Prueba 3 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Grafique la base de Laplace correspondiente a la frecuencia compleja $s = 1 + i$. Sea explícito en los ejes coordenados e indique los puntos relevantes de la curva.

   Resultado: Las bases de Laplace son $\{e^{st}\}$. Son las funciones que debes ser multiplicadas por $F(s)$ e integradas para formar la función original $f(t)$. No confundir con las bases inversas que son $\{e^{-st}\}$. La base pedida es

   $$e^{st} = e^{(1+i)t} = e^t e^{it} = e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

   Antes de graficar veamos los puntos más relevantes.

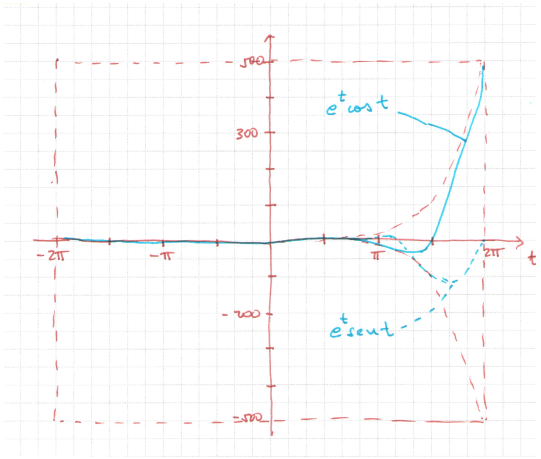
   En $t = 0$, $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$.

   En $t = \pi/2$, $e^{\pi/2} \approx e^{1.6} \approx 5$, $\cos \pi/2 = 0$ y $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$.

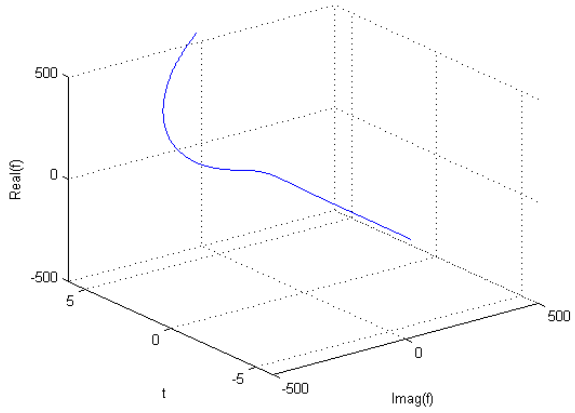
   En $t = \pi$, $e^{\pi} \approx e^{3.1} \approx 22$, $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$.

   En $t = 2\pi$, $e^{2\pi} \approx e^{6.2} \approx 500$, $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.

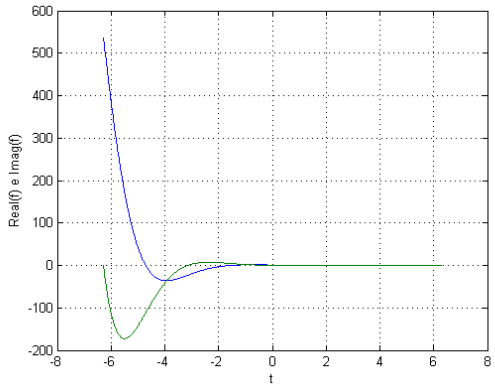
   A continuación se grafican las envolventes dadas por e^t, y en mismo gráfico las partes reales e imginarias correspondientes a $e^t \cos t$ y $e^t \operatorname{sen} t$

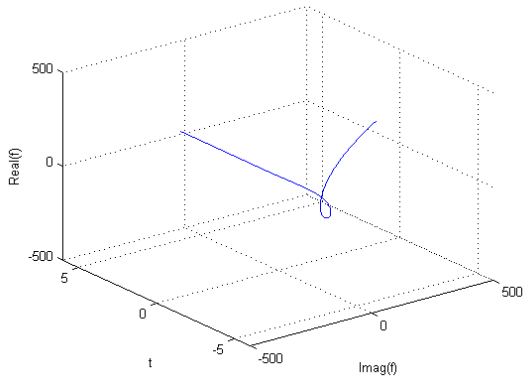
   

   También es posible dibujar esto con los ejes reales e imaginarios separados (tipo helicoide), aunque es más dificil



Finalmente, si alguien se equivocó (1 pto. menos) y consideró que las bases eran $\{e^{-st}\}$, los gráficos serían





2. [6 ptos] Si $f(t) \longrightarrow F(s)$ con $\alpha < \sigma < \beta$, entonces ¿cuál es la inversa de

$$H(s) = Ae^{-ps}F(\frac{s-q}{w})?$$

¿Para qué región de convergencia?

Resultado: Aplicando las propiedades de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}
f(t) &\longrightarrow F(s) \\
f(wt) &\longrightarrow \frac{1}{|w|}F(\frac{s}{w}) \\
e^{qt}f(wt) &\longrightarrow \frac{1}{|w|}F(\frac{s-q}{w}) \\
e^{q(t-p)}f(w(t-p)) &\longrightarrow \frac{1}{|w|}e^{-ps}F(\frac{s-q}{w}) \\
A|w|e^{q(t-p)}f(w(t-p)) &\longrightarrow Ae^{-ps}F(\frac{s-q}{w})
\end{aligned}$$

Es decir, la inversa es

$$h(t) = A|w|e^{q(t-p)}f(w(t-p))$$

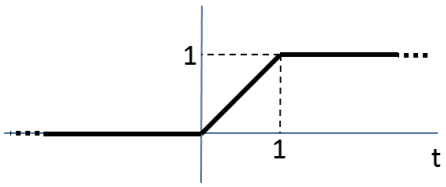
La región de convergencia será

$$\alpha < \frac{\sigma - q}{w} < \beta$$

que si $w > 0$ será

$$w\alpha + q < \sigma < w\beta + q$$

3. [6 ptos] Encuentre la transformada de Laplace de la siguiente función $f(t)$:



Resultado: La función es $t\sqcap(t) - (t-1)\sqcap(t-1)$, por lo que su tranformada de Laplace se puede calcular como

$$t\sqcap(t) \longrightarrow \frac{1}{s^2}, \quad \sigma > 0$$

$$(t-1)\sqcap(t-1) \longrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s}, \quad \sigma > 0$$

y

$$t\sqcap(t) - (t-1)\sqcap(t-1) \longrightarrow \frac{1-e^{-s}}{s^2}, \quad \sigma > 0$$

4. [6 ptos] Se tiene un sistema definido por la siguiente ecuación diferencial de parámetros constantes

$$ag'''(t) + bg''(t) + cg'(t) + dg(t) = f(t)$$

Asigne un valor numérico cualquiera, pero distinto de cero, a las constantes a, b, c y d; y encuentre la salida $g(t)$ si la entrada es $f(t) = \sqcap(t)$, empleando la transformada de Laplace y el método de las fracciones parciales para encontrar la inversa.

Resultado: La solución en el dominio de Laplace es

$$G(s) = \frac{1}{s(as^3 + bs^2 + cs + d)}$$

Para que las fracciones parciales sean más fáciles podemos elegir polos diferentes y simples. Por ejemplo

$$s(as^3 + bs^2 + cs + d) = s(s+1)(s-1)(s+2) = s(s^3 + 2s^2 - s - 2)$$

Es decir $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ y $d = -2$.

Las fracciones parciales serán:

$$\frac{1}{s(s+1)(s-1)(s+2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s-1} + \frac{-1/6}{s+2}$$

Por lo que la solución será

$$g(t) = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t})\sqcap(t)$$

5. [6 ptos] Se tiene cuatro señales discretas, todas del mismo largo, $N > 8$: $f[n]$, $g[n]$, $p[n]$ y $q[n]$. Se sabe que

$$f[n] = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ ...)$$

y

$$p[n] = (1,\ -1,\ 0,\ 0,\ ...)$$

   (a) Encuentre $g[n] = f[n] * p[n]$.

   (b) Encuentre $q[n]$ tal que $p[n] * q[n] = \delta[n]$. ¿Cuánto debe valer N para que exista este $q[n]$?

Resultado:

   (a) Dado que los elementos no cesos de $p[n]$ son solo dos, y en $f[n]$ hay al menos un cero, se puede ver que convolucionar con $(1,\ -1)$ es lo mismo que tomar las diferencias, es decir

$$g[n] = f[n] * p[n] = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 0,\ ...)$$

   (b) La operación inversa de tomar diferencias es sumar acumulativamente, por lo que por inspección se puede encontrar

$$q[n] = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ ...)$$

   que será válido para un N muy grande de manera que el -1 que se produce al final esté lejos. En el caso de la letra anterior se requiere que haya más de 7 unos y otro tanto de ceros: $N > 14$.