Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 7

Fecha de entrega: 24 de abril de 2022

---

1. Enuncie las propiedades de la transformada de Laplace.

   a) Escalamiento:

   $$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

   b) Linealidad:

   $$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \mathcal{L}\{\alpha f(t)\} + \mathcal{L}\{\beta g(t)\}$$

   c) Desplazamiento:

   $$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

   d) Convolución:

   $$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

   e) Multiplicación:

   $$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = F(s) * G(s)$$

   f) Modulación:

   $$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

   $$\mathcal{L}\{cos(\omega t)f(t)\} = \frac{1}{2}F(s-i\omega) + \frac{1}{2}F(s+i\omega)$$

   g) Diferenciación:

   $$\mathcal{L}\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\} = s^n F(s)$$

   h) Integración:

   $$\int_{-\infty}^{t} f(\chi)d\chi = \frac{1}{s}F(s)$$

2. Explique qué significa que la transformada de Laplace sea lineal y demuestre que es lineal.

Que la transformada de Laplace sea lineal significa que cumple las propiedades de linealidad de un sistema:

a) $L\{x(t)\}$ es homogéneo si $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$

b) $L\{x(t)\}$ cumple con superposición si $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$

Laplace cumple estas dos condiciones porque **es un operador integral y la integral es un operador lineal**. Observemos:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) e^{-sx} \, \mathrm{dx}$$

Dado que α no depende de x, podemos sacarlo de la integral, quedando:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x)\} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} \, \mathrm{dx}$$

Notemos que el término integral de la derecha es $\mathcal{L}\{f(x)\}$, por lo que se concluye:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\}$$

Por lo tanto, se cumple homogeniedad.

Sobre la superposición:

$$\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) + g(x)] e^{-sx} \, \mathrm{dx}$$

Aplicando propiedad distributiva de la multiplicació:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) + g(x)] e^{-sx} \, \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} + g(x) e^{-sx} \, \mathrm{dx}$$

Luego, aplicando linealidad de la integral:

$$\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} + g(x) e^{-sx} \, \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} \, \mathrm{dx} + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-sx} \, \mathrm{dx}$$

Finalmente, observamos que cada término de la suma es una transformada de Laplace, luego:

$$\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{g(x)\}$$

3. ¿Que pasa con la región de convergencia de la transformada de Laplace de una suma de funciones?

   Tal como se resolvió en el problema anterior, sabemos que Laplace es lineal. Ahora, para una suma de funciones, la transformada de Laplace es la suma de las transformadas. Y la refión de convergencia es **la intersección de las regiones de convergencia**, es decir, la ROC de ambas transformadas debe existir a la vez en una región para que en esa región la transformada de la suma exista.

4. Determine la transformada de Laplace de (considere u como escalón):

$$f(x) = 3u(x) + e^{-6x} + \cos(5x)$$

   Para resolver esto, aplicamos Laplace a toda la ecuación. Esto se puede realizar porque **Laplace es lineal**:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{3u(x)\} + \mathcal{L}\{e^{-6x}\} + \mathcal{L}\{\cos(5x)\}$$

   Utilizando pares de Laplace conocidos:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \frac{3}{s} + \frac{1}{s+6} + \frac{s}{s^1+1}$$

5. Encuentre la transformada de Laplace inversa de:

$$F(s) = \frac{2s}{s+3}$$

   Para resolver esto se usa:

   - Linealidad: para independizar de la constante.
   - Propiedad de la derivada: estamos multiplicando un s
   - Pares conocidos de Laplace: sacando el 2 y el s tenemos la transformada de Laplace de un escalón por una exponencial.

   Luego, la transformada pedida es:

$$f(t) = 2\frac{d}{dt}\left[u(t)e^{-3t}\right]$$

Si ahora derivavos, usando regla del producto:

$$f(t) = 2\left[\delta(t)e^{-3t} - 3e^{-3t}u(t)\right]$$

6. Comente sobre la transformada de Laplace inversa de la función:

$$F(s) = s^2\cos(s) + s\sin(s) + 2$$

El objetivo de esta pregunta es que aprendan que **a diferencia de Fourier, la transformada de Laplace no cumple dualidad**, por lo que no se puede tomar los pares y aplicarlos para el otro lado (asignación de puntaje completa si se da cuanta de esto).

La solución sería:

$$f(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[\mathcal{L}^{-1}\{\cos(s)\}\right] + \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}^{-1}\{\sin(s)\}\right] + 2\delta$$

No se puede aplicar residuo porque seno y coseno no son polinomiales y no tienen polos. El resultado es una integral de contorno (puntos si la escribe).