Interrogación 1

◁ *Viernes 16 de abril, 2010 ⊗ 11:30-13:00* ▷

1. Un diodo, (cuyo símbolo es →|—), es un elemento circuital cuyo comportamiento ideal está descrito por la siguiente relación del voltaje de salida y con respecto al voltaje aplicado a la entrada x:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + |x|\right)$$

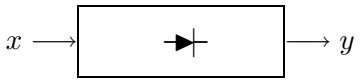


Figura 1: Sistema con un diodo.

   (a) Si se aplica la señal de entrada $x(t) = \sin(2\pi t)$, ¿cuál es el periodo de la señal de salida $y(t)$ y su gráfica para $t \in [0, 2T]$?
   (b) Para la señal de entrada anterior, ¿cuál es el valor de la energía y la potencia promedio de la señal a la salida $y(t)$?
   (c) Si se aplica la señal de entrada $x(t) = (1 + 2\sin(4t))\cos(3t)$, indique si la señal resultante es periódica o no, y de ser periódica calcule su periodo.

2. (a) Calcule y grafique la convolución de la señales $x(t)$ e $y(t)$ que se muestran en la fig. 6.
   (b) Si se discretizan las señales de la fig. 6 con periodo de muestreo $T_s = 1$, calcule y grafique la convolución de lase señales $x(kT_s)$ e $y(kT_s)$, $k\mathbb{Z}$.

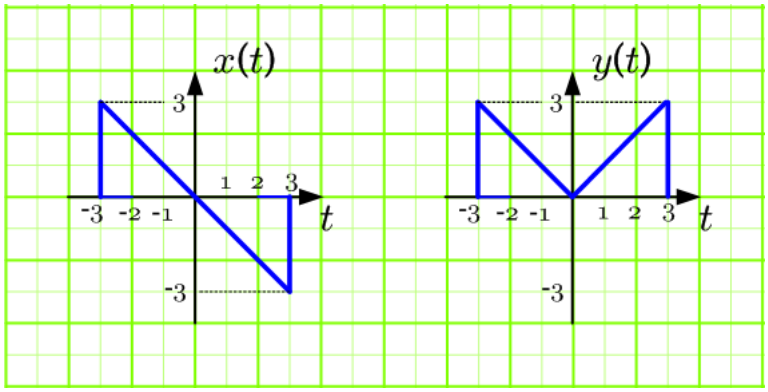


Figura 2: Señales pregunta 2 (a).

   (c) Calcule la respuesta al impulso del sistema de bloques interconectados de la fig. 3 considerando que las respuestas al impulso de los bloques individuales son:

$$h_1(t) = u(t) \quad \text{función escalón}$$
$$h_2(t) = \delta(t) \quad \text{función delta Dirac}$$

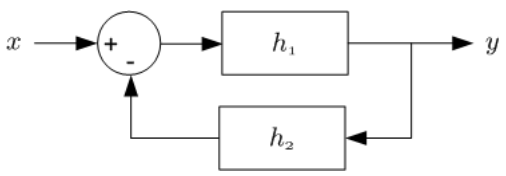


Figura 3: Sistema de bloques interconectados.

3. Un transmisor envía un tren de impulsos:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z},$$

a través de un cable cuyo comportamiento es descrito por la ecuación diferencial:

$$\dot{y} + y = x,$$

donde y es el voltaje a la salida del cable, x es el voltaje a la entrada.

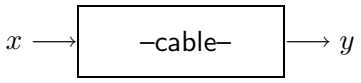


Figura 4: Cable de transmisión.

(a) Asumiendo condición inicial $y(0) = 0$, ¿cual es la señal de salida $y(t)$? Calcúlela y grafíquela en forma aproximada.

(b) ¿Cuál es el valor máximo al que llega la salida cuando $t \to \infty$?

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

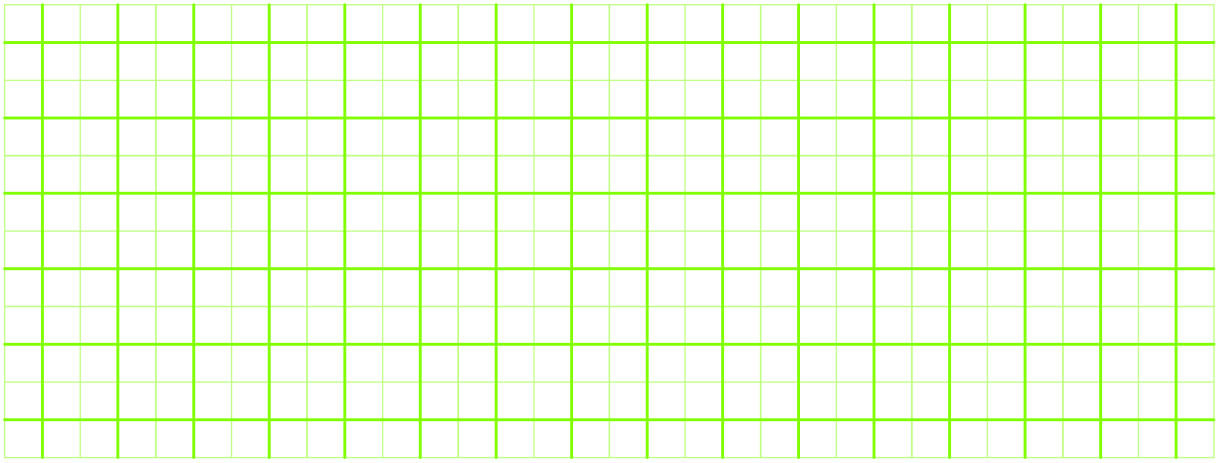


Figura 5: Señal $y(t)$ de la pregunta 1 (a).

NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

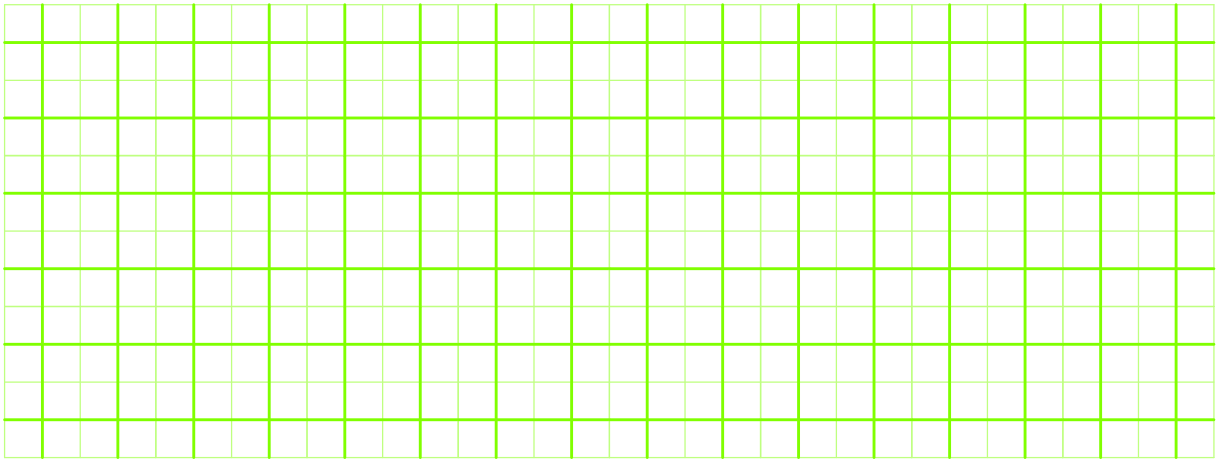


Figura 6: Señales $x \star y(t)$ de la pregunta 2 (a).

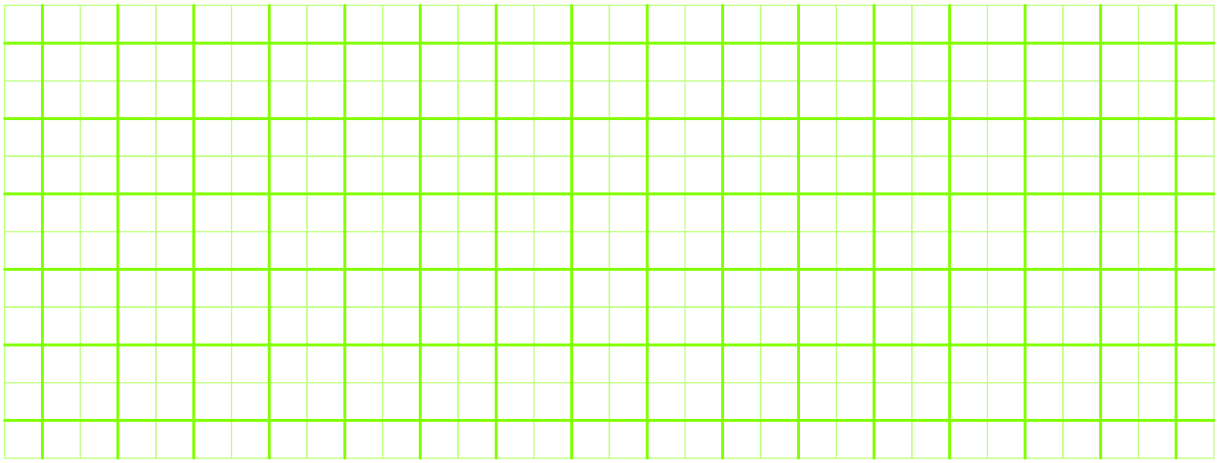


Figura 7: Señales $x \star y(k)$ de la pregunta 2 (b).

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

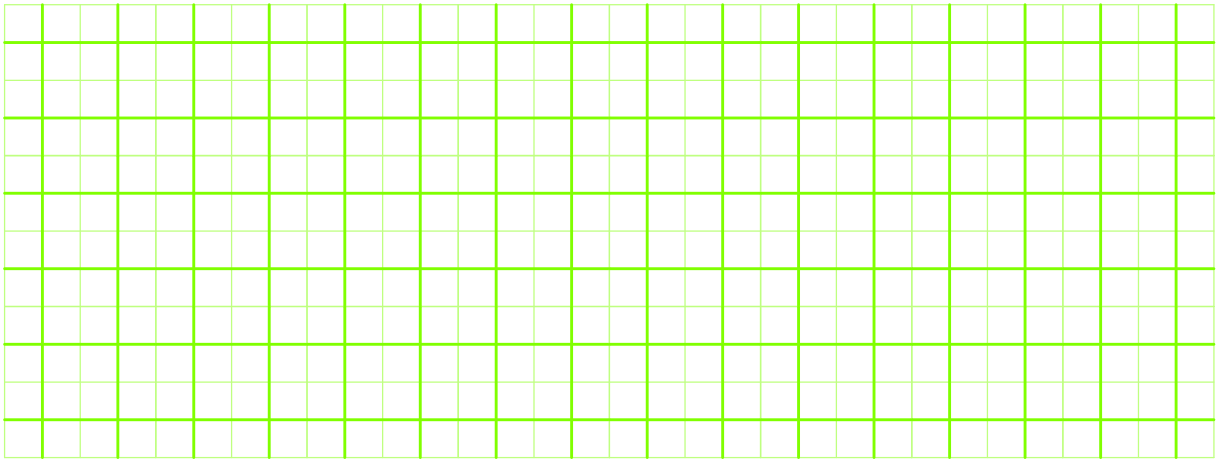


Figura 8: Señal $y(t)$ de la pregunta 3 (a).

Pauta Interrogación 1

◁ *Viernes 16 de abril, 2010 ⊗ 11:30-13:00* ▷

1. (a) La gráfica de $|x|$ y x cuando $x(t) = \sin(2\pi t)$ se muestra en la fig. 1. Al sumar una señal y su valor absoluto, el resultado es cero cuando la señal toma valores negativos. En el caso de $x(t) = \sin(2\pi t)$, por lo tanto, se cancela la parte negativa de la onda, lo cual resulta en el gráfico que se muestra en la fig. 2. Es posible observar que el period de señal de salida es $T = 1$. Esto concuerda con el hecho de que la frecuencia angular de la señal de entrada es $\omega = 2\pi$, y como $\omega = 2\pi f$, luego $f = \omega/(2\pi) = (2\pi)/(2\pi) = 1$. Recordando que $T = 1/f$, se tiene $T = 1$.

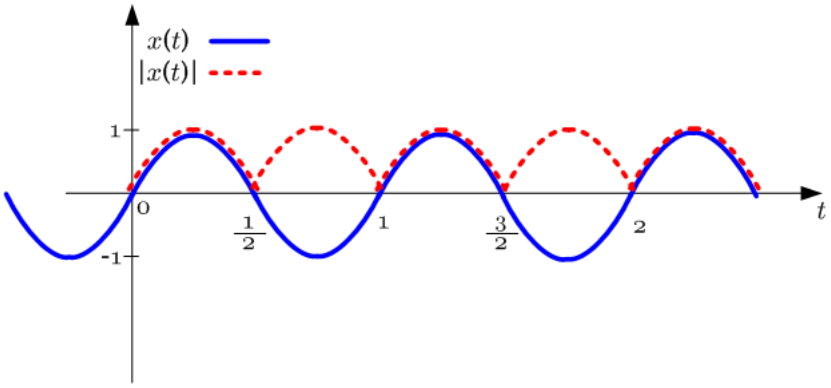


Figura 1: Señales $x(t)$ y $|x(t)|$ de la pregunta 1 (a).

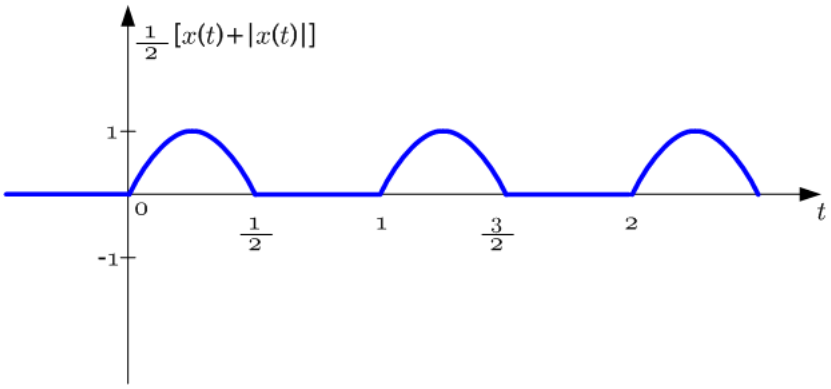


Figura 2: Señal $\frac{1}{2}(x(t) + |x(t)|)$ de la pregunta 1 (a).

(b) La energía $E_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt$ es infinita porque no se cumple que $\lim_{|t|\to\infty} |y(t)| = 0$. Sin embargo, es posible calcular la potencia promedio, la cual es la mitad que la de una sinusoidal completa (calculada en clases) $P_y = \frac{1}{2}P_x = \frac{1}{2}\frac{A^2}{2}$ donde $A = 1$ es la amplitud de la sinusoide. Por lo tanto, $P_y = \frac{1}{4}$. Esta conclusión puede obtenerse calculando también en forma explícita:

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt &&= \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(2\pi t)dt \\ &&&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - \frac{\cos(4\pi t)}{2}dt = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

El límite superior de la integral se reduce a medio periodo, porque en la otra mitad del periodo la señal de salida es cero.

(c) Si la señal de entrada es $x(t) = (1 + 2\sin(4t))\cos(3t)$, la cual equivale a:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(3t) + 2\sin(4t)\cos(3t) \\ &= \cos(3t) + \sin((4+3)t) + \sin((4-3)t) \\ &= \cos(3t) + \sin(7t) + \sin(t) \end{aligned}$$

Por sabemos que la suma de dos señales es periódica si la razón de periodos es un número racional. En este caso, la señal

$$x_1(t) = \cos(3t) + \sin(7t)$$

tiene un periodo que cumple:

$$T = \frac{2\pi}{3}n = \frac{2\pi}{7}m$$

para m, n enteros, siendo los valores más pequeños que satisfacen la relación $m = 7$ y $n = 3$. Luego el periodo de $x_1(t)$ es $T = \frac{2\pi}{3}n = 2\pi$. Finalmente, la señal $x(t)$ es la suma de $x_1(t)$ con una señal de periodo $T = 2\pi$, por lo tanto, la señal resultante $x(t)$ debe tener también periodo 2π.

2. (a) Del gráfico es posible definir:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} -t, & |t| \leq 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases} \\ y(t) &= \begin{cases} |t|, & |t| \leq 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Calculando la convolución por pedazos:
Para $-6 \leq t < -3$:

$$\begin{aligned} x \star y(t) &= \int_{-3}^{t+3} (\tau - t)(-\tau)d\tau \\ &= t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-3}^{t+3} - \frac{\tau^3}{3}\Big|_{-3}^{t+3} \\ &= \frac{1}{2}(t(t+3)^2 - 9t) - \frac{1}{3}(t+3)^3 - 9 \\ &= \frac{t^3}{6} - 9t + 18 \end{aligned}$$

Para $-3 \leq t < 0$:

$$\begin{aligned} x \star y(t) &= \int_{-3}^{0} (\tau - t)(-\tau)d\tau + \int_{0}^{t+3} (\tau - t)(\tau)d\tau \\ &= t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-3}^{0} - \frac{\tau^3}{3}\Big|_{-3}^{0} - t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{0}^{t+3} + \frac{\tau^3}{3}\Big|_{0}^{t+3} \\ &= -\frac{9t}{2} - 9 - \frac{1}{2}t(t+3)^2 + \frac{9t}{2} + \frac{1}{3}(t+3)^2 + 9 \\ &= -\frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

Para $0 \leq t < 3$:

$$\begin{aligned} x \star y(t) &= \int_{t-3}^{0} (\tau - t)(-\tau)d\tau + \int_{0}^{3} (\tau - t)(\tau)d\tau \\ &= t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-3}^{0} - \frac{\tau^3}{3}\Big|_{t-3}^{0} - t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{0}^{3} + \frac{\tau^3}{3}\Big|_{0}^{3} \\ &= -\frac{1}{2}t(t-3)^2 + \frac{1}{3}(t-3)^3 - \frac{9t}{2} + 9 \\ &= -\frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

Para $3 \leq t < 6$:

$$\begin{aligned} x \star y(t) &= \int_{t-3}^{3} (\tau - t)(\tau)d\tau \\ &= -t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-3}^{3} + \frac{\tau^3}{3}\Big|_{t-3}^{3} \\ &= -\frac{9t}{2} + \frac{1}{2}t(t-3)^2 + 9 - \frac{1}{3}(t-3)^3 \\ &= t^3/6 - 9t + 18 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x \star y(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} - 9t - 18, & -6 \leq t < -3 \\ -\frac{t^3}{6}, & -3 \leq t \leq 3 \\ \frac{t^3}{6} - 9t + 18, & 3 < t \leq 6 \\ 0, & |t| > 6 \end{cases}$$

Graficando algunos puntos es posible obtener

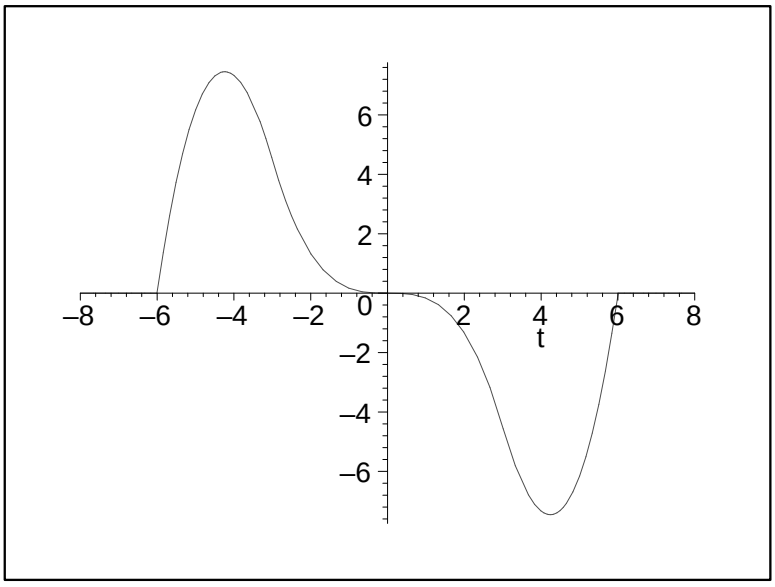


Figura 3: Convolución $x \star y(t)$ de la pregunta 2 (a).

(b) La discretización de $x(t)$ e $y(t)$ cada $T_s = 1$ segundos resulta en las señales:

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
x(k)	3	2	1	0	-1	-2	-3
y(k)	3	2	1	0	1	2	3

El calculo de $x \star y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k-n)y(n)$ se resume en la siguiente tabla:

n→	-3	-2	-1	0	1	2	3	
y(n)→	3	2	1	0	1	2	3	
k↓	$x(k-n)$							$x \star y(k)$
-6	3	0	0	0	0	0	0	9
-5	2	3	0	0	0	0	0	12
-4	1	2	3	0	0	0	0	10
-3	0	1	2	3	0	0	0	4
-2	-1	0	1	2	3	0	0	1
-1	-2	-1	0	1	2	3	0	0
0	-3	-2	-1	0	1	2	3	0
1	0	-3	-2	-1	0	1	2	0
2	0	0	-3	-2	-1	0	1	-1
3	0	0	0	-3	-2	-1	0	-4
4	0	0	0	0	-3	-2	-1	-10
5	0	0	0	0	0	-3	-2	-12
6	0	0	0	0	0	0	-3	-9

Si evaluamos $x \star y(t)$ en $t = kT_s$, $T_s = 1$, $k = -6, -5, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 5, 6$, se tiene $x \star y(kT_s) = \{0, 37/6, 22/3, 27/6, 4/3, 1/6, 0, -1/6, -4/3, -27/6, -22/3, -37/6, 0\}$. Claramente el el valor $x(kT_s) \star y(kT_s) \neq x \star y(kT_s)$, sin embargo, la forma de la $x(k) \star y(k)$ es equivalente a la de $x(t) \star y(t)$.

(c) Si se define $e = x - h_2 \star y$ como la salida de restador, la salida y será:

$$y = h_1 \star e = h_1 \star (x - h_2 \star y) = h_1 \star x - h_1 \star h_2 \star y$$

Como $y \star \delta = y$, la ecuación anterior puede re-escribirse como:

$$\delta \star y + h_1 \star h_2 \star y = h_1 \star x$$

Factorizando por y, y reemplazando $h_1 = u$, $h_2 = \delta$, y $x = \delta$, la respuesta al impulso se obtiene al resolver:

$$(\delta + u) \star y = u$$

Derivando la expresión anterior:

$$(\delta + u) \star \frac{dy}{dt} = \delta$$

o equivalentemente

$$\frac{dy}{dt} + y = \delta$$

por las propiedades de δ y u.

Como buscamos la respuesta al impulso, la última ecuación diferencial se resuelve con condiciones iniciales iguales a cero. La base es $y_1 = \{e^{-t}\}$, el método de variación de parámetros establece que la solución particular es:

$$y_p(t) = a(t)y_1(t)$$

con

$$\dot{a}(t) = \frac{|\delta(t)|}{|W(y_1)|} = \frac{|\delta(t)|}{|e^{-t}|} = \delta(t)e^{t}$$

Al integrar:

$$a(t) = \int_0^t e^{\tau}\delta(\tau)d\tau = e^t|_{t=0} = 1, t \geq 0$$

Por lo tanto $y_p(t) = e^{-t}$, es decir la respuesta al impulso del sistema es:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

donde $u(t)$ es el escalón unitario.

3. (a) El sistema está descrito por una ecuación diferencial ordinaria invariante en el tiempo y lineal. Por otro lado, la entrada es la suma de impulsos desplazados. Por lo tanto, es posible calcular la salida como la combinación lieal de las salidas.
A partir de la ecuación característica:

$$q(\lambda) = \lambda + 1 = 0$$

la base de la solución del sistema es:

$$\{y_1\} = \{e^{-t}\}$$

La solución particular para un impulso en $t = 0$ se obtiene como en el problema 2 (b):

$$y_p(t) = e^{-t}u(t)$$

La respuesta del sistema será entonces:

$$y(t) = Ce^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_p(t - nT)$$

Es posible observar que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{0} y_p(t-nT) &= \sum_{n=-\infty}^{0} e^{-(t-nT)}u(t-nT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+kT)}u(t+kT) \;=\; e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}u(t+kT) \\ &= e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} = e^{-t}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-(e^{-T})^{k+1}}1 - e^{-T} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-T}}\end{aligned}$$

El último resultado hace uso de la fórmula para la progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a\frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

Por la condición inicial:

$$y(0) = 0 = C + y_p(0) \;\Rightarrow C = -y_p(0) = \frac{1}{e^{-T}-1}$$

finalmente

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{e^{-T}-1} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(t-nT)}u(t-nT), \quad t \geq 0$$

La gráfica de la función se muestra en la fig. 4. En esta se aprecia que para un instante de tiempo dado, por ejemplo $t = 3T$, solo las exponenciales anteriores a $3T$ (en azul) aportan al valor de la función (en rojo). Aquellas exponenciales que se iniciaron varios periodos atrás aportan cada vez menos, y por lo tanto, el sistema que parte con condición inicial cero va acumulando valores hasta un punto en que el decrecimiento de la exponencial se compensa con la aparición de un nuevo impulso que genera una nueva exponencial. Como se verá en la siguiente pregunta, la existencia del límite para el valor máximo para la función puede encontrarse algebraicamente.

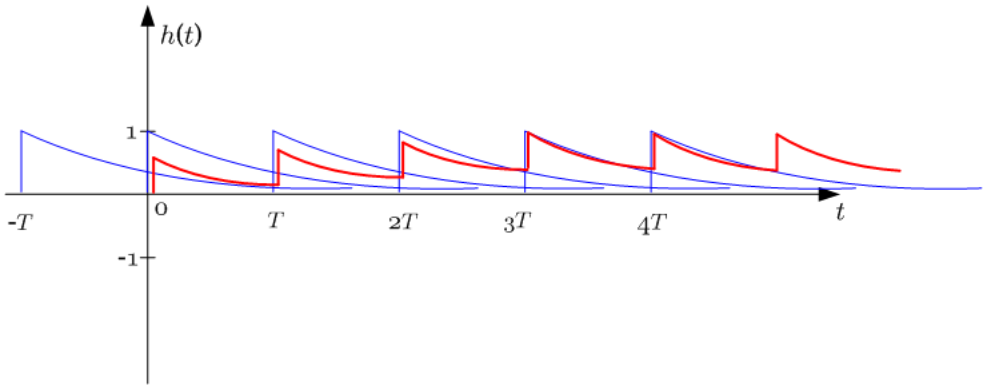


Figura 4: Respuesta al impulso del sistema de la pregunta 3 (a).

(b) Cuando $t \to \infty$, $e^{-t} \to 0$, por lo tanto $y_h(t)$ en la solución anterior tiende a cero. Notando además que $u(t - nT)$ es cero si $t < nT$, la solución particular es:

$$y_p(t) = e^{-t}u(t) + e^{-t+T}u(t-T) + e^{-t+2T}u(t-2T) + e^{-t+3T}u(t-3T) + \cdots + e^{-t+nT}u(t-nT)$$

como el n-ésimo término tiene influencia solo hasta que $t = nT$, entonces es no tiene sentido escribir la sumatoria más allá de n a menos que $t = nT$, caso en el cual es posible escribir que

$$\begin{aligned} y_p(nT) &= e^{-nT} + e^{-nT+T} + e^{-nT+2T} + e^{-nT+3T} + \cdots + e^{0} \\ &= e^{-nT} + e^{-(n-1)T} + e^{-(n-2)T} + e^{-(n-3)T} + \cdots + e^{0} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (e^{-T})^k = \frac{1 - (e^{-T})^{n+1}}{1 - e^{-T}} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{n\to\infty} y_p(nT) = \frac{1}{1 - e^{-T}}$$

La convergencia del valor máximo de la señal a un valor concreto se explica también gráficamente por la acumulación de exponenciales e^{-t+nT}. Para un punto en el tiempo, las exponenciales que se inician en periodos anteriores nT aportant cada vez menos, razón por la cual la serie converge a un valor. Notar que si el periodo T tiene a cero, la respuesta tiende a infinito, mientras que si el periodo T crece, la respuesta tiene a un peak de 1, el cual decrece a la tasa de e^{-t}. *Este es el principio que utiliza una fuente de switching para generar distintos niveles de voltaje.*