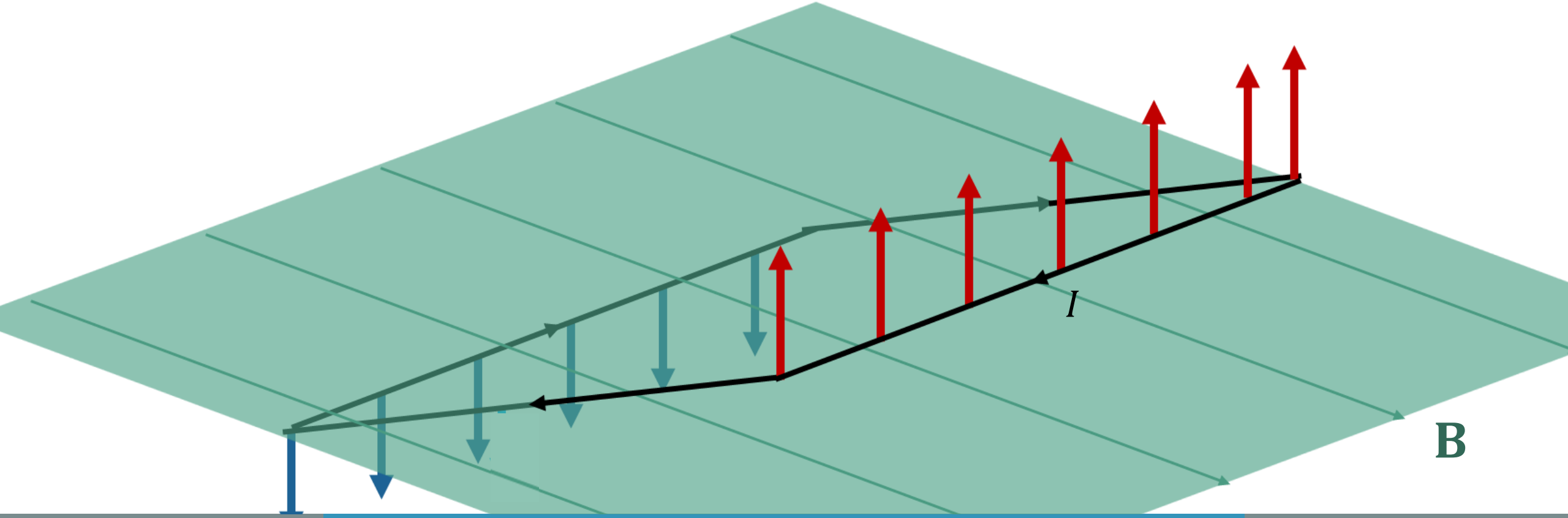
Torque Magnético

- Notemos que cuando I es paralelo a $\mathbf{B}$, la suma de las fuerzas magnéticas a lo largo de dicha trayectoria se anulan.



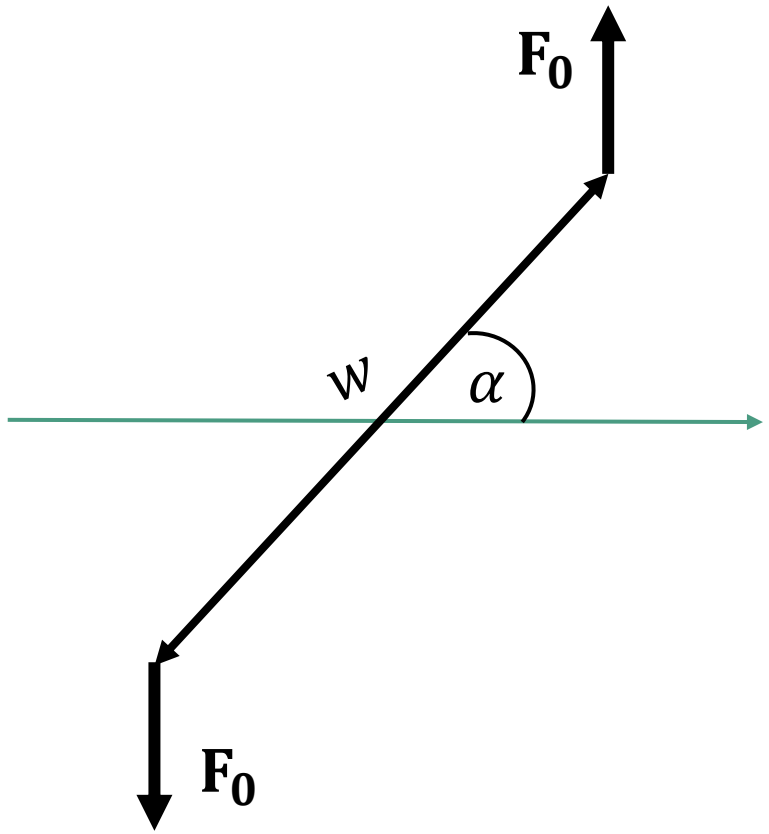
Torque Magnético

- Notemos que cuando I es paralelo a $\mathbf{B}$, la suma de las fuerzas magnéticas a lo largo de dicha trayectoria se anulan.



Torque Magnético

- Las dos fuerzas actuando sobre la espira forman un par de torsión.



$$\mathbf{T} = 2\,\mathbf{r} \times \mathbf{F_0} = 2\,\mathbf{r} \times \left(I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right)$$

$$\mathbf{T} = 2\frac{w}{2}\left(\cos\alpha\ \mathbf{a}_x + \sin\alpha\ \mathbf{a}_y\right) \times \left(I \int_L dz\mathbf{a_z} \times B\mathbf{a}_x \right)$$

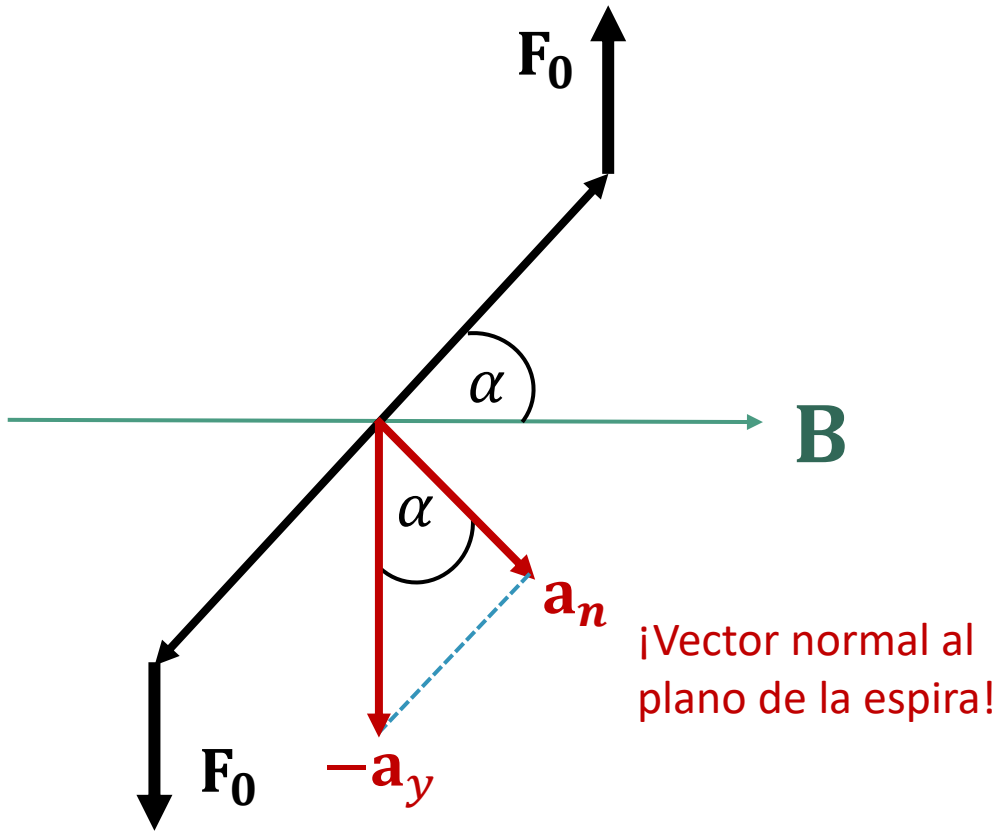
$$\mathbf{T} = w\ (\cos\alpha\ \mathbf{a}_x + \sin\alpha\ \mathbf{a}_y) \times IB\ell\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{T} = (wIB\ell\cos\alpha)\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = -(wIB\ell\cos\alpha)\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = (I\ell w)\ \cos\alpha\ (-\mathbf{a}_y) \times B\mathbf{a}_x$$

Torque Magnético

- ¿Cómo interpretamos $\cos\alpha(-\mathbf{a}_y)$?



¡Vector normal al plano de la espira!

$$\mathbf{T} = (I\ell w)\cos\alpha\,(-\mathbf{a}_y) \times B\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = IS\mathbf{a}_n \times B\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

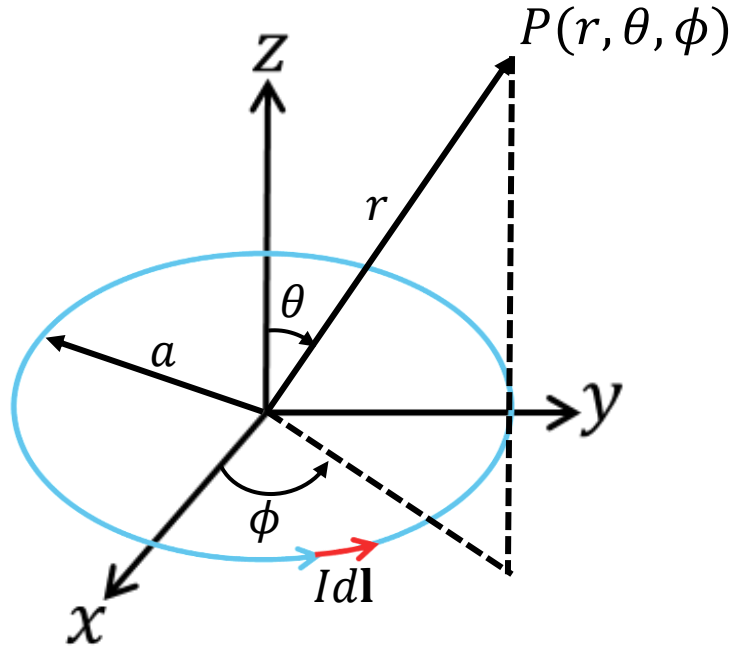
Torque magnético

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$$

Momento dipolar magnético

Dipolo Magnético

- Consideremos un pequeño loop circular de corriente de radio $a \ll r$ y determinemos su potencial vectorial $\mathbf{A}$ en coordenadas esféricas.

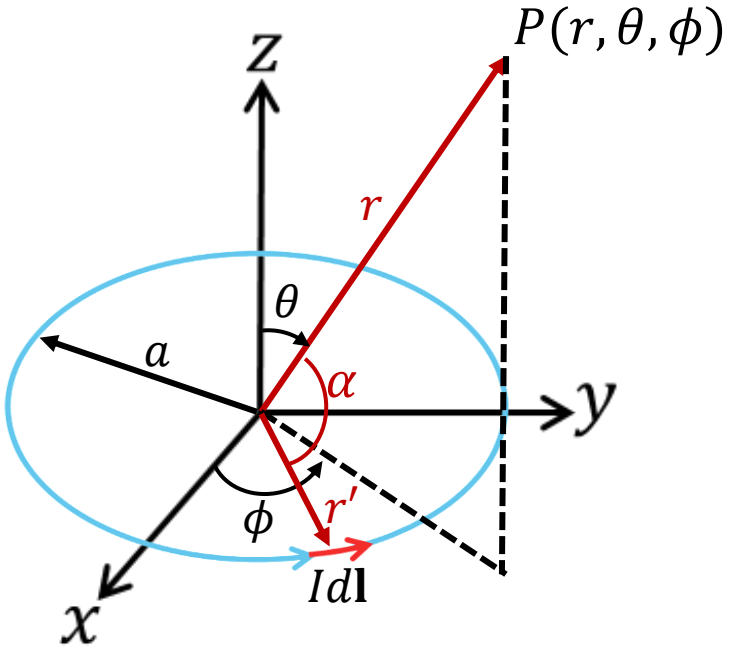


$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Usando expansión multipolar: $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_n(cos\alpha)$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(cos\alpha) d\mathbf{l}'$$

Dipolo Magnético



Trunquemos hasta el dipolo (n=1):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2}\oint r' cos\alpha \; d\mathbf{l}'\right]$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) d\mathbf{l}'$$

Necesitamos emplear una propiedad. Pero hay que hacer unos cuantos pasos antes.

Dipolo Magnético

Paso 1: Demostrar que $\int_S \boldsymbol{\nabla} f \times d\boldsymbol{S} = -\oint_L f \, d\mathbf{l}$

No podemos aplicar Stokes si f no es un vector. Definamos el vector $\mathbf{c}f$ con $\mathbf{c}$ un vector constante. Si aplicamos Stokes al vector $\mathbf{c}f$:

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{c}f) \cdot d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{c}f) d\mathbf{l}$$

Por regla del producto:

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{c}f) \cdot d\mathbf{S} = \int_S f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{c} \times (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{c}f) d\mathbf{l}$$

El rotacional de una constante es 0: $\int_S f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} = 0$

Dipolo Magnético

Aplicando la propiedad de permutación del producto mixto:

$$-\int_S \mathbf{c}(\boldsymbol{\nabla} f) \times d\mathbf{S} = \oint_L (\mathbf{c} f) d\mathbf{l}$$

Movemos la constante afuera y reordenamos:

$$-\mathbf{c} \int_S (\boldsymbol{\nabla} f) \times d\mathbf{S} = \mathbf{c} \oint_L f d\mathbf{l}$$

Y queda:

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} f) \times d\mathbf{S} = -\oint_L f d\mathbf{l}$$

Dipolo Magnético

Paso 2: Demostrar que $\oint_L \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r \, d\mathbf{l} = \mathbf{a}_\mathrm{r} \times \int_s dS$

Del resultado anterior, definimos $f = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r$. Luego:

$$\oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) \, d\mathbf{l}' = -\int_S \boldsymbol{\nabla}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) \times d\mathbf{S}$$

Por regla del producto resulta:

$$\boldsymbol{\nabla}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) = \mathbf{a}_r \times (\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{r}') + \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{a}_r) + (\mathbf{a}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}')\, \mathbf{r}' + (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{a}_r$$

Dipolo Magnético

Paso 2: Demostrar que $\oint_L \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r \, d\mathbf{l} = \int_s dS \times \mathbf{a}_\mathrm{r}$

Tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) = \mathbf{a}_r \times (\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{r}') + \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{a}_r) + (\mathbf{a}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{r}' + (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{a}_r$$

Pero:

$$\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{r}' = \left(\frac{\partial}{\partial y'}x' - \frac{\partial}{\partial z'}y'\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z'}x' - \frac{\partial}{\partial x'}z'\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x'}y' - \frac{\partial}{\partial y'}x'\right)\mathbf{a}_z = 0$$

$\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{a}_r = 0$ (Derivar una constante)

$(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{a}_r = x'\frac{\partial}{\partial x'}(a_x) + y'\frac{\partial}{\partial y'}(a_y) + z'\frac{\partial}{\partial z'}(a_z) = 0$ (Derivar una constante)

$$(\mathbf{a}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{r}' = a_x\frac{\partial}{\partial x'}(x') + a_y\frac{\partial}{\partial y'}(y') + z_z\frac{\partial}{\partial z'}(z') = \mathbf{a}_\mathrm{r}$$

Dipolo Magnético

Paso 2: Demostrar que $\oint_L \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r \, d\mathbf{l} = \int_s dS \times \mathbf{a}_\mathrm{r}$

Así:

$$\boldsymbol{\nabla}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) = \mathbf{a}_r \times (\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{r}') + \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{a}_r) + (\mathbf{a}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{r}' + (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\nabla}')\mathbf{a}_r$$

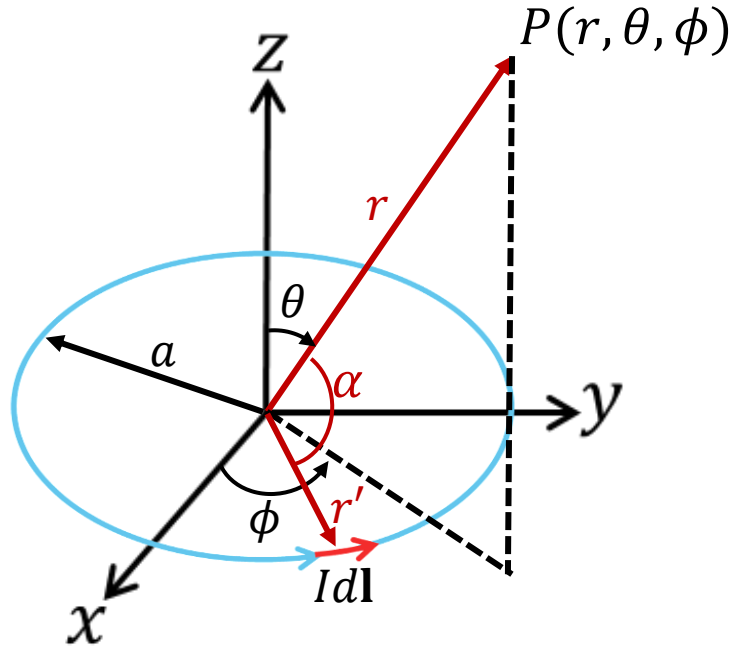
$$\boldsymbol{\nabla}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) = \mathbf{a}_\mathrm{r}$$

Luego:

$$\oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) \, d\mathbf{l}' = -\int_S \mathbf{a}_r \times d\mathbf{S} = -\mathbf{a}_r \times \int_S d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) \, d\mathbf{l}' = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{a}_\mathrm{r}}$$

Dipolo Magnético



Notemos que agrupando términos:

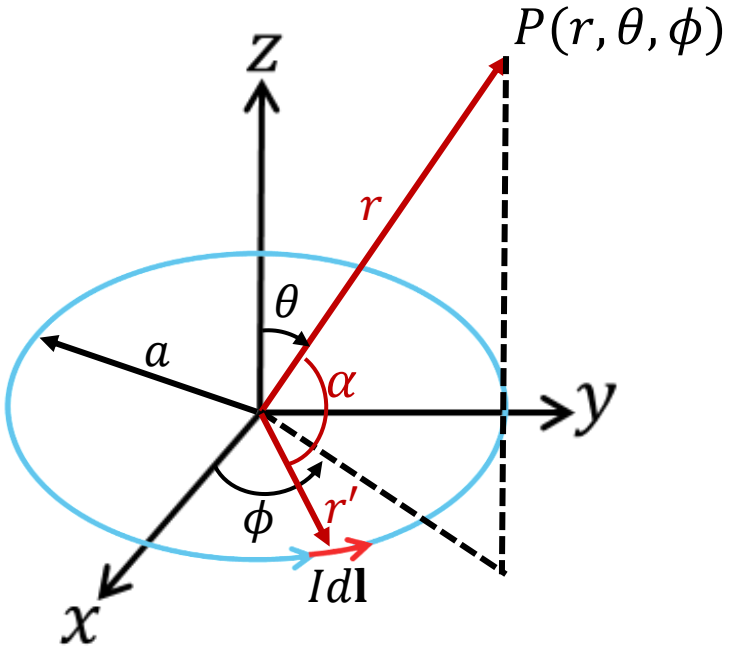
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{a}_\mathrm{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (IS) \times \mathbf{a}_r$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}$$

Dipolo Magnético



O bien:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S dS\, \mathbf{a_z} \times \mathbf{a_r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S dS\, (\mathbf{a_z} \times \mathbf{a_r})$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S dS\ \sin\theta\, \mathbf{a}_\phi$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta\, \mathbf{a}_\phi}$$

Dipolo Magnético

Análogo al caso de $\mathbf{E} = -\nabla V$, podemos estimar el campo magnético usando $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi \sin\theta\right)\right]\mathbf{a}_r - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right]\mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2}\sin\theta\right)\right]\mathbf{a}_r - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\mu_0 m\,\sin\theta}{4\pi r^2}\right)\right]\mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{2\mu_0 m \sin\theta cos\theta}{4\pi r^2}\right]\mathbf{a}_r - \frac{1}{r}\left[-\frac{\mu_0 m\pi\sin\theta}{4\pi r^2}\right]\mathbf{a}_\theta$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\mathbf{a}_\theta\right]}$$

Dipolo Magnético

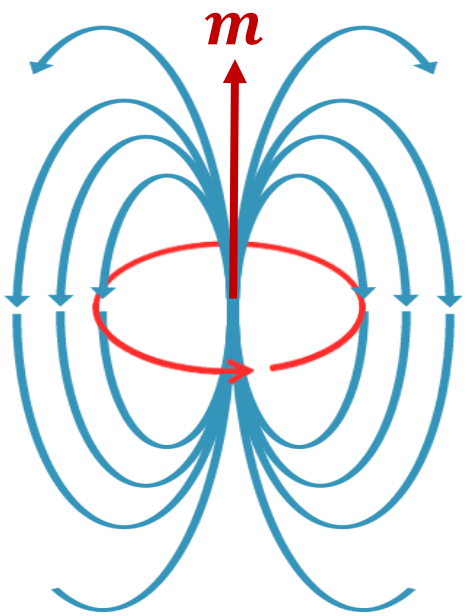
Notemos la similitud entre los campos de ambos dipolos:

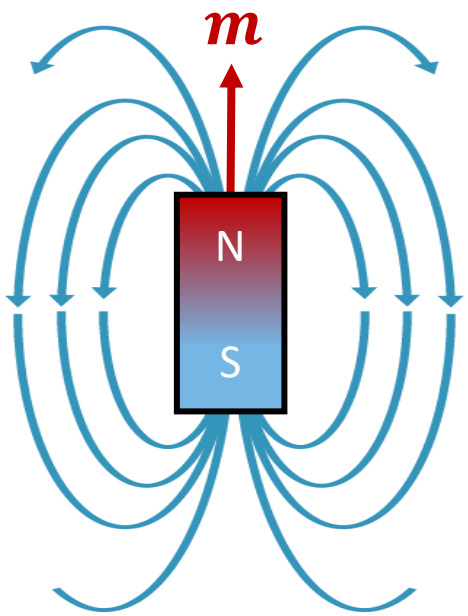
$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right]$$

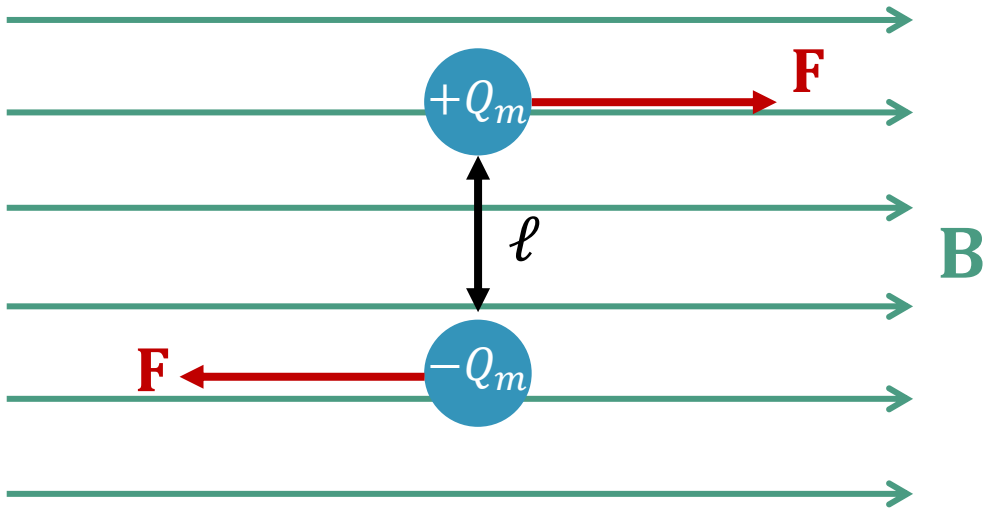
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\mathbf{a}_\theta\right]$$

Dipolo Magnético

En base a esta similitud, podemos concebir un dipolo magnético, ya sea por imanes permanentes o por un loop de corriente, como:







$$p = Q_m \ell = IS = m$$

Resumen

- Hicimos un repaso general por los conceptos de fuerza, campo, flujo, potencial, energía y torque magnetostáticos.

- Establecimos las distintas relaciones entre cada una de estas variables. En especial, entre potencial vectorial y campo: $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$.

- Extendimos la expansión multipolar al caso magnético y verificamos sus similitudes con el caso eléctrico.

- Obtuvimos la cuarta y parte de la tercera ecuación de Maxwell.

Cerremos la clase de hoy

- Ya analizamos por completo el comportamiento de Campos Magnetostáticos en el vacío.
- Nos resta analizar el comportamiento en medios materiales.

- Próxima Clase (Jueves 21/marzo):

  Magnetostática en Materiales.

- Bibliografía:

  Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 368 – 375

  Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 381 – 420

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Teorema de Stokes

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} \; dv' = -\oint_S \mathbf{F} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Potencial Vectorial

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$