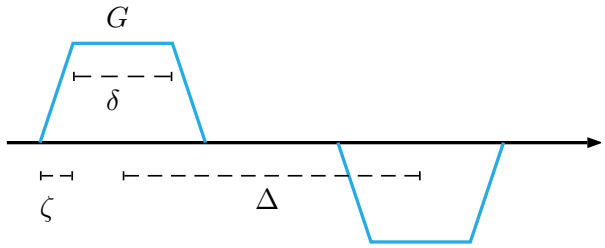
Interrogación 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.
- En esta interrogación sólo se considerarán 4 preguntas. Las preguntas 1, 2 y 5 son obligatorias. Elija responder la pregunta 3 o la pregunta 4.

---

1. (4 pts). En resonancia magnética se suelen usar pulsos bipolares de gradiente magnético $G(x)$ como el que sigue:



Exprese dicha función mediante tres señales distintas $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ (y no proporcionales a $G(x)$) tales que $G(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) * g(x) * h(x))$.

Solución:

Debido a que al convolucionar dos rects se generará un trapecio (si los anchos son distintos)

$$\wedge(x) = \frac{G}{\zeta}\sqcap\left(\frac{x}{\zeta}\right) * \sqcap\left(\frac{x}{\delta}\right). \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Luego como no se especifica la posición diremos que está centrado en a y se tendrá que

$$G(x) = \wedge(x) * 2\uparrow\downarrow(x-a), \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

por lo tanto

$$G(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{G}{\zeta}\sqcap\left(\frac{x}{\zeta}\right) * \sqcap\left(\frac{x}{\delta}\right) * \sqcap(x-a)\right). \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

2. (8 pts.) En imágenes de rayos X la señal recibida por el detector en la posición s, está dada por la siguiente expresión

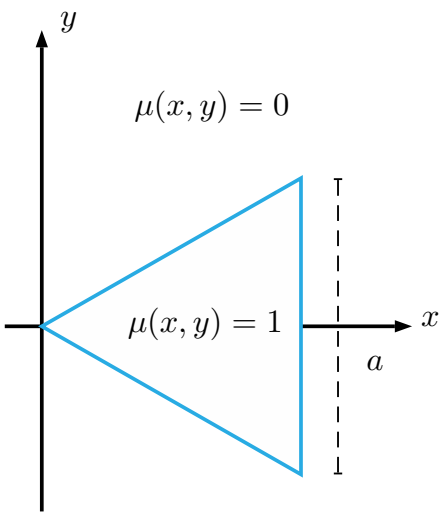
$$\log\left(g\left(s\right)\right) = -\int\int_{\mathbb{R}^2} \mu\left(x,y\right)\delta\left(y - f\left(x\right) - s\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde $f\left(x\right)$ es la trayectoria del fotón (sí, los rayos X son fotones) y $\mu\left(x,y\right)$ el coeficiente de atenuación del material. Dado esto responda:

(a) (2 pts.) ¿Es el sistema $g\left(s\right) = \mathcal{S}\left\{f\left(x\right)\right\}$ LTI? ¿Y si no tuviera el logaritmo?

(b) (2 pts.) ¿Qué le sucede a la magnitud del impulso al variar x e y?

(c) (4 pts.) Si el objeto a observar es un triángulo equilátero de tal forma que:



y $f\left(x\right) = mx$, grafique $-\log\left(g\left(s\right)\right)$ para $m = 0$ y $1/\sqrt{3}$.

Solución:

Primero hay que entender que $\delta\left(y - f\left(x\right) - s\right)$ es un impulso de linea, es decir son infinitos impulsos que están ubicados en los puntos donde se cumple $y = f\left(x\right) + s$. De este modo la trayectoria del fotón estará dada por $\left(x,\, f\left(x\right) + t\right)$ si quisiéramos representarlo paramétricamente.

(a) Para esto usaremos un contraejemplo, sea $f_1\left(x\right) = x$, $f_2\left(x\right) = -x$ y digamos que el objeto es un cuadrado $\mu\left(x,y\right) = \sqcap\left(x\right)\sqcap\left(y\right)$. Las salidas de cada sistema serán

$$f_1: \quad -\log\left(g\left(s\right)\right) = \sqrt{2}\wedge\left(2s\right)\cdot\mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$f_2: \quad -\log\left(g\left(s\right)\right) = \sqrt{2}\wedge\left(2s\right)\cdot\mathbf{\frac{1}{2}},$$

donde los términos en negritas son $1/\left|\nabla f_i\left(x,y\right)\right|$. Sin embargo, la entrada de la superposición es

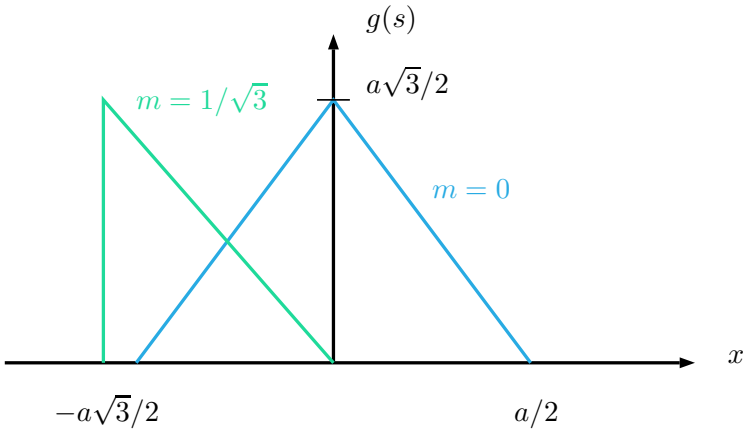
$$f_1 + f_2: \quad -\log\left(g\left(s\right)\right) = \sqcap\left(s\right),$$

por lo que **no es lineal** y entonces no es LTI con/sin el logaritmo. → **2 pts.**

(b) Se interpreta el cambio de magnitud de $\delta\left(f\left(x,y\right)\right)$ como $\frac{1}{|\nabla f(x,y)|}$, por lo tanto se modificará en un factor que depende de la posición

$$\frac{1}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}. \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) Para $m = 0$ los rayos viajaran en forma horizontal integrando el objeto, luego $g_{m=0}\left(s\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \wedge \left(\frac{2s}{a}\right)$. $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$ Para el otro caso los rayos viajaran paralelos a un lado del triángulo formando un triángulo rectángulo $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$, los dos resultados se muestran en la figura $\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$



3. (6 pts.) Encuentre las respuestas al impulso de:

   (a) (2 pts.) $g(x) = \int_x^{x+T} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

   (b) (2 pts.) $g(x) = \int_0^{2x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

   (c) (2 pts.) $g(x) = \int_{-x}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

   Solución:

4. En general para sistemas lineales (este es el caso), se tiene que

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, h(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

   que considera tanto el caso variante como el invariante. Para los casos variantes hay que considerar que la entrada es un impulso desfasado en un factor ξ. Resolviendo las integrales, y considerando que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x-\xi)dx = \sqsubset(x-\xi)$$

   se tendrá que

   (a) $h(x,\xi) = \sqcap\left(\frac{\xi-x-T/2}{T}\right) = h(x-\xi) \Rightarrow h(x) = \sqsubset(x+T) - \sqsubset(x) = \sqcap\left(\frac{x+T/2}{T}\right)$.
   $\rightarrow$ **2 pts.**

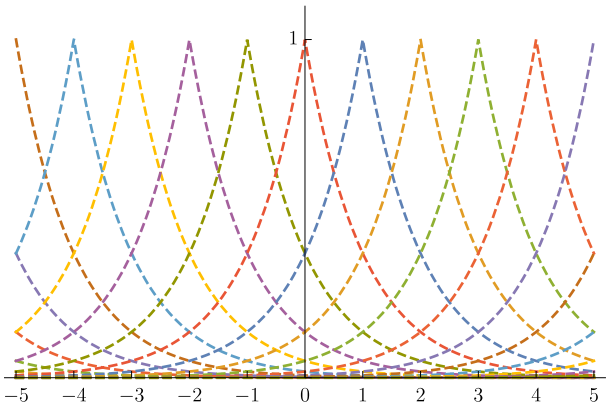
   (b) $h(x,\xi) = \sqsubset(2x-\xi) - \sqsubset(-\xi)$. $\rightarrow$ **2 pts.**

   (c) $h(x,\xi) = \sqsubset(x-\xi) - \sqsubset(-x-\xi)$.$\rightarrow$ **2 pts.**

5. (6 pts.) Sea un sistema LTI con respuesta al impulso $h(x) = \sqcup\!\sqcup(x)$, determine la salida a $f(x) = e^{-|x|}$.

Solución:

Nos damos cuenta que la salida tiene que ser una superposición de muchas señales $f(x) \rightarrow$ **1 pts.** notamos que en cada intervalo se generá la misma suma por lo que solo debemos analizar



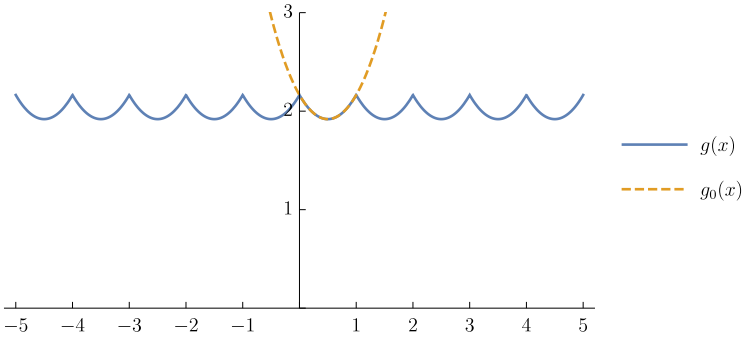
digamos $0 \leq x \leq 1 \rightarrow$ **1 pts.**, veamos el efecto de esto

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x+n)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{x-n}, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}} + \frac{e^{x-1}}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{1}{1-e^{-1}}\left[e^{-x} + e^{x-1}\right] \rightarrow \textbf{2 pts.} \end{aligned}$$

Luego $g_0(x) = \frac{1}{1-e^{-1}}\left[e^{-x} + e^{x-1}\right] \sqcap\left(x - \frac{1}{2}\right)$ si lo consideramos para todo x y entonces el resultado será

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(x-n). \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

A continuación se grafica la salida y $g_0(x)$ sin multiplicar por el rect:



6. (6 pts.) Considere el sistema definido por las siguientes ecuaciones de estado

$$v_1'(x) = -2v_1(x) + f(x)$$

$$v_2'(x) = v_1(x) - v_2(x)$$

y la ecuación de salida

$$g(x) = 2v_1(x) + v_2(x)$$

y cuya matriz de transición de estados es

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{-2x} & 0 \\ e^{-x} - e^{-2x} & e^{-x} \end{bmatrix}$$

Considere ademas la señal de entrada $f(x) = 5\sqcap(x)$, y las condiciones iniciales $v_1(0) = 0$ y $v_2(0) = 0$.

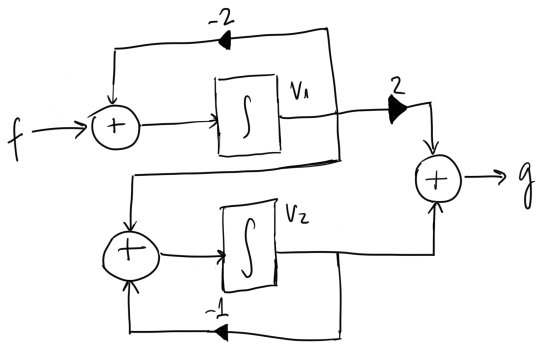
(a) (1 pts.) Determine un diagrama de bloques para el sistema.

(b) (4 pts.) Encuentre la respuesta de las variables de estado del sistema a la entrada $f(x)$.

(c) (1 pts.) Determine la salida del sistema a la entrada $f(x)$.

Solución:

(a) Utilizando integradores → **1 pts.**:



(b) La ecuación general de estado es

$$\mathbf{v}(x) = e^{\mathbf{A}(x-x_0)}\mathbf{v_0} + \int_{x_0}^{x} e^{\mathbf{A}(x-\xi)}\mathbf{b}f(\xi)d\xi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

En este caso particular, como las condiciones iniciales son cero, entonces tenemos

$$\mathbf{v}(x) = e^{\mathbf{A}x}\int_{0}^{x} e^{-\mathbf{A}\xi}\mathbf{b}f(\xi)d\xi$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2x} & 0 \\ e^{-x} - e^{-2x} & e^{-x} \end{bmatrix} \int_0^x \begin{bmatrix} e^{2\xi} & 0 \\ e^{\xi} - e^{2\xi} & e^{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2x} & 0 \\ e^{-x} - e^{-2x} & e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^x 5e^{2\xi} d\xi \\ \int_0^x 5e^{\xi} - 5e^{2\xi} d\xi \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2x} & 0 \\ e^{-x} - e^{-2x} & e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{5}{2} \\ 5e^{x} - 5 - (\frac{5}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-2x} \\ \frac{5}{2}e^{x} - \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{-2x} + 5 - 5e^{-x} - \frac{5}{2}e^{x} + \frac{5}{2}e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-2x} \\ \frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{-2x} - 5e^{-x} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) De acuerdo a la ecuación de salida, tenemos

$$g(x) = 2v_1(x) + v_2(x)$$

es decir,

$$g(x) = 2\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-2x}\right) + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{-2x} - 5e^{-x}$$

$$g(x) = 5 - 5e^{-2x} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{-2x} - 5e^{-x}$$

$$g(x) = 7.5 - 2.5e^{-2x} - 5e^{-x} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$