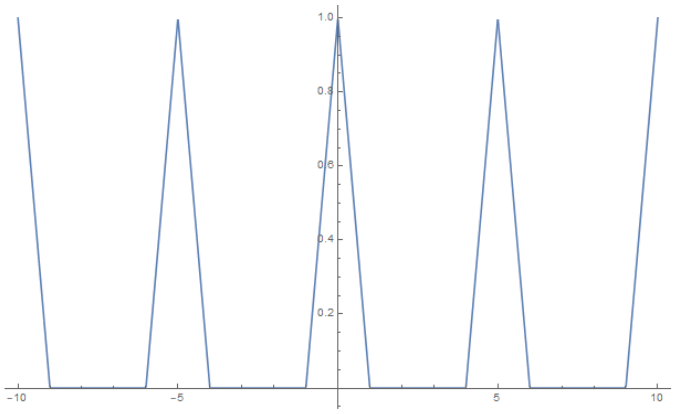
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 4

23 de Septiembre 2022

---

1. [**3 p**] Considere la señal *trencito de triángulos* definida como:



a) Escriba la función como un conjunto de funciones vistas en el curso.

Podemos notar que la función es una versión periodizada del triángulo, con período 5. Entonces, podemos expresar el trencito de triángulos como una convolución entre el triángulo y un shah de período 5:

$$\text{trencito_de_triangulos}(x) = \text{Ш}_5 * \wedge(x) = \frac{1}{5}\text{Ш}\left(\frac{x}{5}\right) * \wedge(x)$$

b) Encuentre la transformada de Fourier de la función *trencito de triángulos*.

Dado que la transformada de Fourier es un operador lineal, lo aplicamos a toda la ecuación:

$$\mathcal{F}\left\{\text{trencito_de_triangulos}(x)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{5}\text{Ш}\left(\frac{x}{5}\right) * \wedge(x)\right\}$$

Aplicamos propiedad de la convolución de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left\{\text{trencito_de_triangulos}(x)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{5}\text{Ш}\left(\frac{x}{5}\right)\right\} \cdot \mathcal{F}\left\{\wedge(x)\right\}$$

Ahora, sacamos transformada de Fourier de funciones conocidas:

Parto con el $\text{Ш}(x)$

- Sabemos que $\mathcal{F}\{\text{Ш}(x)\} = \text{Ш}(u)$.
- Aplico propiedad del escalamiento de la transformada de Fourier y linealidad:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{5}\text{Ш}\left(\frac{x}{5}\right)\right\} = \frac{1}{5}\cdot 5\cdot \text{Ш}(5u) = \text{Ш}(5u)$$

- Ahora el triángulo: Para resolver esto, utilizamos propiedad de la convolución, que indica:

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(u)G(u)$$

A continuación, consideramos que triángulo es la autoconvolución de rect, por lo tanto puedo calcular su transformada de Fourier:

$$\wedge(x) = \sqcap(x) * \sqcap(x)$$

Aplicando Fourier a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x) * \sqcap(x)\}$$

Utilizando propiedad de la convolución:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x)\}\mathcal{F}\{\sqcap(x)\}$$

Dado que $\mathcal{F}\{\sqcap(x)\} = \text{sinc}(u)$:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \text{sinc}^2(u)$$

Por lo tanto, reemplazando tendremos:

$$\mathcal{F}\{\text{trencito_de_triangulos}(x)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{5}\text{Ш}\left(\frac{x}{5}\right)\right\}\cdot\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \text{Ш}(5u)\cdot\text{sinc}^2(u)$$

c) Encuentre la transformada de Lapalce de la función:

$$f(x) = \textit{trencito_de_triangulos}(x)\cdot\sqcap\left(\frac{x}{2}\right)$$

Para resolver esto, notamos que:

$$f(x) = \textit{trencito_de_triangulos}(x)\cdot\sqcap\left(\frac{x}{2}\right) = \wedge(x)$$

A continuación, para encontrar la transformada de Laplace, utilizamos la forma integral:

$$\mathcal{L}\{\wedge(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \wedge(x) e^{-sx} dx$$

La función triángulo se define como:

$$\wedge(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

De esta forma, podemos re escribir la integral como:

$$\mathcal{L}\{\wedge(x)\} = \int_{-1}^{0} (x+1) e^{-sx} dx + \int_{0}^{1} (-x+1) e^{-sx} dx$$

Integrando se obtiene:

$$\int_{-1}^{0} (x+1) e^{-sx} dx = \frac{-1-s+e^s}{s^2} \qquad \int_{0}^{1} (-x+1) e^{-sx} dx = \frac{-1+s+e^s}{s^2}$$

Por lo tanto la transformada de Laplace del triángulo es:

$$\mathcal{L}\{\wedge(x)\} = \frac{e^s - 2}{s^2}$$

2. [**3 p**] Demuestre la propiedad del desplazamiento de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

Para demostrar la propiedad del desplazamiento, calculamos de forma integral la transformada de Laplace de una señal desplazada:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt$$

Ahora, para resolver hacemos un cambio de variable:

$$p = t - a \qquad t = p + a \qquad dp = dt$$

Aplicando en la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(p+a)} f(p) dp$$

Usamos propiedades de las potencias para resolver:

$$e^{-s(p+a)} = e^{-sp}e^{-sa}$$

Ahora:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sp}e^{-sa}f(p)dp$$

Notamos que e^{-sa} no depende de la variable de integración p, por lo que al ser constante en p sale de la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-sa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sp}f(p)dp$$

Podemos observar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sp}f(p)dp$ es la transformada de Laplace de $f(p)$, que es lo mismo que $\mathcal{L}\{f(t)\}$, porque no importa como se llamen las variables!!! Entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

Si $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces queda demostrado que:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

3. [**BONUS**] Encuentre la transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{2}{s+3}$$

Observamos que esta es la transformada de Laplace de un escalón pero está desplazada, por lo que utilizando propiedades y linealidad de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\} = 2e^{-3t}u(t)$$