Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (12 ptos.) **Transformada Z.**

   (a) (8 pts.) Sea $f[k]$ una señal derecha discreta tal que $f[k+L] = -f[k]$ para $L \geq 1$ entero. Se define $\tilde{F}(z)$ como

   $$\tilde{F}(z) = \sum_{k=0}^{L-1} f[k] z^{-k}.$$

   Demuestre que:

   $$F(z) = \frac{\tilde{F}(z)}{1+z^{-L}}.$$

   (b) (4 pts.) Encuentre la Transformada Z inversa de

   i. (2 pts.) $F(z) = \log(1-2z), \quad |z| < \frac{1}{2}$

   ii. (2 pts.) $F(z) = \log(1-\frac{1}{2}z^{-1}), \quad |z| > \frac{1}{2}$

Solución:

(a) Tenemos que la señal es derecha y discreta, por lo cual su transformada $\mathcal{Z}$ puede escribirse sin pérdida de generalidad como la suma desde $k=0$ y no desde $k=-\infty$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

pero dado que se detecta cierto tipo de periodicidad en la señal:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=kL}^{(k+1)L-1} f[j] z^{-j} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Haciendo en la primera suma $n = j - kL \rightarrow j = n + kL$, entonces lo anterior se escribe como:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{L-1} f[n+kL] z^{-j} z^{-kL} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Pero $f[n+kL] = (-1)^k f[n]$ por la propiedad del enunciado y z^{-kL} puede ser sacado fuera de la primera sumatoria, con lo cual:

$$F(z) = \tilde{F}(z) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-kL} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

reconociendo la serie geométrica concluimos que

$$\boxed{F(z) = \frac{\tilde{F}(z)}{1+z^{-L}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Sea $G(z) = -z\frac{d}{dz}F(z)$, entonces sabemos que

$$g[n] = nf[n]$$

i.

$$G(z) = -z\frac{d}{dz}F(z) = z\frac{2}{1-2z} = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

La ROC de $G(z)$ es $|z| < \frac{1}{2}$, que es la misma que la ROC de $F(z)$, por lo que

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[-n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

finalmente,

$$f[n] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[-n-1] = \boxed{\frac{2^{-n}}{n}\sqcap[-n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

ii.

$$G(z) = -z\frac{d}{dz}F(z) = z\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

La ROC de $G(z)$ es $|z| > \frac{1}{2}$, que es la misma que la ROC de $F(z)$, por lo que

$$y[n] = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sqcap[n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

finalmente,

$$f[n] = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n-1] = \boxed{-\frac{2^{-n}}{n}\sqcap[n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

2. (10 ptos.) **Transformada de Hankel.** Se define la función de Bessel de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ como:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\alpha t - x\sin(t)]}\mathrm{d}t$$

Se puede demostrar mediante conocimientos adicionales respecto a las funciones de Bessel que estas satisfacen la identidad

$$\int_0^\infty J_\alpha(\beta_1 x)\, J_\alpha(\beta_2 x)\, x\,\mathrm{d}x = \frac{\delta(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1} \quad ; \quad \beta_1,\beta_2 > 0$$

A partir de esta identidad definimos la Transformada de Hankel de orden α como:

$$F_\alpha(k) = \mathcal{H}_\alpha(f,k) = \int_0^\infty f(r)\, J_\alpha(kr)\, r\,\mathrm{d}r$$

(a) (3 ptos.) Demuestre que el Teorema de Parseval en el espectro de Hankel:

$$\int_0^\infty |f(r)|^2\, r\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty |F_\alpha(k)|^2\, k\,\mathrm{d}k.$$

Ayuda: Asuma que las funciones de Bessel son siempre reales.

(b) (7 ptos.) Considere la Transformada de Fourier 2D en coordenadas polares:

$$F(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(r,\theta)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

donde $\mathbf{k} = -2\pi(u,v)$ y $\mathbf{r}$ es el vector posición en coordenadas polares. Demuestre que si f es una función radial, i.e. $f(r,\theta) = f(r)$, entonces:

$$F(u) = 2\pi\mathcal{H}_0(f, -2\pi u).$$

donde $F(u)$ es la Transformada de Fourier 2D en el eje x.

Solución:

(a) Partiremos demostrando el Teorema de Plancherel, i.e.

$$\int_0^\infty f(r)\, g^*(r)\; r\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty F_\alpha(k)\, G_\alpha^*(k)\; k\,\mathrm{d}k$$

Para ello notamos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F_\alpha(k)\, G_\alpha^*(k)\; k\,\mathrm{d}k &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(r)\, J_\alpha(kr)\, r\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\infty g^*(\xi)\, J_\alpha(k\xi)\,\xi\,\mathrm{d}\xi\right) k\,\mathrm{d}k \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(r)\, g^*(\xi)\, J_\alpha(kr)\, r J_\alpha(k\xi)\,\xi\, k\,\mathrm{d}k\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty f(r)\, r g^*(\xi)\,\xi\left(\int_0^\infty J_\alpha(kr)\, J_\alpha(k\xi)\; k\,\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}
\end{aligned}$$

por propiedad de ortogonalidad

$$\int_0^\infty J_\alpha(kr)\, J_\alpha(k\xi)\; k\,\mathrm{d}k = \frac{\delta(r-\xi)}{\xi},$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F_\alpha(k)\, G_\alpha^*(k)\; k\,\mathrm{d}k &= \int_0^\infty f(r)\, r \int_0^\infty g^*(\xi)\,\delta(r-\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty f(r)\, g^*(r)\; r\,\mathrm{d}r \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}\end{aligned}$$

Haciendo $g = f$ concluimos que

$$\int_0^\infty f(r)\, f^*(r)\; r\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty F_\alpha(k)\, F_\alpha^*(k)\; k\,\mathrm{d}k$$

que es equivalente a la expresión buscada:

$$\int_0^\infty |f(r)|^2\, r\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty |F_\alpha(k)|^2\, k\,\mathrm{d}k \quad \blacksquare \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Dado que solo estamos interesados en los resultados del eje x, trabajaremos solamente en este eje, haciendo

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = -i2\pi u r\cos\theta \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

con lo cual la integral de Fourier se escribe como:

$$F(u) = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(r,\theta)\, e^{-i2\pi u r\cos\theta} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

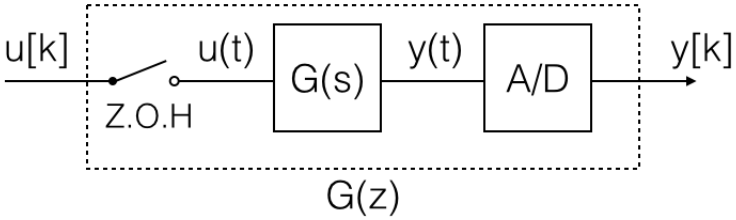
Como f es una función radial, y alternando las integrales, obtenemos:

$$\begin{aligned}F(u) &= \int_0^\infty r f(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i(2\pi u r)\cos\theta}\mathrm{d}\theta}_{2\pi J_0(-2\pi u r)}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty f(r)\, J_0(-2\pi u r)\; r\,\mathrm{d}r \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}\end{aligned}$$

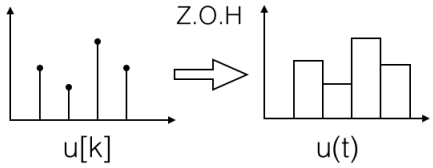
Concluimos finalmente que:

$$\boxed{F(u) = 2\pi\mathcal{H}_0(f, -2\pi u)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

3. (10 ptos.) **Retención de orden cero.** Considere el diagrama descrito en la siguiente figura:



donde el proceso $u[k] \to u(t)$ se realiza mediante retención de orden cero (Z.O.H. en inglés), tal como lo muestra la siguiente figura



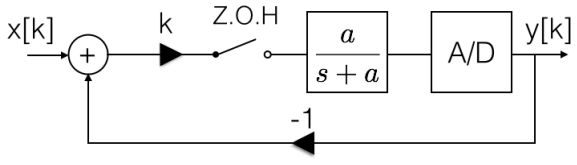
El proceso $y(t) \to y[k]$ se realiza mediante las técnicas de muestreo habituales (multiplicación por shah).

(a) (2 ptos.) Escriba $u(t)$ en términos de $u[k]$, $\sqsubset(t)$ y/o $\sqcap(t)$.

(b) (5 ptos.) Demuestre que:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}.$$

Considere ahora un sistema realimentado como el descrito por la figura siguiente:



donde a es un número real fijo.

(c) (2 ptos.) Determine los valores de la constante $k > 0$ constante que hacen que el sistema se vuelva inestable. Asuma un período de muestreo T.

(d) (1 pto.) ¿Qué puede decir sobre la estabilidad del sistema respecto a los valores de T? Justifique sus resultados.

Solución:

(a) La forma más sencilla de hacerlo es a través de pulsos cuadrados, con lo cual

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \sqcap \left(\frac{t - T/2 - kT}{T} \right)$$

donde el rect corresponde a un pulso del ancho del período de muestreo, ubicado entre dos muestras. Pero,

$$\sqcap \left(\frac{t - T/2 - kT}{T} \right) = \sqcap (t - kT) - \sqcap (t - (k+1)T)$$

Luego,

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \left[\sqcap (t - kT) - \sqcap (t - (k+1)T) \right]$$

Ambas respuestas son válidas → **2 pts.** .

(b) Dado que el sistema tiene respuesta al impulso $G(s)$, entonces:

$$\begin{aligned} Y(s) &= U(s) G(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \frac{G(s)}{s} \left[e^{-skT} - e^{-s(k+1)T} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \frac{G(s)}{s} e^{-skT} \left(1 - e^{-sT} \right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Sea $m(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$, entonces:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \left[m(t - kT) - m(t - (k+1)T) \right] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Discretizando con $t = jT$:

$$\begin{aligned} y[j] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \left\{ m[j-k] - m[j-(k+1)] \right\} \\ &= u[j] *_\ell m[j] - u[j] *_\ell m[j-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Llevando al dominio $\mathcal{Z}$:

$$Y(z) = U(z) M(z) - z^{-1} U(z) M(z) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Finalmente, notando que $M(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\}$, entonces:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(1 - z^{-1} \right) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

corresponde a la función de transferencia total.

(c) Consideremos el sistema $G(s) = \dfrac{a}{s+a}$ de la figura. Entonces,

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Llevando al dominio temporal,

$$h(t) = \left(1 - e^{-at}\right) \sqcap (t)$$

Ahora discretizamos haciendo $k = T \cdot t$:

$$h[k] = \sqcap [k] - e^{-aTk} \sqcap [k]$$

Llevando al dominio $\mathcal{Z}$ la función anterior obtenemos:

$$G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z} = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

En este caso, la ecuación característica del sistema realimentado se expresa como:

$$z - e^{-aT} + K - Ke^{-aT} = z - (K+1)\, e^{-aT} + K = 0$$

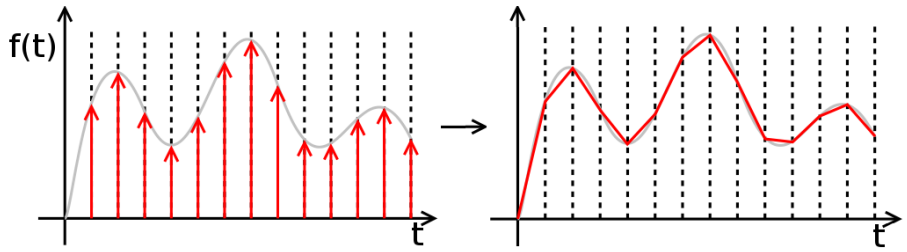
Es fácil notar que el sistema es inestable si:

$$\left|K\left(e^{-aT} - 1\right) + e^{-aT}\right| > 1 \rightarrow K\left(e^{-aT} - 1\right) < -e^{-aT} - 1$$

$$\rightarrow \boxed{K > \frac{e^{-aT} + 1}{1 - e^{-aT}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(d) Para T cada vez mayor la ganancia se hace cada vez más cercana a 1, de forma decreciente, con lo cual podemos concluir que **períodos de muestreo mayores inestabilizan el sistema** $\rightarrow$ **1 pts.** .

4. (10 pts.) **Retención de primer orden.** Un método popular de interpolación es la retención de primer orden (F.O.H. en inglés), la que consiste en definir una función lineal entre cada punto muestreado, como se puede ver en la siguiente figura:



(a) (2 pts.) Demuestre que convolucionar las muestras obtenidas a tiempo de muestreo T con $h_{FOH}(t) = \wedge(t/T)$ permite obtener la interpolación F.O.H.

(b) (2 pts.) Exprese analíticamente y bosqueje el espectro de la señal interpolada.

(c) (6 pts.) Si ahora la señal interpolada se convoluciona con $h(t) = \sqcap(t/T)/T$ para suavizarla, se recuperará una señal similar a la original, si es que esta solo contiene frecuencias bajas en relación a la frecuencia de Nyquist. Si asumimos aceptable que el espectro de la señal recuperada difiera hasta en un 10% del espectro de la señal original, ¿cuál es la máxima frecuencia que podríamos recuperar de forma confiable tras el proceso?. Exprésela como una fracción de la frecuencia de Nyquist. Para aproximar la función $\text{sinc}(x)$ cerca de $x = 0$ se recomienda utilizar el polinomio de Taylor de segundo orden.

Solución:

a) Tenemos que para el intervalo $t \in [nT, (n+1)T]$, la señal interpolada vale:

$$f_{FOH}(t) = f[n] \wedge ((t - nT)/T) + f[n+1] \wedge ((t - (n+1)T/T)) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Ahora si utilizamos la definición de función triángulo, tenemos:

$$f_{FOH}(t) = f[n](1 - (t - nT)/T) + f[n+1](1 + (t - (n+1)T)/T)$$

$$= \left(\frac{f[n+1] - f[n]}{T}\right) t + f[n] + n(f[n] - f[n+1])$$

Que corresponde a la función lineal que pasa por las muestras n y $n+1$.$\rightarrow$ $\boxed{\textbf{1 pts.}}$

b) Tenemos que la función interpolada en el dominio del tiempo puede ser expresada como:

$$f_{FOH}(t) = (f(t) \cdot \text{Ш}(t/T)) * \wedge(t/T) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Esto en el dominio de la frecuencia se convierte en:

$$F_{FOH}(u) = (F(u) * \text{Ш}(Tu)) \cdot \text{sinc}^2(Tu) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

c) Tras convolucionar por $h(t)$ y obtener una salida $g(t)$, se tiene que el espectro de esta es:

$$G(u) = (F(u) * \text{Ш}(Tu)) \cdot \text{sinc}^3(Tu) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

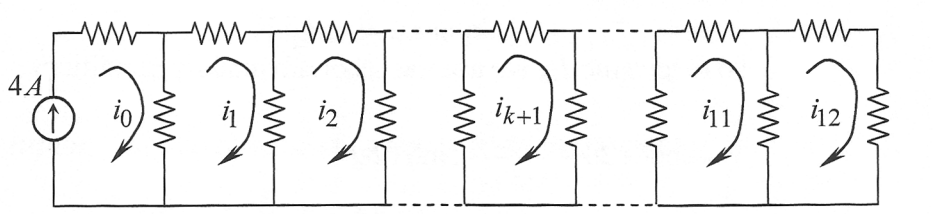
Si asumimos que la señal solo tiene frecuencias bajas y no tiene aliasión, tenemos que resolver $\text{sinc}^3(Tu) = 0.9 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$ para encontrar la frecuencia que cumple con la condición deseada, entonces usamos la aproximación $\text{sinc}(x) \approx 1 - \frac{\pi^2 x^2}{6}$, $\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$ con lo que resolvemos:

$$1 - \frac{\pi^2 (Tu)^2}{6} = \sqrt[3]{0.9} \quad \rightarrow \quad u = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{6(1 - \sqrt[3]{0.9})}{\pi^2}} \approx 0.145/T$$

$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$

Como tenemos que la frecuencia de Nyquist es $u = 0.5/T$, tenemos que la mayor frecuencia recuperada de forma confiable por este método es menor a un tercio de la frecuencia de Nyquist $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.

5. (10 pts.) **Red de circuitos.** Considere la red de circuitos eléctricos compuesta por los bucles simétricos de la figura siguiente. Asuma que todas las resistencias tienen un valor $R = 1\Omega$.



(a) (2 pts.) Determine una ecuación de diferencias que describa el comportamiento de la red.

(b) (2 pts.) Determine las condiciones de borde del problema.

(c) (6 pts.) Utilizando la Transformada Z, encuentre el valor de la corriente para cualquier bucle.

(a) Considerando el bucle k de la figura, y utilizando la ley de Ohm podemos escribir:

$$(i[k] - i[k+1])R = i[k+1]R + (i[k] - i[k+2])R \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

como $R = 1$, entonces

$$i[k] - i[k+1] - i[k+1] - i[k+1] + i[k+2] = 0$$

es decir,

$$3i[k+1] - i[k+2] - i[k] = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Las condiciones de borde son

$$i[0] = 4 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

y

$$i[11] - i[12] = 2i[12]$$

es decir,

$$i[12] = \frac{i[11]}{3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Aplicando Transformada Z unilateral a la ecuación de diferencias, tenemos

$$3zI(z) - 3zi[0] - (z^2 I(z) - z^2 i[0] - zi[1]) - I(z) = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

utilizando la condición de borde $i[0] = 4$,

$$3zI(z) - 12z - z^2 I(z) + 4z^2 + zi[1] - I(z) = 0$$

$$(z^2 - 3z + 1)I(z) = 4z^2 - 12z + zi[1]$$

despejando,

$$I(z) = \frac{4z^2 - 12z + zi[1]}{z^2 - 3z + 1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Hay varias formas de calcular esta inversa, probablemente la más facil sea notando los siguientes pares:

$$\cosh[\alpha n] \rightarrow \frac{z(z - \cosh[\alpha])}{1 - 2z\cosh[\alpha] + z^2}$$

$$\sinh[\alpha n] \rightarrow \frac{z\sinh[\alpha]}{1 - 2z\cosh[\alpha] + z^2}$$

Entonces, reescribimos la ecuación para $I(z)$ de la forma,

$$I(z) = \frac{4z(z - \frac{3}{2})}{z^2 - 2z(\frac{3}{2}) + 1} - \frac{(6 - i[1])z}{z^2 - 2z(\frac{3}{2}) + 1}$$

La inversa es entonces

$$i[n] = \cosh[\alpha n] - \frac{6 - i[1]}{\sinh[\alpha]}\sinh[\alpha n] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Es claro que en este caso $\cosh[\alpha] = \frac{3}{2}$ lo que implica que $\alpha = 0.9624$.
Para determinar $i[1]$ utilizamos la segunda condición de borde

$$\cosh[12\alpha] - \frac{6 - i[1]}{\sinh[\alpha]}\sinh[12\alpha] = \frac{\cosh[11\alpha] - \frac{6 - i[1]}{\sinh[\alpha]}\sinh[11\alpha]}{3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

con lo que $i[1] = 1.52$. Finalmente, la corriente en cualquier bucle es

$$\boxed{i[n] = 4\cosh[0.9624n] - \frac{4.48\sinh[0.9624n]}{\sinh(0.9624)}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

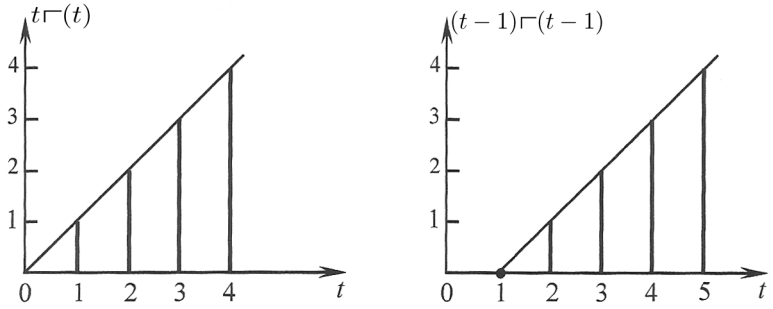
6. (8 pts.) **Muestreo.**

   (a) (6 pts.) Considere la señal análoga $x(t) = 5\cos(200\pi t - \pi/6)$, muestreada con frecuencias:

   i. $f_s = 150$Hz
   ii. $f_s = 250$Hz

   Para ambos casos, explique si es posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de sus muestras y como hacerlo.

   (b) (2 pts.) Considere la señal $f(t) = t\sqcap(t)$ muestreada a un intervalo de muestreo igual a 1, como lo muestra la siguiente figura (a la izquierda).



   Considere ahora la señal desplazada de la figura anterior (a la derecha). Obtenga la Transformada Z de la señal desplazada cuando se muestrea a un intervalo de $T = 1$ seg.

Solución:

(a) La frecuencia de la sinusoide en Hertz es $f = 100$ Hz → **1 pts.**, por lo que la frecuencia de Nyquist es $f_s > 200$ Hz → **1 pts.**. Al ser muestreada con frecuencia $f_s = 250$ Hz se está sobremuestreando y se puede reconstruir perfectamente con un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte en $200Hz$ → **1 pts.**.
Al muestrear con $f_s = 250$ Hz, se está submuestreando, por lo que los espectros replicados por el proceso de muestreo se traslapan, produciendo aliasión → **1 pts.**. Sin embargo, dado que se trata de una sinusoide, los componentes de frecuencia aliados quedan en 50 Hz, 200 Hz, . . . ,→ **1 pts.** por lo que la señal original se puede recuperar mediante un filtro pasa banda centrado en 100 Hz, con ancho de banda menor a 50 Hz → **1 pts.**.

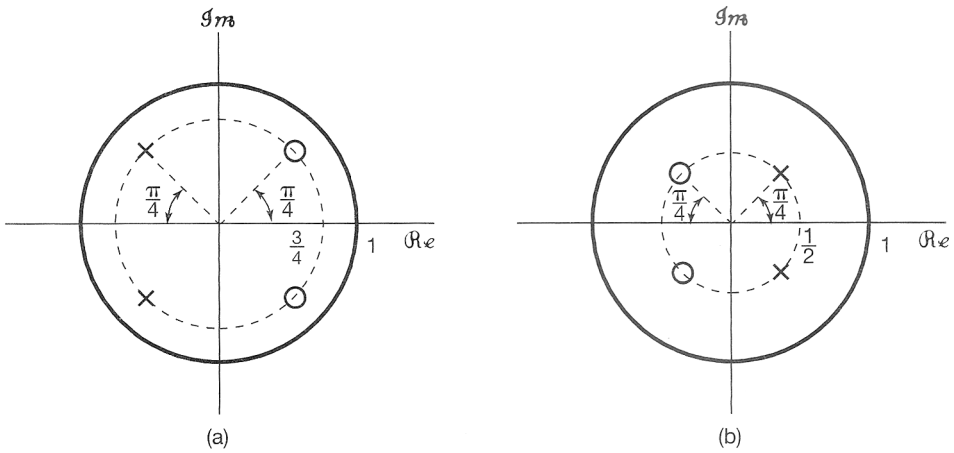
(b) La función de la izquierda, en su versión muestreada es $f[n] = n\sqcap[n]$, cuya Transformada Z es

$$F(z) = \frac{zT}{(z-1)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

La función desfasada es $g[n] = (n-1)\sqcap[n-1]$
Aplicando la propiedad del desplazamiento en Z para $G(z)$, y considerando $T = 1$,

$$G(z) = z^{-1}\frac{z}{(z-1)^2} = \boxed{\frac{1}{(z-1)^2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

7. (10 pts.) **Diseño de secuencia.** Considere un sistema LTI causal de segundo orden que se ha diseñado con una respuesta al impulso real $h_1[n]$, y con una respuesta de frecuencia racional $H_1(z)$. El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura siguiente (a). Considere ahora un segundo sistema causal de segundo orden con respuesta al impulso $h_2[n]$ y respuesta de frecuencia racional $H_2(z)$. El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura (b).



Determine una secuencia $g[n]$ que cumpla con las tres condiciones siguientes:

(a) $h_2[n] = g[n]h_1[n]$.
(b) $g[n] = 0$, para $n < 0$.
(c) $\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| = 3$

Solución:

De acuerdo a la figura, podemos escribir las funciones de transferencia

$$H_1(z) = K_1 \frac{(z - \frac{3}{4}e^{i\pi/4})(z - \frac{3}{4}e^{-i\pi/4})}{(z - \frac{3}{4}e^{i3\pi/4})(z - \frac{3}{4}e^{-3i\pi/4})} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

y

$$H_2(z) = K_2 \frac{(z - \frac{1}{2}e^{i3\pi/4})(z - \frac{1}{2}e^{-3i\pi/4})}{(z - \frac{1}{2}e^{i\pi/4})(z - \frac{1}{2}e^{-i\pi/4})} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

donde K_1 y K_2 son constantes.

De ambas ecuaciones, notamos que:

$$H_2(z) = \frac{K_2}{K_1} H_1(\frac{3}{2}ze^{i\pi}) = \frac{K_2}{K_1} H_1(-\frac{3}{2}z) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Utilizando la propiedad del escalamiento en el dominio z de la Transformada Z,

$$h_2[n] = \frac{K_2}{K_1}(-\frac{2}{3})^n h_1[n] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

por lo que,

$$g[n] = \frac{K_2}{K_1}(-\frac{2}{3})^n$$

Como $h_1[n]$ y $h_2[n]$ son causales, podemos asumir que $g[n] = 0$ para $n < 0$, por lo que.

$$g[n] = \frac{K_2}{K_1}(-\frac{2}{3})^n \sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Por último, sabemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K_2}{K_1}(-\frac{2}{3})^k = 3$$

es decir,

$$\frac{K_2}{K_1}\frac{1}{1-2/3} = 3 \rightarrow \frac{K_2}{K_1} = 1$$

Finalmente,

$$\boxed{g[n] = (-\frac{2}{3})^n \sqcap[n]} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$