IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 4

Prof. Rodrigo F. Cádiz

2do. semestre 2022
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 46
Fecha: 18/11/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- **Responda cada pregunta en hojas separadas y entregue 4 hojas de respuestas, aunque estén en blanco**. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Sistema causal**. Un sistema causal se describe por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Cuando se aplica una entrada $f[n]$ al sistema, la salida es $g[n] = 0.9^n \sqcap[n]$.

(a) (7 pts.) Determine tres posibles entradas $f[n]$ que producen la salida $g[n]$.

(b) (1 pto.) ¿Cual es la entrada $f[n]$ si se sabe que ésta es absolutamente sumable?

(c) (4 pts.) Suponga que existe un sistema estable para el cual $f[n]$ es la salida si $g[n]$ es la entrada. Determine la respuesta al impulso de este sistema.

Solución

(a) La Transformada Z de la salida es

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La entrada, en el dominio Z, es entonces

$$F(z) = \frac{G(z)}{H(z)} = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.9} \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Vemos que los polos están en $z_0 = 0.9$ y $z_1 = 2$. Usando el teorema de los residuos tenemos

$$\lim_{z \to 0.9} \frac{z}{z - 0.9} \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} (z - 0.9) z^{n-1} = \lim_{z \to 0.9} z^n \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} = 0.9^n \frac{0.4}{-1.1} = -\frac{4}{11} 0.9^n \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$\lim_{z \to 2} \frac{z}{z - 0.9} \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} (z - 2) z^{n-1} = \lim_{z \to 2} z^n \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 0.9} = 2^n \frac{1.5}{1.1} = \frac{15}{11} 2^n \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por favor mire la página siguiente ...

Para una señal derecha, la entrada sería

$$f[n] = \frac{15}{11}2^n\sqcap[n] - \frac{4}{11}0.9^n\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

con ROC $|z| > 2$

Para una señal bilateral, la entrada sería

$$f[n] = -\frac{15}{11}2^n\sqcap[-n-1] - \frac{4}{11}0.9^n\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

con ROC $0.9 < |z| < 2$

Para una señal izquierda, la entrada sería

$$f[n] = -\frac{15}{11}2^n\sqcap[-n-1] + \frac{4}{11}0.9^n\sqcap[-n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

con ROC $|z| < 0.9$

(b) Si la entrada es absolutamente sumable es necesario que decrezca hacia el menos y más infinito, por lo tanto la única de las anteriores entradas que cumple con este criterio es la señal bilateral, por lo que

$$f[n] = -\frac{15}{11}2^n\sqcap[-n-1] - \frac{4}{11}0.9^n\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

con ROC $0.9 < |z| < 2$

(c) El sistema que a partir de $g[n]$ produce $f[n]$ es el sistema inverso, es decir

$$H^{-1}(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Vemos que el sistema inverso tiene un polo en 2. Para que sea estable, la Transformada inversa debe ser una señal izquierda $\rightarrow$ **1 pt.** Además, como el orden del numerador es igual al denominador, la respuesta al impulso debe incluir un impulso amplificado. Mediante división polinómica tenemos

$$H^{-1}(z) = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-2} = 1 + \frac{3}{2(z-2)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

con ROC $|z| < 2$, por lo que

$$h^{-1}[n] = \delta[n] - \frac{3}{2}2^n\sqcap[-n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

2. (12 pts.) **DFTs**. Considere las siguientes secuencias discretas. Para cada una de ellas determine si tendrán una DFT con valores reales, valores puramente imaginarios o valores complejos, con qué tipo de simetría, y los valores en las frecuencias 0 y en la frecuencia de Nyquist. Fundamente.
   (a) (3 pts.) $f_1[n] = \{0, -3, 1, -2, 0, 2, -1, 3\}$
   (b) (3 pts.) $f_2[n] = \{5, 2, -9, 4, 7, 4, -9, 2\}$

(c) (3 pts.) $f_3[n] = \{8, -3, 1, -2, 2, -1, 3\}$

(d) (3 pts.) $f_4[n] = \{0, -i, i, -i, 0, i, -i, i\}$

Solución

(a) En este caso vemos que la secuencia es real impar, por lo que su DFT será imaginaria impar → **1 pt.** El promedio es cero, por lo que $F[0] = 0$ → **1 pt.** y en Nyquist por simetría también tiene que ser 0. En efecto, tenemos

$$F[4] = \frac{1}{8}(0\times 1) + (-3\times -1) + (1\times 1) + (-2\times -1) + (0\times 1) + (2\times -1) + (-1\times 1) + (3\times -1)$$

$$= \frac{1}{8}(0+3+1+2+0-2-1-3) = 0 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(b) En este caso vemos que la secuencia es real par, por lo que su DFT será real par → **1 pt.** y los valores del promedio son

$$F[0] = \frac{1}{8}(5+2-9+4+7+4-9+2) = \frac{6}{8} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

y en Nyquist

$$F[4] = \frac{1}{8}(5\times 1) + (2\times -1) + (-9\times 1) + (4\times -1) + (7\times 1) + (4\times -1) + (-9\times 1) + (2\times -1)$$

$$= \frac{1}{8}(5-2-9-4+7-4-9-2) = \frac{-18}{8} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(c) En este caso vemos que la secuencia es real sin paridad (número impar de muestras), por lo que su DFT será compleja → **1 pt.** y los valores del promedio son

$$F[0] = \frac{1}{7}(8-3+1-2+2-1+3) = \frac{8}{7} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

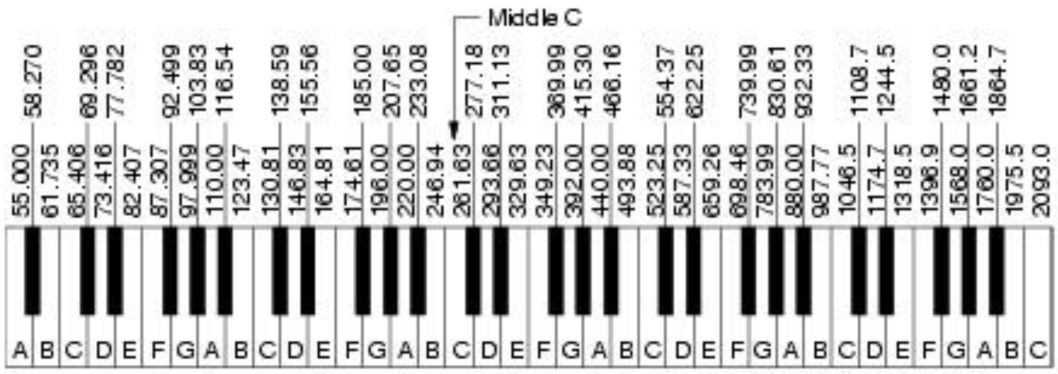
y como el número de muestras es impar, la DFT no contiene la amplitud de la frecuencia de Nyquist → **1 pt.**

(d) En este caso vemos que la secuencia es imaginaria impar, por lo que su DFT será real impar → **1 pt.** El promedio es cero, por lo que $F[0] = 0$ → **1 pt.** y en Nyquist, por simetría también es 0. En efecto,

$$F[4] = \frac{1}{8}(0\times 1) + (-i\times -1) + (i\times 1) + (-i\times -1) + (0\times 1) + (i\times -1) + (-i\times 1) + (i\times -1)$$

$$= \frac{1}{8}(0+i+i+i+0-i-i-i) = 0 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

3. (10 pts.) **Procesador de piano.** Suponga que ud. desea diseñar un procesador de sonidos de piano. Para esto, el audio proveniente de un micrófono será digitalizado con una frecuencia de muestreo de 44100 Hz y almacenado en ventanas rectangulares de largo 512, de manera de que todo funcione en tiempo real. El procesador se implementará en el dominio de la frecuencia, para lo cual será necesario calcular la FFT de cada una de las ventanas.



La figura anterior muestra las frecuencias de cada una de las teclas del piano, en notación americana, es decir A=La, B=Si, C=Do, D=Re, E=Mi, F=Fa, G=Sol, organizadas en octavas. Una nueva octava comienza cuando se vuelven a repetir los nombres de las notas. Por ejemplo, la primera octava comienza en el La (55 Hertz) y termina en el Sol# (103.83 Hertz). La segunda octava comienza en el La (110 Hertz) y así sucesivamente. Para implementar correctamente el procesador, es necesario responder las siguientes preguntas:

(a) (2 pts.) ¿Cual es la resolución de frecuencia de cada FFT?

(b) (2 pts.) ¿Cual es la duración del audio contenido en cada ventana en segundos?

(c) (2 pts.) ¿Es el largo de cada ventana suficiente para diferenciar las amplitudes de las notas Do y Re de la segunda octava de un piano? En el caso que el largo no sea suficiente, ¿cuanto debería ser para poder diferenciar estas notas? En el caso que si sea suficiente, ¿se podría usar un largo menor para esta tarea? ¿Cual?

(d) (2 pts.) ¿Es el largo de cada ventana suficiente para diferenciar las amplitudes de las notas Do y Re de la quinta octava de un piano? En el caso que el largo no sea suficiente, ¿cuanto debería ser para poder diferenciar estas notas? En el caso que si sea suficiente, ¿se podría usar un largo menor para esta tarea? ¿Cual?

(e) (2 pts.) Si el sonido del piano fuera solo una sinusoide de frecuencia 150 Hertz ¿es razonable esperar que la FFT de largo 512 contenga solo dos muestras distintas de cero?

Solución

(a) Sabemos que $NUT = 1$. En este caso $N = 512$, $T = \frac{1}{44100}$, por lo que

$$U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{512\frac{1}{44100}}\frac{44100}{512} = 86.13 \text{ Hertz} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) La duración total de cada ventana es

$$NT = \frac{1}{U} = 512 \times \frac{1}{44100} = \frac{512}{44100} \approx 0.011 \text{ seg} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) Como la diferencia entre ambas notas es $146.83 - 130.81 \approx 16$ Hertz, la resolución de 86 Hertz no es suficiente $\rightarrow$ **1 pt.** El N necesario es

$$N = \frac{1}{UT} = \frac{1}{16\frac{1}{44100}} = \frac{44100}{16} \approx 2756 \text{ muestras} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(d) Como la diferencia entre ambas notas es $1174.7 - 1046.5 \approx 128$ Hertz, la resolución de 86 Hertz es suficiente $\rightarrow$ **1 pt.** El N mínimo para este caso sería

$$N = \frac{1}{UT} = \frac{1}{128\frac{1}{44100}} = \frac{44100}{128} \approx 344 \text{ muestras} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(e) Para una sinusoide de 150, como no es un múltiplo entero de 86.13 necesariamente habrá derrame, además de apodización por utilizar ventanas rectangulares, por lo que no es esperable encontrar solo dos coeficientes de la FFT distintos de cero $\rightarrow$ **2 pts.**

4. (12 pts.) **Respuesta al escalón.** Diseñe un sistema discreto LTI cuya respuesta al escalón sea la secuencia derecha pseudo-periódica:

$$s[n] = \{\underline{0}, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots\}$$

(a) (7 pts.) Determine la función de transferencia del sistema.

(b) (1 pto.) Determine la ecuación de diferencias del sistema.

(c) (2 pts.) Dibuje el diagrama de bloques de su sistema.

(d) (1 pto.) Encuentre la respuesta al impulso del sistema.

(e) (1 pto.) Determine si el sistema que acaba de diseñar es estable o no.

Solución

(a) Primero diseñamos un sistema que tenga una respuesta al impulso igual a la secuencia descrita $\rightarrow$ **1 pt.** Esto claramente se puede lograr mediante el siguiente sistema $w[n] \rightarrow g[n]$

$$g[n] = w[n-1] + w[n-2] + g[n-3] \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

cuya función de transferencia es

$$\frac{G(z)}{W(z)} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-3}} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Ahora, necesitamos concatenar un sistema que, a partir de un escalón, genere un impulso, con el sistema anterior $\rightarrow$ **1 pt.** Para esto, sabemos que $\delta[n] = \sqcap[n] - \sqcap[n-1]$, es decir necesitamos el sistema $f[n] \rightarrow w[n]$ tal que

$$w[n] = f[n] - f[n-1] \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

cuya función de transferencia es

$$\frac{W(z)}{F(z)} = 1 - z^{-1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

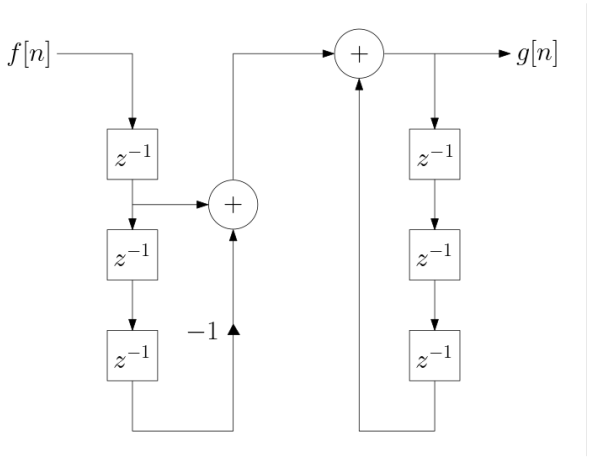
El sistema total $f[n] \rightarrow g[n]$ es la concatenación en serie de ambos subsistemas, es decir la multiplicación de sus funciones de transferencia

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{G(z)}{W(z)}\frac{W(z)}{F(z)} = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-3}}(1-z^{-1})$$
$$= \frac{z^{-1}-z^{-2}+z^{-2}-z^{-3}}{1-z^{-3}} = \frac{z^{-1}-z^{-3}}{1-z^{-3}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) De lo anterior, derivamos trivialmente la ecuación de diferencias, que es

$$g[n] - g[n-3] = f[n-1] - f[n-3] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c) El diagrama de bloques es



$\rightarrow$ **2 pts.**

(d) La respuesta al impulso es simplemente

$$\underline{0}, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots$$
$$-$$
$$0, \underline{0}, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1 \ldots$$

es decir

$$h[n] = \{\underline{0}, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, \ldots\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(e) De la parte anterior, vemos que la respuesta al impulso no decae a medida que se incrementa n, sino que es una secuencia periódica hacia la derecha, por lo cual es sistema no es estable $\rightarrow$ **1 pt.**