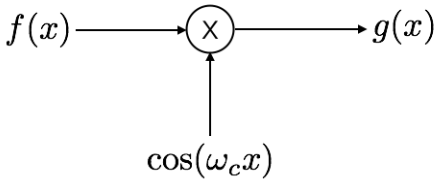
Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (5 pts.) **Propiedades de sistema.** Considere el sistema con entrada $f(x)$ y salida $g(x)$, determinado por la siguiente figura:



Determine si el sistema:

(a) (1 pt.) Tiene memoria

(b) (1 pt.) Es causal

(c) (1 pt.) Es lineal

(d) (1 pt.) Es invariante

(e) (1 pt.) Es estable

Solución:

(a) Como el sistema solo depende de valores presentes de la entrada, no tiene memoria → **1 pts.**.

(b) Como el sistema no depende de valores futuros de la entrada, es causal → **1 pts.**.

(c) Homogeneidad. Sea $f_1(x) = \alpha f(x)$. Entonces

$$g_1(x) = \alpha f(x)\cos(\omega_c x) \equiv \alpha g(x)$$

Superposición. Consideremos las entradas $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Entonces,

$$g_1(x) = f_1(x)\cos(\omega_c x)$$

$$g_2(x) = f_2(x)\cos(\omega_c x)$$

$$g_1(x) + g_2(x) = f_1(x)\cos(\omega_c x) + f_2(x)\cos(\omega_c x) \equiv (f_1(x) + f_2(x))\cos(\omega_c x)$$

Por lo tanto, el sistema es lineal → **1 pts.**.

(d) Sea $f_1(x) = f(x-\xi)$. Entonces

$$g_1(x) = f(x-\xi)\cos(\omega_c x) \neq f(x-\xi)\cos(\omega_c(x-\xi)) = y_1(x-\xi)$$

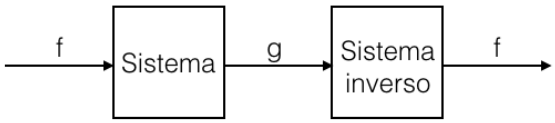
Por lo tanto, el sistema es variante → **1 pts.**

(e) Como $|\cos(\omega_c x)| \leq 1$, entonces

$$|g(x)| = |f(x)\cos(\omega_c x)| \leq |f(x)|$$

Entonces, el sistema es estable → **1 pts.**.

2. (5 pts.) **Sistema invertible.** Un sistema invertible es aquel en el cual se puede determinar la entrada f a partir de la observación de la salida g, como se muestra en la figura:



Determine si los siguientes sistemas son invertibles. En caso positivo, determine el sistema inverso.

(a) (1 pt.) $g(x) = 2f(x)$
(b) (1 pt.) $g(x) = f^2(x)$
(c) (1 pt.) $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$
(d) (1 pt.) $g[n] = \sum_{n=-\infty}^{N} f[n]$
(e) (1 pt.) $g[n] = nf[n]$

Solución:

(a) Invertible. $f(x) = \frac{1}{2}g(x) \rightarrow$ **1 pts.**
(b) No invertible. $\rightarrow$ **1 pts.**
(c) Invertible. $f(x) = \frac{d}{dx}g(x) \rightarrow$ **1 pts.**
(d) Invertible. $f[n] = g[n] - g[n-1] \rightarrow$ **1 pts.**
(e) No invertible. $\rightarrow$ **1 pts.**

3. (6 pts). **Transformadas de Fourier.** Considere la transformada de Fourier de $x(t) = e^{-|t|}$:

   (a) (3 pts.) Calcule por definición la transformada de Fourier de $x(t) = e^{-a|t|}$, y muestre que esta vale:

   $$X(u) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi u)^2}$$

   (b) (3 pts.) Calcule el valor de la integral:

   $$\int_0^\infty \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2} dx$$

   Hint: considere que $\cos(bx) = \Re\left\{e^{ibx}\right\}$ y la transformada de Fourier de la primera parte.

Solución:

(a) Planteamos la definición de transformada de Fourier:

$$X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ut} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi ut} dt + \int_{0}^{-\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ut} dt \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$= \int_{0}^{-\infty} e^{-(a+j2\pi u)t} dt + \int_{0}^{-\infty} e^{-(a-j2\pi u)t} dt \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$= \frac{1}{a + j2\pi u} + \frac{1}{a - j2\pi u} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi u)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Primero notamos que la función $f(x) = \dfrac{\cos(bx)}{a^2 + x^2}$ es par, por lo que podemos extender el intervalo de integración a todos los reales:

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2} dx \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

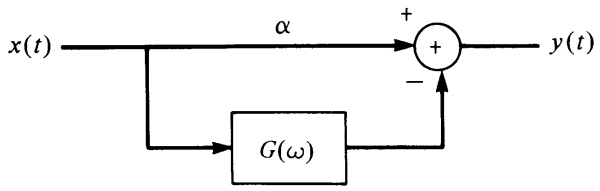
Después notamos que $a^2 + x^2$ es real, por lo que podemos aplicar parte real a toda la expresión:

$$= \frac{1}{2} \Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jbx}}{a^2 + x^2} dx \right\} \underbrace{=}_{x = 2\pi u} \pi \Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi bu}}{a^2 + (2\pi u)^2} du \right\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

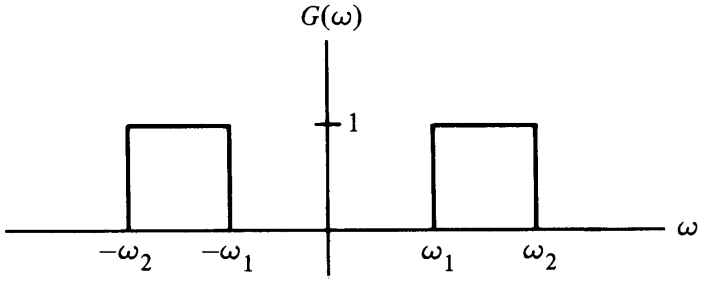
Ahora si reemplazamos $X(u) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi u)^2}$, que es la transformada de Fourier obtenida en la parte anterior:

$$= \pi \Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi bu} X(u) du \right\} = \pi \Re\left\{x(b)\right\} = \pi e^{-a|b|} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

4. (4 pts). **Respuestas de magnitud y fase.** Considere el sistema descrito por el siguiente diagrama de bloques:



La función de transferencia $G(\omega)$ es real, y está dada por el siguiente gráfico:



Grafique la respuesta de magnitud y fase resultante de la respuesta de frecuencia del sistema $H(\omega)$ para todos los casos relevantes en función de α. Recuerde que $\omega = 2\pi u$.

Solución:

En el dominio de Fourier, sabemos que

$$Y(\omega) = \alpha X(\omega) - G(\omega)X(\omega) = (\alpha - G(\omega))X(\omega)$$

Por lo tanto, la respuesta de frecuencia es:

$$H(\omega) = (\alpha - G(\omega)) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Hay que considerar tres casos.

(a) Para $\alpha > 1$:

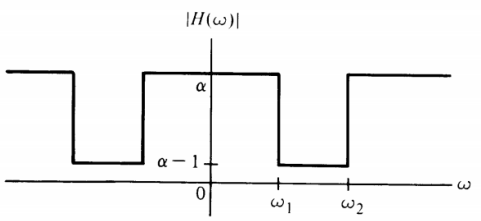


Figure 1: $\alpha > 1$

La fase es 0 para todo ω.
$\rightarrow$ **1 pts.**

(b) Para $0 < \alpha < 1$:

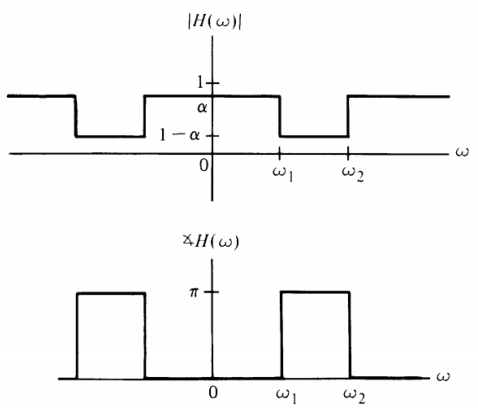


Figure 2: $0 < \alpha < 1$

→ **1 pts.**

(c) Para $\alpha < 0$:

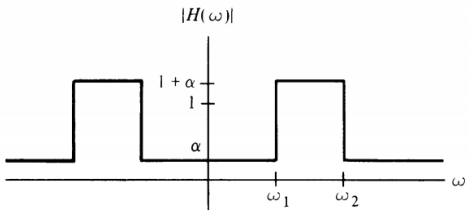


Figure 3: $\alpha < 0$

La fase es π para todo ω.

→ **1 pts.**

5. (4 pts). **Función de sistema.** Considere un sistema LTI definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t)$$

(a) (1 pts.) Encuentre la función de sistema $H(s)$.

(b) Determine la respuesta al impulso $h(t)$ para los siguientes casos

i. (1 pts.) El sistema es causal

ii. (1 pts.) El sistema es estable

iii. (1 pts.) El sistema no es causal ni estable

Solución:

(a) Tomando la Transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

por lo que

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s+2)(s-1)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

i. Si el sistema es causal, entonces $h(t)$ es causal (una señal derecha) y la ROC debe ser $\Re\{s\} > 1$. Por lo tanto,

$$h(t) = -\frac{1}{3}\left(e^{-2t} - e^{t}\right)\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

ii. Si el sistema es estable, entonces la ROC debe contener el eje imaginario. Por lo tanto, la condicion para la ROC es $-2 < \Re\{s\} < 1$. Entonces,

$$h(t) = -\frac{1}{3}(e^{-2t})\sqcap(t) - \frac{1}{3}(e^{t})\sqcap(-t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

iii. Si el sistema no estable ni causal, entonces $h(t)$ es una señal izquierda y la ROC debe cumplir $\Re\{s\} < -2$. Entonces,

$$h(t) = \frac{1}{3}(e^{-2t})\sqcap(-t) - \frac{1}{3}(e^{t})\sqcap(-t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

6. (4 ptos.) **Transformada Z.** Calcule la respuesta de un sistema a la entrada $f[n] = 2^n \sqcap [n]$ si su función de transferencia $H(z)$ es

$$H(z) = \log(z)(1-z).$$

Solución:

Como las exponenciales son funciones propias de los sistemas LTI se tendrá que $\mathcal{L}\{a^n \sqcap [n]\} = H(a)\, a^n \sqcap [n] \rightarrow$ **1 pts.**, por lo tanto

$$g[n] = -\log(2)\, 2^n \sqcap [n]. \rightarrow \textbf{3 pts.}$$

7. (4 pts). **DFT.** Esta utilizando MATLAB y necesita sacar la transformada de Fourier de una señal $\tilde{f}[n]$, para esto su amigo Pedrito le sugiere que use el siguiente algoritmo "equivalente":

DFT.m

```
N = length(f);
I = eye(N);
%Identidad
W = fft(I)/N;
F = W*f;
```

¿Es cierto que el procedimiento es equivalente a DFT $\left\{\tilde{f}[n]\right\}$?

Solución:

Como MATLAB realiza operaciones columna a columna en el caso que no se especifique la dimensión, el algoritmo es lo mismo que→ **2 pts.**

$$\begin{aligned}\text{fft}\left(\left[\delta[n], \delta[n-1], \ldots, \delta[n-N]\right]_{N\times N}\right) &= \left[e^{-i2\pi 1k/N}, e^{-i2\pi 2k/N}, \ldots, e^{-i2\pi 2N/N}\right]_{N\times N} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega^{1\cdot 1} & \omega^{1\cdot 2} & \ldots & \omega^{1\cdot N} \\ 1 & \omega^{2\cdot 1} & \omega^{2\cdot 2} & \ldots & \omega^{2\cdot N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N\cdot 1} & \omega^{N\cdot 2} & \ldots & \omega^{N\cdot N} \end{bmatrix}. \\ &= N\mathcal{W}_N.\end{aligned}$$

Luego al dividir por N **queda exactamente** $\boldsymbol{F} = \text{DFT}\left\{\tilde{f}[n]\right\} = \mathcal{W}_N \boldsymbol{f}$.→ **2 pts.**

8. (4 pts). **2D-DFT.** Pedrito además le dice que para una imagen $f[m,n]$ de $N \times N$ el siguiente procedimiento es equivalente a usar la 2D-DFT:

2D-DFT.m

```
N = length(f);
I = eye(N);
%Identidad
W = fft(I)/N;
F = W*f*W';
```

¿Es cierto que el procedimiento es equivalente a $2D-\text{DFT}\left\{\tilde{f}[m,n]\right\}$?

Solución:

Debido a que la 2D-DFT es separable→ **1 pts.**

$$\begin{aligned} F[k,l] &= \frac{1}{N^2}\sum_m\sum_n f[m,n]\, e^{-i2\pi kn/N} e^{-i2\pi km/N} \\ &= \underbrace{\frac{1}{N}\sum_m e^{-i2\pi km/N} \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_n f[m,n]\, e^{-i2\pi kn/N}\right)}_{\text{fft}(f)/N}}_{\text{fft}(\text{fft}(f)^{\text{T}}/N)^{\text{T}}/N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2D-\text{DFT}\{f[m,n]\} &= \left(\mathcal{W}\left(\mathcal{W}\boldsymbol{f}\right)^{\text{T}}\right)^{\text{T}} \\ &= \mathcal{W}\boldsymbol{f}\mathcal{W}^{\text{T}}. \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}} \end{aligned}$$

Entonces la propiedad **no es correcta** por que `A'` en MATLAB es la traspuesta conjugada.→ **1 pts.**

9. (3 pts). **Wavelets.** En las siguientes casillas encierre si las siguientes aseveraciones son verdaderas (V) o falsas (F) y justifique las falsas:

(a) (1 pts.) $\boxed{V\,/\,F}$ Las Wavelets son funciones que **deben** integrar cero para tener transformada inversa, es decir $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) (1 pts.) $\boxed{V\,/\,F}$ La función de escala $\phi(x)$ sirve para agregar la información perdida de **frecuencias altas**.

(c) (1 pts.) $\boxed{V\,/\,F}$ Para reconstruir exactamente una señal con su transformada Wavelet discreta diádica, es necesario usar **solo** la escala más baja en los coeficientes de aproximaición a_N y todos los coeficientes de detalle d_n con $n = 1, \ldots, N$.

Solución:

(a) $\boxed{\boxed{V}\,/\,F}$ → **1 pts.**

(b) $\boxed{V\,/\,\boxed{F}}$ Son las frecuencias bajas, debido que se toman las escalas más pequeñas. → **1 pts.**

(c) $\boxed{\boxed{V}\,/\,F}$ → **1 pts.**