IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 7B: ZT ROC y propiedades

7.3 Transformada Z inversa

A partir de la DTLT inversa,

$$f[n] = \frac{T}{i2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma + i2\pi/T} \tilde{F}(s) e^{snT}\, ds \quad \alpha < \sigma < \beta$$

y cambiando las variables $s = \frac{1}{T} \ln z \quad ds = \frac{1}{Tz} dz$

$$f[n] = \frac{1}{i2\pi} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz$$

donde Γ es una circunferencia en la ROC

7.3 Transformada Z inversa

- Directamente de la fórmula
- De transformadas conocidas:
  - Directamente
  - Usando propiedades
  - Usando fracciones parciales
- Evaluación exhaustiva (usando división larga)

7.3 Región de convergencia ZT

Veámoslo con un ejemplo

$$f[n] = \frac{1}{3^n} \sqcap [n]$$

la ZT es

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n} \sqcap [n] z^{-n}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3} z^{-1})^n$$

7.3 Región de convergencia ZT

Empleando

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{con} \quad |x| < 1$$

la ZT es

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

con

$$|\frac{1}{3}z^{-1}| < 1 \quad \text{o} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

7.3 Región de convergencia ZT

Nótese que $| z | > \frac{1}{3}$

es equivalente a

$$|z| = |e^{sT}| = |e^{\sigma T} e^{i2\pi uT}| = |e^{\sigma T}| = |r| > \frac{1}{3}$$

$$\sigma > -\frac{1}{T} \ln 3$$

7.3 Región de convergencia ZT

En términos generales

$$\alpha < \sigma < \beta$$

$$e^{\alpha T} < |z| < e^{\beta T}$$

$$r_\alpha < |z| < r_\beta$$

En general el origen es una excepción (lugar de convergencia de todo el “infinito negativo”)

7.3 Región de convergencia ZT

1. Secuencias finitas

$$F(z) = f[N_1]z^{-N_1} + f[N_1+1]z^{-(N_1+1)} + \cdots + f[N_2]z^{-N_2}$$

ROC: todo el plano Z

2. Secuencias infinitas derecha $f[n] = 0 \quad \text{para} \quad n < n_0$

$$F(z) = f[n_0]z^{-n_0} + f[n_0+1]z^{-(n_0+1)} + \cdots$$

ROC: $|z| > r_\alpha$

7.3 Región de convergencia ZT

3. Secuencias infinitas izquierda $f[n] = 0 \quad \text{para} \quad n > n_0$

$$F(z) = \cdots + f[0] + f[1]z^{-1} + \cdots + f[n_0]z^{-n_0}$$

ROC: $|z| < r_\alpha$

7.4 Propiedades de la ZT

1. Linealidad

$$af[n] + bg[n] \longrightarrow aF(z) + bG(z)$$

$$\max(r_\alpha, s_\alpha) < |z| < \min(r_\beta, s_\beta)$$

7.4 Propiedades de la ZT

2. Inversión

$$f[-n] \longrightarrow F(z^{-1}) \quad r_\alpha < |z|^{-1} < r_\beta$$

7.4 Propiedades de la ZT

3. Desplazamiento

$$f[n-m] \longrightarrow z^{-m}F(z) \quad r_\alpha < |z| < r_\beta$$

7.4 Propiedades de la ZT

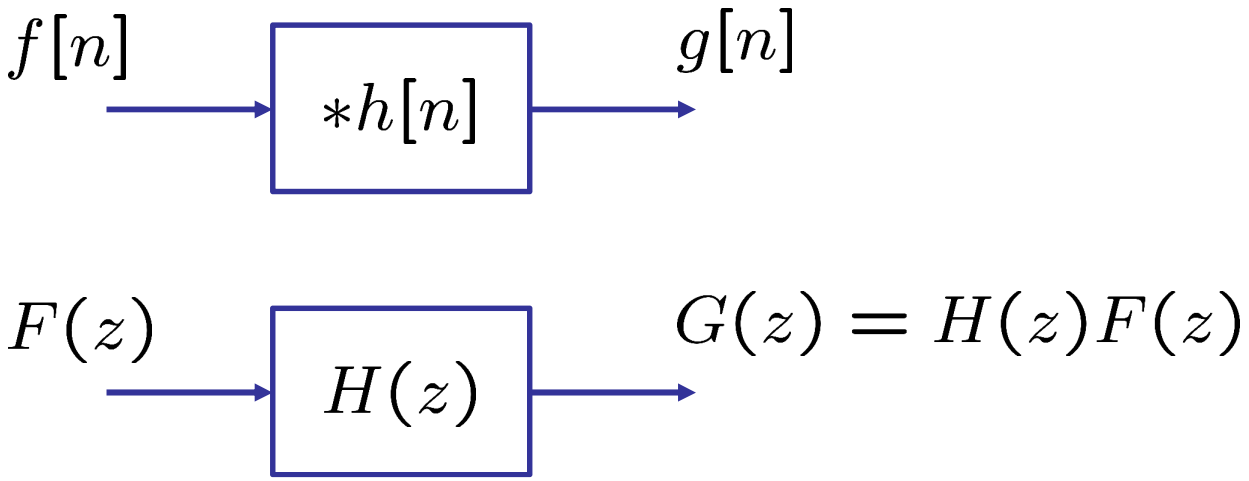
4. Convolución

$$f[n] *_l g[n] \longrightarrow F(z)G(z)$$

$$\max(r_\alpha, s_\alpha) < |z| < \min(r_\beta, s_\beta)$$

7.4 Propiedades de la ZT

Función de transferencia



7.4 Propiedades de la ZT

5. Diferenciación en la frecuencia

$$nf[n] \longrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z) \quad r_\alpha < |z| < r_\beta$$

7.4 Propiedades de la ZT

6. Escalamiento en frecuencia

$$z_0^n f[n] \longrightarrow F(z_0^{-1} z) \quad r_\alpha < |z/z_0| < r_\beta$$

7.4 Propiedades de la ZT

7. Decimación

$$f_{(k)}[n] \longrightarrow F(z^k) \quad r_\alpha < |z|^{1/k} < r_\beta$$

con

$$f_{(k)}[n] = \begin{cases} f[n/k] & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

7.4 Propiedades de la ZT

8. Teoremas de valor inicial y final

Si $f[n]$ es causal ($f[n] = 0,\ \forall n < 0$), se tiene

- Teorema del valor inicial

$$f[0] = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

- Teorema del valor final

$$\lim_{n \to \infty} f[n] = \lim_{z \to 1} (z-1)F(z)$$