Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 4

Fecha de entrega: 3 de abril de 2022

---

1. Investigue y explique en palabras simples que es la serie de Fourier.

   La serie de Fourier es la expresión de una función periódica como una suma infinita de sinusoides. Esta se puede escribir en forma trigonométrica o en forma compleja.

2. Escriba la serie de Fourier (fórmula) en forma trigonométrica y en forma compleja.

   - Forma trigonométrica:

   $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi knx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi knx$$

   - Forma compleja:

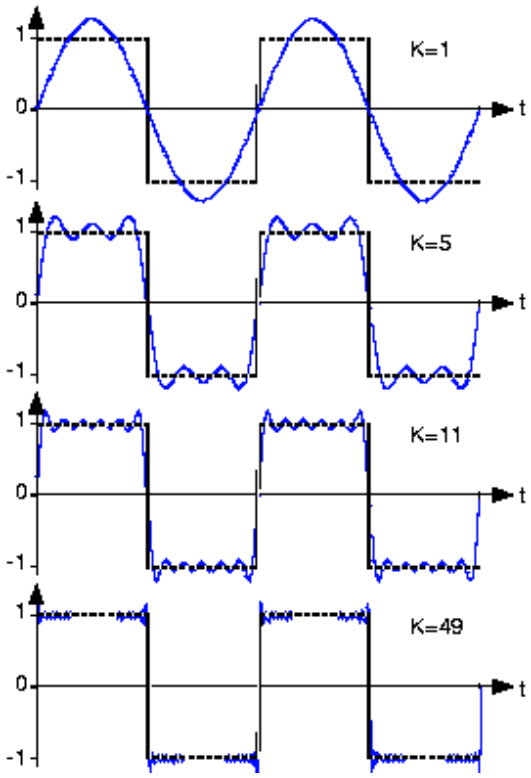
   $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{-i2\pi k \frac{nx}{T}}$$

   Donde:

   $$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i2\pi k \frac{nx}{T}} dx$$

3. Investigue sobre el fenómeno de gibbs y descríbalo. **Sugerencia: usar un dibujo**.

   El fenómeno de Gibbs consiste en la generación de overshoots en puntos de la señal cuando esta se sexpresa como serie de Fourier. Ocurre cada vez que las señales tienen discontinuidades de salto, generalmente en los extremos, y siempre está presentes cuando la señal tiene oscilaciones fuertes. La altura del overshoot disminuyen en la medida que se suman más componentes de Fourier, es decir, **los saltos se representan como componentes de alta frecuencia.**



4. Encontrar los coeficientes de Fourier de la función:

$$f(x) = \sin^2(x)$$

Hint: use la forma compleja de la serie

Para resolver esto, es conveniente expresar el seno en su forma exponencial compleja:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

A continuación lo elevamos al cuadrado:

$$\sin^2(x) = \frac{-1}{4}\left(e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right)$$

Notemos que la serie de Fourier en forma compleja es:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{-i2\pi k\frac{nx}{T}}$$

Si reordenamos los coeficientes de la forma exponencial de $\sin^2$ según los exponentes(valores de n) tendremos:

$$\sin^2(x) = \frac{-1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{4}e^{-2ix}$$

Esto significa que la función seno cuadrado solo tiene 3 componentes:

- $C_{-1} = \frac{-1}{4}$
- $C_0 = \frac{1}{2}$
- $C_1 = \frac{-1}{4}$

5. Investigue la relación entre la serie y la transformada de Fourier.

   La transformada de Fourier entrega los coeficientes de Fourier C_n de una función con período infinito.

6. Calcule la transformada de Fourier de un impulso.

   Consideremos la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2}dx$$

   Si ahora evaluamos en $f(x) = \delta(x)$:

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i2}dx$$

   Observemos que la expresión de la derecha tiene forma de distribución temperada, tal que:

$$< \delta, e^{-i2\pi ux} >= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

   Por definición, la distribución impulso corresponde la función a la que se aplica evaluada en cero, luego:

$$< \delta, e^{-i2\pi ux} >= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i2\pi ux}dx = e^0 = 1$$

   Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1}$$