Ayudantía 5

Transformada de Laplace

Señales y Sistemas

30 de septiembre de 2022

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Resumen: la transformada de Laplace

- La transformada de Laplace es una transformada integral que mapea una función $f(t) \in \mathbb{C}$ con variable independiente $t \in \mathbb{R}$ a una función $F(s) \in \mathbb{C}$ con variable $s \in \mathbb{C}$
- Su definición matemática es:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

  Donde e^{-st} es la base de Laplace.
- La variable s es una variable compleja de la forma $s = \sigma + i2\pi u$
- La región de convergencia de la transformada de Laplace **ROC** corresponde a el rango de valores de σ para los que la integral que define a la transformada converge.

Resumen: relación transformada de Fourier y transformada de Laplace

- La variable s es una variable compleja de la forma $s = \sigma + i2\pi u$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t(\sigma+i2\pi u)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i2\pi u}dt$$

- El u corresponde a la variable de frecuencia de la transformada de Fourier. De esta forma, **la transformada de Fourier es un caso particular de la transformada de Laplace**. Observemos que para $\sigma = 0$ se tiene que $s = i2\pi u$. En este caso la transformada de Laplace se ve de la forma:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i2\pi u}dt \xrightarrow{\sigma=0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi u}dt$$

Lo que corresponde a la transformada de Fourier.

Resumen: relación transformada de Fourier y transformada de Laplace

- En general, la transformada de Laplace de una función se puede expresar como una división de polinomios de s, de la forma:

$$F(s) = \frac{Z(s)}{P(s)}$$

- En este esquema, los ceros del numerador se denominan *ceros de F(s)* y los ceros del denominador se llaman *polos de F(s)*.
- Estos valores nos entregan información sobre el comportamiento de la función en el plano s, por lo que es práctico agruparlos en un diagrama de polos y ceros, donde los polos se marcan con una X y los ceros se marcan con una O.
- Si una función en Laplace es la función de transferencia de un sistema, se dirá que **el sistema es estable si no tiene polos con parte real positiva**.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Transformada de Laplace: ejercicio 1

Encuentre la transformada de Laplace de la función $f(t) = \cos(6\pi t)u(t)$.

- Para comenzar, escribimos el coseno en su forma exponencial compleja para facilitar los cálculos:

$$\cos(6\pi t)u(t) = \frac{e^{i6\pi t} + e^{-i6\pi t}}{2} u(t)dt$$

- A continuación, reemplazamos la función en la definición de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\cos(6\pi t)u(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \frac{e^{i6\pi t} + e^{-i6\pi t}}{2} u(t)$$

Transformada de Laplace: ejercicio 1

- Ahora, aplico multiplicación por escalón (solo integro la parte positiva del dominio):

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(6\pi t\right)u(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{i6\pi t}+e^{-i6\pi t}}{2}$$

- A continuación uso linealidad de la integral para sacar las constantes y uso propiedades de las potencias :

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(6\pi t\right)u(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-t(s-6i\pi)}dt + \int_0^\infty e^{-t(s+6i\pi)}dt\right]$$

Transformada de Laplace: ejercicio 1

- Ahora, observo la integral y me doy cuenta de que es de la forma:

$$\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}$$

- Con esto resulevo las integrales

$$\mathcal{L}\{\cos(6\pi t)u(t)\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{s-6i\pi}\left[e^{-t(s-6i\pi)}\right]_0^\infty + \frac{-1}{s+6i\pi}\left[e^{-t(s+6i\pi)}\right]_0^\infty\right)$$

- Observo que para t=0 $e^{-t(s\pm 6i\pi)} = 1$ y que $e^{-t(s-6i\pi)}$ converge en infinito si $s - 6i\pi > 0$ y $e^{-t(s+6i\pi)}$ converge en infinito si $s + 6i\pi > 0$. Sumamos las desigualdades y obtenemos:

$$2s > 0 \quad \rightarrow \quad s > 0$$

Esto corresponde a la **ROC** de la transformada.

Transformada de Laplace: ejercicio 1

- Considerando que se cumple la ROC, evaluamos en las integrales (calculando el límite):

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(6\pi t\right)u(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{s-6i\pi}\left[0-1\right] + \frac{-1}{s+6i\pi}\left[0-1\right]\right)$$

- A continuación, desarrollo el álgebra:

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(6\pi t\right)u(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-6i\pi} + \frac{1}{s+6i\pi}\right)$$

- Sumamos fracciones:

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(6\pi t\right)u(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+6i\pi+s-6i\pi}{(s-6i\pi)(s+6i\pi)}\right)$$

Transformada de Laplace: ejercicio 1

- Desarrollamos el álgebra en el numerador y tomamos en cuenta que la multiplicación de los denominadores es una suma por diferencia: $(s - 6i\pi) \cdot (s + 6i\pi) = s^2 - (6i\pi)^2 = s^2 + 36\pi^2$ de lo que se obtiene:

$$\mathcal{L}\{\cos(6\pi t)u(t)\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 + 36\pi^2}\right)$$

- Finalmente, multiplicamos la constante y obtenemos la transformada de Laplace. **Cuando usted escriba transformadas de Laplace NUNCA debe olvidar indicar la región de convergencia**:

$$\mathcal{L}\{\cos(6\pi t)u(t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 36\pi^2} \qquad \textbf{ROC}: \quad \mathbf{s > 0}$$

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Transformada de Laplace: ejercicio 2

Sea $F(u) = 2\text{sinc}(u)$, donde u es la variable de frecuencia, encuentre su transformada de Laplace.

- Para resolver esto debemos:
  1. Pasar de Fourier al tiempo.
  2. Pasar del tiempo a Laplace.
- La transformada de Fourier de $F(u) = 2\text{sinc}(u)$ es, usando pares de Fourier, $f(t) = 2 \sqcap (t)$
- Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = 2 \sqcap (t)$:

$$\mathcal{L}\{2 \sqcap (t)\} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(t) e^{-st} \, \text{dt}$$

- Considerando la definición de rect:

$$\mathcal{L}\{2 \sqcap (t)\} = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-st} \, \text{dt} = 2 \left[\frac{-1}{s} e^{-s\frac{1}{2}} + \frac{1}{s} e^{s\frac{1}{2}} \right]$$

Transformada de Laplace: ejercicio 2

- Finalmente, podemos re escribir esto de la forma:

$$\mathcal{L}\{2 \sqcap (t)\} = \frac{4}{s} \sinh\left(\frac{s}{2}\right)$$

- **Recordemos** que para integrar una transformada de Laplace debemos indicar la ROC.
- Notamos que cuando se calculó la integral no hubo restricciones para s por lo que:

$$\mathcal{L}\{2 \sqcap (t)\} = \frac{4}{s} \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \qquad \textbf{ROC} \quad \mathbf{s} \in \mathbb{C}$$

- Donde seno hiperbólico es una función de la forma:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Igual que un seno pero las exponenciales y el denominador no son complejos.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Transformada de Laplace: ejercicio 3

Se define la transformada X de $f(t)$ como:

$$X\{f(t)\}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} e^{-i2\pi u} dt$$

Para $r = \sigma + i2\pi u$. Determine la región de convergencia de $X\{u(t)\}$ donde u es escalón.

- Para resolver esto necesitamos los valores de $r = \sigma + i2\pi u$ para los que la integral que define la transformada exista.
- En este caso nos conviene analizar la convergencia en módulo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} e^{-i2\pi u} \right| dt$$

Transformada de Laplace: ejercicio 3

- Sabemos que la exponencial compleja tiene módulo 1: $|e^{-i2\pi u}| = 1$ por lo tanto no afectará al módulo y también sabemos que $f(t) = u(t)$, por lo que debemos analizar la convergencia de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{u(t)}{1 + t^{\sigma}} \right| dt$$

- Ahora, comenzamos a desarrollar: utilizamos la definición de escalón e integramos solo sobre el dominio positivo:

$$\int_{0}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + t^{\sigma}} \right| dt$$

Transformada de Laplace: ejercicio 3

- Por otro lado, como estamos integrando sobre los positivos, sabemos que $t > 0$ por lo que cualquier potencia de t de la forma t^σ con σ real (lo que se cumple por definición) será positivo, entonces:

$$\left| \frac{1}{1+t^\sigma} \right| = \frac{1}{1+t^\sigma}$$

- A partir de esto, el problema de convergencia es:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^\sigma} dt$$

- **NO ES NECESARIO** hacer esa integral **mega dificil**. **SÍ ES NECESARIO** usar sabiamente nuestras herramientas de análisis matemático adquiridas en cálculo.

Transformada de Laplace: ejercicio 3

- El decaimiento de la función $\frac{1}{1+t^\sigma}$ es mayor en la medida que σ sea mayor, por lo que límite de la región de convergencia estará dado por el menor valor de σ para el cual la integral converge. Ese límite es $= 1$, ya que

$$\int \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t)$$

- Podemos notar que esto diverge en infinito, por lo que se deduce que para la convergencia se requiere un decaimiento más rápido, lo que solamente se logra si $\sigma > 1$
- Para $\sigma > 1$ se tiene que:

$$\frac{1}{1+t^\sigma} < \frac{1}{t^\sigma}$$

Transformada de Laplace: ejercicio 3

- A continuación, se analizará la convergencia en infinito, ya que sabemos que la integral converge en 0 porque si sustituyo 0 en t para cualquier valor de sigma, el valor de la función es 1, por lo que asumimos que entre 0 y $0 + \epsilon$ hay un área finita. En este contexto (análisis en un entorno cercano a 0) es muy importante tener en el denominador $1 + t^{\sigma}$.
- Dado que para $\sigma > 1$ se cumple que:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\sigma}} = \frac{1}{1-\sigma} t^{1-\sigma} \Big|_0^{\infty}$$

- Podemos observar que si $\sigma > 1$:

$$\lim_{t \to \infty} t^{1-\sigma} = 0$$

- De esta forma queda demostrado que la transformada $\mathcal{X}$ de escalón converge para todo $\sigma > 1$

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Resumen: propiedades de la transformada de Laplace

1. Escalamiento:
$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$
2. Linealidad:
$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \mathcal{L}\{\alpha f(t)\} + \mathcal{L}\{\beta g(t)\}$$
3. Desplazamiento:
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$
4. Convolución:
$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$
5. Teorema del valor final (con $h(t)$ unilateral):
$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s)$$

Resumen: propiedades de la transformada de Laplace

1. Multiplicación:
$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = F(s) * G(s)$$
2. Modulación:
$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$
$$\mathcal{L}\{cos(\omega t)f(t)\} = \frac{1}{2}F(s-i\omega) + \frac{1}{2}F(s+i\omega)$$
3. Diferenciación:
$$\mathcal{L}\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\} = s^n F(s)$$
4. Integración:
$$\int_{-\infty}^{t} f(\chi)d\chi = \frac{1}{s}F(s)$$

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Propiedades de Laplace: ejercicio 1

Considere un sistema LTI que tiene respuesta al impulso $h(t) = u(t)\left[e^{-t} + e^{6t}\right]$. Si la entrada del sistema es un escalón ¿Cual es el valor final de la salida del sistema?

- Dado que nos piden el valor final de la salida, consideramos que:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

  Por lo que nos conviene tener la transformada de Laplace de la salida del sistema para hacer los cálculos.

- Consideramos que la salida de todo sistema LTI corresponde a la convolución de la entrada con la respuesta al impulso:

$$g(t) = \{h * f\}(t)$$

Propiedades de Laplace: ejercicio 1

- Para resolver, tomamos transofrmada de Laplace de todo el sistema, usando propiedad de la convolución:

$$G(s) = H(s) \cdot F(s)$$

- Sabemos que $f(t) = u(t)$ por lo que $F(s)$ será la transformada de Laplace de un escalón. **¿Se saben la transformada de Laplace del escalón?** Les recomiendo fuertemente saberla, pero si tienen mala memoria, pueden siempre usar propiedades para resolverla: no me se la transformada de Laplace del escalón, pero se que la derivada del escalón es un impulso y que la transformada de Laplace del impulso es $1(s)$ (**esa si que no pueden no saberla**).

Propiedades de Laplace: ejercicio 1

- Sabemos que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\}(s) = 1(s)$$

- Usando propiedad de la derivación:

$$s\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}(s) = 1(s)$$

- Desarrollo el álgebra:

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}(s) = \frac{1(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

- Finalmente tengo la transformada de Laplace del escalón.

Propiedades de Laplace: ejercicio 1

- Ahora, para poder usar teorema del valor final, me falta la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema:

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{u(t)\left[e^{-t} + e^{6t}\right]\right\}(s)$$

- Para enfrentarme a este problema, uso linealidad de la transformada de Laplace, lo que me permite separar la suma:

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{u(t)e^{-t}\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{u(t)e^{6t}\right\}(s)$$

- Podemos observar que los factores exponenciales representan un desplazamiento en el dominio de Laplace, lo que se traduce en:

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{u(t)\right\}(s+1) + \mathcal{L}\left\{u(t)\right\}(s-6)$$

Propiedades de Laplace: ejercicio 1

- Antes se calculó la transformada de Laplace de un escalón, ahora lo que se debe hacer es calcular la transformada de Laplace de un escalón y evaluarla en el factor desplazado, por lo que se obtiene:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-6}$$

- Entonces, podemos volver al problema original, calcular el valor final de la salida del sistema cuando lo que entra es un escalón. La salida del sistema en Laplace está dada por:

$$G(s) = F(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-6} \right]$$

Propiedades de Laplace: ejercicio 1

- A continuación, aplicamos a $G(s)$ teorema del valor final para saber cuanto vale en el infinito $g(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-6}\right]$$

- Trabajando el álgebra se obtiene:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{5}{6}$$

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Propiedades de Laplace: ejercicio 2

Sea $g(t)$ un vector en $\mathbb{R}^{nx1}$ la salida de un sistema multidimensional cuya entrada es $f(t)$, también un vector en $\mathbb{R}^{nx1}$, descrito por:

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)$$

Donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante $\in \mathbb{R}^{nxn}$. Encuentre la función de transferencia del sistema $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^{nxn}$

- Para resolver esto, usamos propiedades de la transformada de Laplace. Podemos tomar transformada de Laplace a toda la ecuación porque **la transformada de Laplace es un operador lineal**:

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{g}'(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\mathbf{A}\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)\right\}$$

- No le tengan miedo a las matrices Laplace es lineal, por lo que se aplica elemento a elemento en una matriz

Propiedades de Laplace: ejercicio 2

- Comenzamos tomando transformada de Laplace del lado izquierdo:

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{g}'(t)\right\}(s)$$

- Para resolver esto, necesitamos saber que es derivar un vector. Como este vector solo depende de la variable t, se está derivando elemento a elemento respecto a t, por lo que cada elemento en Laplace (por propiedad de la dericación) quedará multiplicado por s. De esta forma tendremos que:

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{g}'(t)\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{\mathbf{g}(t)\right\}(s) = sG(s)$$

Propiedades de Laplace: ejercicio 2

- A continuación, desarrollamos Laplace para el lado derecho:

$$\mathcal{L}\{Ag(t) + \mathbf{f}(t)\}$$

- Puedo usar linealidad para separar las transformadas:

$$\mathcal{L}\{Ag(t) + \mathbf{f}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{Ag}(t)\} + \mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\}$$

  Ahora toca desarrollar individualmente cada una.

- Para resolver $\mathcal{L}\{\mathbf{Ag}(t)\}$ debo recordar que en el enunciado me dijeron que $\mathbf{A}$ es constante, por lo que por linealidad sale de la transformada de Laplace. También tomo en cuenta que Laplace se aplica elemento a elemento en g por linealidad:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{Ag}(t)\} = \mathbf{AG}(s)$$

Propiedades de Laplace: ejercicio 2

- Finalmente y bajo el principio que se ha utilizado para las otras matices:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\} = F(s)$$

- Por lo tanto, la ecuación matricial en Laplace es:

$$s\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}\mathbf{G}(s) + \mathbf{F}(s)$$

- Para encontrar la función de transferencia, tengo que escribir el problema de la forma:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{Algo}(s)$$

Entonces, tengo que despejar $G(s)$ para encontrar ese **Algo**(s) que es la función de transferencia

Propiedades de Laplace: ejercicio 2

- Restando $\mathbf{AG}(s)$ a ambos lados de la ecuación:

$$s\mathbf{G}(s) - \mathbf{AG}(s) = \mathbf{F}(s)$$

- Ahora factorizo por $\mathbf{G}(s)$sí importa(ojo que en las multiplicaciones de matrices el orden **sí** importa):

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\,\mathbf{G}(s) = \mathbf{F}(s)$$

- Para terminar, despejo multiplicando por la izquierda por la inversa de $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ **recuerdo que son matrices por lo que NO paso dividiendo**

$$\mathbf{G}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{F}(s)$$

Propiedades de Laplace: ejercicio 2

- Finalmente, se concluye que la función de transferencia del sistema matricial es:

$$H(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$$

- Se concluye también que la transformada de Laplace es una herramienta muy útil para trabajar con sistemas en múltiples dimensiones.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Resumen: transformada de Laplace inversa

Se trata de encontrar la función original cuya transformada de Laplace es una función dada. Se puede usar:

- Fracciones parciales
- Definición
- Teorema del residuo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{n=1}^{N} Res(e^{st}F(s), s_n)$$

Donde, para una función con polos en s_n de orden k:

$$Res(f(s), s_n) = \lim_{s \to s_n} \left(\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (f(s)(s-s_n)^k) \right)$$

En este capítulo de *'Belén, nadie te preguntó'*: mi forma favorita de calcular tansformadas de Laplace inversa es el teorema del residuo, porque disminuye significativamente las probabilidades de equivocarse.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1

Determine la transformada inversa de:

$$F(s) = \frac{s^4 + s^3 - 2s^2 - 4}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

Con región de convergencia $-1 \leq \theta \leq 2$

- Utilizaremos fracciones parciales para dejar nuestra función de manera más simple y de pares conocidos, por lo que haremos eso. Para aplicar fracciones parciales el grado del numerador debe ser menor al del denominador, por lo que primero hay que dividir los polinomios para reducir el grado. Haciendo esto se llega a lo siguiente:

$$F(s) = s + \frac{2s^2 + 4s - 4}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1

- Nos damos cuenta que podemos factorizar el denominador, por s^2 para s^3 y s^2, y por -4 con los restantes, quedando así un factor común $(s+1)$. Por lo que nos queda (aplicando suma por su diferencia).

$$F(s) = s + \frac{2s^2 + 4s - 4}{(s-2)(s+2)(s+1)}$$

- Por lo que ahora si podemos aplicar fracciones parciales tal que

$$\frac{2s^2 + 4s - 4}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta, se llega a $A = 1$, $B = -1$ y $C = 2$ Entonces nuestra función en Laplace queda así

$$F(s) = s + \frac{1}{s-2} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1

Ahora hay que fijarse bien en la ROC que nos dieron, ya que esta está entre -1 y 2, pero nos damos cuenta que en realidad nuestra función tiene 3 polos: -2, -1, 2. Por lo que nos tenemos que preocupar que la intersección de todos los ROC resulte la pedida.

- La fracción que tiene el polo en -2, su ROC no puede ser menor a -2, ya que en este caso no se pasaría por el ROC pedido. Por lo tanto el ROC de $\frac{-1}{s+2}$ es $-2 \leq \theta$.
- Para $\frac{1}{s-2}$ su polo es 2, y su ROC debe ser $\theta \leq 2$.
- Para $\frac{2}{s+1}$ su polo es -1, y su ROC debe ser $-1 \leq \theta$.
- Para s su ROC es todo el dominio por lo que no hay que preocuparse por esta.

Entonces sabiéndose los pares de Laplace de las funciones y preocupándose de los ROC encontrados, nuestra función buscada es

$$f(t) = \delta' + 2e^{-t}u(t) - e^{2t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

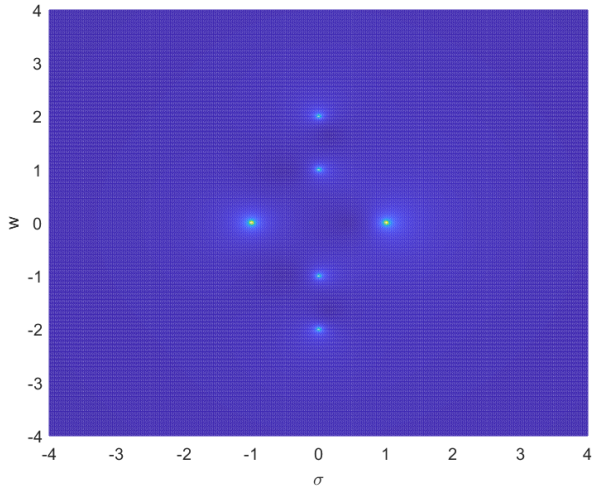
Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2

Agradecimiento a Moisés Donoso por el enunciado del problema y por enseñarme a resolver este tipo de problemas

La siguiente imagen representa a la transformada de Laplace de una función de interés:



Determine $f(t)$, que es la transformada inversa del contenido del gráfico considerando que la región de convergencia es $0 < Re\{s\} < 1$. Notar que el eje vertical representa frecuencia angular ($w = 2\pi u$).

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2

Es importante reconocer que existen seis polos en $\mathcal{L}\{f(t)\}$, dos de ellos ubicados en el eje horizontal donde $w = 0$ y cuatro en el eje vertical con $\sigma = 0$. Así, buscamos una expresión algebraica que contenga los mismos polos con la variable $s = \sigma + w \cdot i$.

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{s + 1}$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{s - 1}$$

De esta manera, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ hacen aparecer los polos en el eje vertical y $\mathcal{L}_3$ más $\mathcal{L}_4$ los del eje horizontal.

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2

- Ahora, todas las expresiones forman parte de pares de Laplace conocidos por lo que el cálculo de cada inversa es bastante directo.
- Lo único que falta es atender al requisito de la región de convergencia. Para esto es necesario saber que toda función derecha tiene una ROC de la forma $Re\{s\} > \sigma_o$ y toda función izquierda una de la forma $Re\{s\} < \sigma_o$, donde σ_o se encuentra determinado por los polos de la señal.
- Además, la ROC de una suma de transformadas será la intersección de las ROC de cada una. Con todo esto es que la delimitación del enunciado se traduce en que las regiones de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tengan que ser $Re\{s\} > 0$, la de $\mathcal{L}_3$ $Re\{s\} > -1$ y la de $\mathcal{L}_4$ $Re\{s\} < 1$.

Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2

Finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_1\} = sin(t)u(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_2\} = sin(2t)u(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_3\} = e^{-t}u(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_4\} = -e^{t}u(-t)$$

con $f(t) = sin(t)u(t) + sin(2t)u(t) + e^{-t}u(t) - e^{t}u(-t)$.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Resumen: filtros y función de transferencia

- Sabemos que la salida de un sistema LTI es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso:

$$g(t) = \{f * h\}(t)$$

- Podemos notar que, ya que las transformadas de Fourier y Laplace tienen la misma propiedad de la convolución se puede plantear el sistema como:

$$G(u) = F(u)H(u) \qquad \text{Sistema LTI en Fourier}$$

$$G(s) = F(s)H(s) \qquad \text{Sistema LTI en Laplace}$$

- La transformada de Fourier de la respuesta al impulso $H(u)$ se denomina **respuesta de frecuencia**
- La transformada de Laplace de la respuesta al impulso $H(s)$ se denomina **Función de transferencia**

Resumen: filtros y función de transferencia

- Los filtros son sistemas que cambian el comportamiento de frecuencia de la entrada ¿Son todos sistemas LTI un filtro? Esta es una pregunta filosófica.
- El posicionar polos y ceros en el plano S permite determinar curvas de respuesta de frecuencia específicas. Estas curvas implican que ciertas frecuencias se atenuarán mientras otras se enfatizarán. Por lo tanto una función de transferencia es básicamente un filtro selectivo en frecuencia, cuando se evalúa en el eje imaginario.

Filtro pasa bajos:

Es un filtro que permite solo el paso de frecuencias bajas en magnitud. En frecuencia se puede ver como una función del tipo:

$$F(u) = \sqcap\left(\frac{u}{2f_c}\right)$$

Donde $\sqcap$ es rect y f_c una frecuencia de corte, que es la frecuencia máxima que el filtro dejaría pasar. Notemos que los filtros se diseñan para **magnitud**, por lo que **para definir si una frecuencia es alta o no, no le importa el signo**.

Filtro pasa altos:

Es un filtro que permite solo el paso de frecuencias altas. En frecuencia se puede ver como una función del tipo:

$$F(u) = u_c\,(u - f_c)$$

Donde u_c es escalón y f_c una frecuencia de corte, que es la frecuencia mínima que el filtro dejaría pasar.

Filtro pasa banda: Es un filtro que solo permite el paso de frecuencias en un rango específico, entre una mínima f_{c1} y una máxima f_{c2}. Se puede modelar como un $\sqcap$ correctamente desplazado (el desplazamiento será el centro de la banda) y correctamente escalado (el escalamiento determina el ancho de la banda). Si la banda tiene centro c y frecuencias de corte $c - f_c$ y $c + f_c$:

$$F(u) = \sqcap\left(\frac{u-c}{2f_c}\right)$$

Filtro rechaza banda: Un filtro rechaza banda es aquel que deja pasar todas las frecuencias excepto una banda específica. Si esta banda tiene centro c y frecuencias de corte $c - f_c$ y $c + f_c$ se ve matemáticamente como:

$$F(u) = 1 - \sqcap\left(\frac{u - c}{2f_c}\right)$$

Filtros en Laplace

La forma de la función de transferencia va a determinar el tipo de filtro.

- Los filtros pasa bajos tienen solo polos.
- Los filtros pasa bandas tienen solo ceros.
- Los rechaza banda y los pasabanda siempre se pueden escribir como la suma inteligente entre un pasa bajos y un pasa altos.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Filtros: ejercicio 1

Determine a que tipo de filtro corresponde la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$$

- Para resolver esto, debemos encontrar los polos del sistema, que son:

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \quad \rightarrow \quad p = 1 \pm 2i$$

- Dado que los polos son complejos conjugados, sabemos a priori que tenemos un pasabanda.

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Filtros: ejercicio 2

Encuentre la respuesta al impulso de un sistema cuya respuesta de frecuencia está dada por:

$$H(u) = \begin{cases} e^{-\frac{i\pi}{2}} & \forall u > 0 \\ \\ e^{-\frac{-i\pi}{2}} & \forall u < 0 \end{cases}$$

- Para comenzar a resolver esto es **fundamental** saber que **la respuesta al impulso de un sistema es la transformada de Fourier inversa de la respuesta en frecuencia del sistema.** Esto es una aplicación de la dualidad. La respuesta en frecuencia de un sistema es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso.
- Usando fórmula de Euler, tenemos que:

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i \qquad e^{-\frac{-i\pi}{2}} = i$$

Filtros: ejercicio 2

- Entonces, si reescribimos la respuesta en frecuencia:

$$H(u) = \begin{cases} -i & \forall u > 0 \\ \\ i & \forall u < 0 \end{cases}$$

- Podemos notar que esto corresponde a:

$$H(u) = -i \ \text{signo}(u)$$

- La transformada de Fourier de signo es conocida[1]:

$$\mathcal{F}\{\text{signo}(x)\}(u) = \frac{1}{\pi i u}$$

[1] Usted debe tener al alcance de la mano siempre su tabla de pares de Fourier

Filtros: ejercicio 2

- Usando **dualidad**:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{signo}(u)\}(x) = -\frac{1}{\pi i x}$$

- Ahora, lo que buscamos es $\mathcal{F}^{-1}\{-i\text{signo}(u)\}(x)$. Por linealidad de Fourier tenemos que:

$$\mathcal{F}^{-1}\{-i\ \text{signo}(u)\}(x) = -i\mathcal{F}^{-1}\{\text{signo}(u)\}(x)$$

- Sustituyendo la transformada de Fourier inversa de signo y simplificando:

$$\mathcal{F}^{-1}\{-i\ \text{signo}(u)\}(x) = -i\cdot-\frac{1}{\pi i x} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\{-i\ \text{signo}(u)\}(x) = \frac{1}{\pi x}$$

Filtros: ejercicio 2

Finalmente, tendremos que **la respuesta al impulso del sistema, que es la transformada de Fourier de la respuesta en frecuencia es:**

$$h(x) = \frac{1}{\pi x}$$

Contenido

1. Resumen: la transformada de Laplace
2. Transformada de Laplace: ejercicio 1
3. Transformada de Laplace: ejercicio 2
4. Transformada de Laplace: ejercicio 3
5. Resumen: propiedades de la la transformada de Laplace
6. Propiedades de Laplace: ejercicio 1
7. Propiedades de Laplace: ejercicio 2
8. Resumen: transformada de Laplace inversa
9. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 1
10. Transformada de Laplace inversa: ejercicio 2
11. Resumen: filtros y función de transferencia
12. Filtros: ejercicio 1
13. Filtros: ejercicio 2
14. Filtros: ejercicio 3

Filtros: ejercicio 3

Sea un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = x'(t) - Ax(t)$$

Determine el valor de A para que el sistema sea estable.

- Sabemos que la estabilidad de un sistema depende **de sus polos**. Un sistema estable **no tiene polos en la ROC**.
- Para desarrollar esto, tomamos transformada de Laplace unilateral a toda la EDO:

$$s^3 Y(s) - s^2 Y(s) + SY(s) - Y(s) = sX(s) - AX(s)$$

- A continuación, factorizamos para encontrar la función de transferencia:

$$Y(s)\left[s^3 - s^2 + s - 1\right] = X(s)\left[s - A\right]$$

Filtros: ejercicio 3

- Sabemos que la función de transferencia es **la salida dividido en la entrada**, luego:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s - A}{s^3 - s^2 + s - 1}$$

- Podemos notar que **los polos no dependen de A**. Por lo tanto, la estabilidad del sistema tampoco depende de A. Ahora, los polos del sistema son:

$$p_1 = 1 \qquad p_2 = i \qquad p_3 = -i$$

- Es decir, podemos escribir la función de transferencia de la forma:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s - A}{(s^2 + 1)(s - 1)}$$

- El único polo inestable es el que tiene **parte real positiva**, por lo que definimos $A = 1$ para estabilizar el sistema.