Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 3

Fecha de entrega: 27 de marzo de 2022

---

1. Determine si los siguientes sistemas son LTI:

   - $g(t) = f(t) + 2$
     - Linealidad:
       a) Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$

       Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

       $$\alpha L\{x(t)\} = \alpha(f(t) + 2) = \alpha f(t) + 2\alpha$$

       Luego, desarrollamos el lado derecho:

       $$L\{\alpha x(t)\} = \alpha f(t) + 2$$

       Notamos que los resultados obtenidos son diferentes, por lo tanto no se cumple homogeneidad y entonces no es posible que el sistema sea lineal.
     - Invariancia: $L\{x(t-\alpha)\} = g(t-\alpha)$
       Para comenzar tomamos el caso de que el Delay se aplique a la señal de entrada:

       $$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(t-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t-a)\}}} \longrightarrow f(t-a) + 2$$

       Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

       $$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t)\}}} \longrightarrow f(t) + 2 \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(t-a) + 2$$

       Dado que la señal de salida es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es invariante**
   - $g(t) = h(t)f(t)$
     - Linealidad:
       a) Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$

       Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\alpha L\{x(t)\} = \alpha(f(t)h(t)) = \alpha f(t)h(t)$$

Luego, desarrollamos el lado derecho:

$$L\{\alpha x(t)\} = \alpha h(t)f(t)$$

Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.

b) Superposición: $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$

Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

$$L\{f(t) + m(t)\} = h(t)[f(t) + m(t)] = h(t)f(t) + h(t)m(t)$$

Luego, desarrollamos el lado derecho:

$$L\{x(t)\} + L\{m(t)\} = h(t)x(t) + h(t)m(t)$$

Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**.

Finalmente, ya que se cumple linealidad y homogeneidad, se conluye que **el sistema es lineal.**

- Invariancia: $L\{x(t-\alpha)\} = g(t-\alpha)$
  Para comenzar tomamos el caso de que el Delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(t-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t-a)\}}} \longrightarrow f(t-a)h(t)$$

  Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t)\}}} \longrightarrow f(t)h(t) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(t-a)h(t-a)$$

  Dado que la señal de salida no es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es variante**

- $g(t) = \sqrt{f(t)}$
- Linealidad:

a) Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$

Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\alpha L\{x(t)\} = \alpha(f(t)h(t)) = \alpha\sqrt{f(t)}$$

Luego, desarrollamos el lado derecho:

$$L\{\alpha x(t)\} = \sqrt{\alpha f(t)}$$

Notamos que los resultados obtenidos son diferentes, por lo tanto **se cumple homogeneidad** y entonces **el sistema no puede ser lineal**.

- Invariancia: $L\{x(t-\alpha)\} = g(t-\alpha)$

  Para comenzar tomamos el caso de que el Delay se aplique a la señal de entrada:

  $$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(t-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t-a)\}}} \longrightarrow \sqrt{f(t-a)}$$

  Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

  $$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t)\}}} \longrightarrow \sqrt{f(t)} \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow \sqrt{f(t-a)}$$

  Dado que la señal de salida es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es invariante**

2. A partir de las siguientes matrices para variables de estado, determine la ecuación diferencial para g(t) que representa el sistema junto a sus condiciones iniciales.

$$v'(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot v(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot f(t) \ , \ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot v(t)$$

A partir de las matrices podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$v_1' = -2v_1 - v_2 - f \tag{1}$$

$$v_2' = 5v_1 + 3v_2 + 2f \tag{2}$$

$$g(t) = 2v_1 + v_2 \tag{3}$$

la ecuación (3) la podemos derivar:

$$g'(t) = 2v_1' + v_2' \tag{4}$$

Sumando $2 \cdot +(1) + (2)$

$$2v_1' + v_2' = v_1 + v_2$$

Reemplazando en la izquierda por (4):

$$g'(t) = v_1 + v_2$$

Derivando otra vez:

$$g''(t) = v_1' + v_2'$$

Ahora podemos reemplazar v_1 y v_2 en la derecha y sumar los términos:

$$g''(t) = 3v_1 + 2v_2 + f$$

Que se puede reescribir como:

$$g''(t) = 2v_1 + v_2 + v_1 + v_2 + f$$

Entonces reemplazamos (3) y (4):

$$g''(t) = g(t) + g'(t) + f$$

Ahora para las condiciones iniciales sabemos que $v_1(0) = 1$ y $v_2(0) = 1$.
Reemplazamos en (3) y (4)

$$g(0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$g'(0) = 1 + 1 = 2$$