Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 1–2011 — Vicente Parot

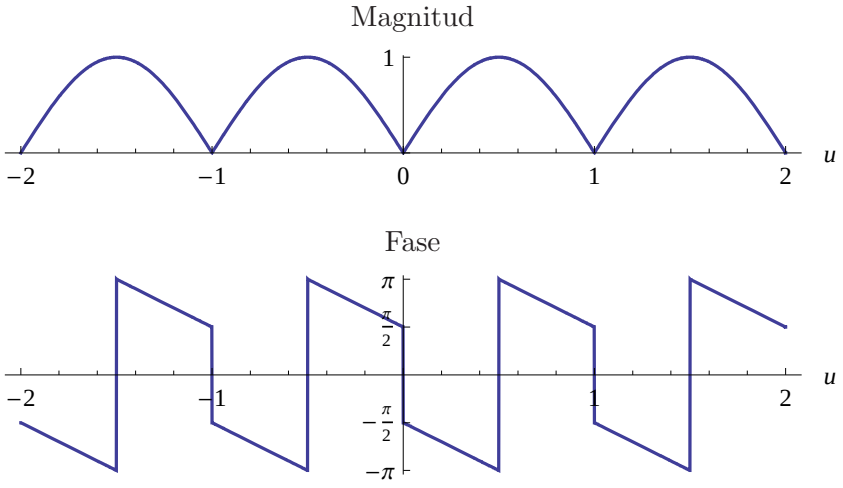
Documento #12

Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [4 ptos] **Fourier.** La magnitud y fase de la transformada de Fourier de la señal $f(x)$ se muestran en los siguientes gráficos:



Grafique $f(x)$ indicando las dimensiones y puntos relevantes en el gráfico y los ejes.

Resultado:

$$
\begin{aligned}
i \uparrow\downarrow (x) &\longrightarrow -\operatorname{sen}(\pi u) \\
- \uparrow\downarrow (x) &\longrightarrow -i \operatorname{sen}(\pi u) \\
- \uparrow\downarrow (x - 1/2) = -\frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1) &\longrightarrow -ie^{-i\pi u} \operatorname{sen}(\pi u)
\end{aligned}
$$

El gráfico de $f(x)$ tiene un impulso en $x = 0$ y $x = 1$ de amplitud $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente.

2. [3 ptos] **DFT 2D.** Calcule la DFT 2D de una señal periódica discreta bidimensional cuyo período es una matriz identidad de $N \times N$.

   Resultado:

   $$\mathcal{W}\mathcal{I}\mathcal{W} = \mathcal{W}\mathcal{W}$$

   La operación es equivalente al producto de la matriz DFT 1D consigo misma. El resultado es una matriz antidiagonal con unos donde $i + j = N - 1$ y ceros en el resto.

3. [3 ptos] **Fourier.** Muestre en frecuencia si esta identidad trigonométrica es válida o no:

   $$\cos^3(\pi x) = \frac{2\cos(\pi x) + \cos(3\pi x)}{4}$$

   Resultado:

   $$\begin{aligned}
   \cos(\pi x) &\longrightarrow \uparrow\uparrow(u) \\
   \uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow(u) &= (\delta(u+1) + 2\delta(u) + \delta(u-1))/4 * \uparrow\uparrow(u) \\
   \uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow(u) &= (\delta(u+3/2) + 3\delta(u+1/2) + 3\delta(u-1/2) + \delta(u-3/2))/8 \\
   \uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow(u) &= 3\uparrow\uparrow(u)/4 + \uparrow\uparrow(u/3)/12 \\
   \cos^3(\pi x) &= \frac{3\cos(\pi x) + \cos(3\pi x)}{4}
   \end{aligned}$$

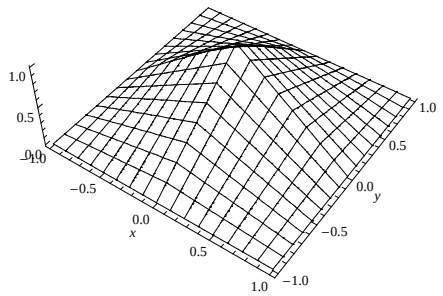
   Se debe corregir. Es necesario cambiar el dos por tres.

4. [3 ptos] **Convolución.** Calcule la convolución. Exprese el resultado usando las funciones básicas vistas en el curso. Opcionalmente grafique.

   $$h(x,y) = (\wedge(x)\delta(y)) * (\delta(x) \wedge (y))$$

   Resultado:

   $$\begin{aligned}
   h(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \wedge(\xi)\delta(\eta)\delta(x-\xi) \wedge (y-\eta) d\xi d\eta \\
   h(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \wedge(\xi)\delta(x-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta) \wedge (y-\eta) d\eta \\
   h(x,y) &= (\wedge * \delta)(x) \cdot (\delta * \wedge)(y) \\
   h(x,y) &= \wedge(x) \wedge (y)
   \end{aligned}$$



5. [4 ptos] **Interpolación bilineal.** Para duplicar la resolución de una imagen digital $f[n,m]$, se realiza una interpolación bilineal. Los valores de los pixeles se asignan a las magnitudes de los impulsos de una función $\sqcup\!\sqcup(x,y)$ en una función de muestreo $f_s(x,y)$.

$$f_s(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} {}^2\delta(x-n, y-m) f[n,m]$$

La siguiente tabla muestra algunos de los valores de $f[n,m]$ (magnitudes de los impulsos de $f_s(x,y)$).

	m	0	1	2	
n			⋮		
0		1	.5	.5	
1	⋯	1	.5	0	⋯
2		1	0	0	
			⋮		

$f_s(x,y)$ se convoluciona con la función de interpolación bilineal $h(x,y)$ para producir el resultado $b(x,y)$.

$$h(x,y) = (\wedge(x)\delta(y)) * (\delta(x) \wedge (y))$$

$$b(x,y) = f_s(x,y) * h(x,y)$$

Finalmente se define la señal $g[n,m] = b(n/2, m/2)$. Entregue una tabla con el valor de $g[n,m]$ en todas las combinaciones de $n = (2,3,4)$ y $m = (2,3,4)$. Puede usar el resultado del problema anterior, pero hacer correctamente el problema anterior no es necesario para resolver éste.

Resultado: 1 punto por las posiciones (2,2) (2,4) (4,2) (4,4). 1 punto por las posiciones (3,2) (2,3) (3,4) (4,3). 2 puntos por la posicion (3,3).

	m	2	3	4
n				
2		1	.75	.5
3		1	.625	.25
4		1	.5	0

6. [3 ptos] **Sistema continuo.** Considere el sistema causal descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

donde $x(t)$ representa la entrada e $y(t)$ la salida. Determine la salida $y_1(t)$ del sistema cuando la entrada es $x_1(t) = e^{-t}\sqcap(t)$.

Resultado:

$$
\begin{aligned}
(s+1)Y &= (s-1)X \\
Y_1(s) &= \frac{s-1}{s+1}X_1(s), \qquad X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \mathrm{Re}s > -1 \\
Y_1(s) &= \frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^2} \\
y_1(t) &= e^{-t}\sqcap(t) - 2te^{-t}\sqcap(t) = (1-2t)e^{-t}\sqcap(t)
\end{aligned}
$$

7. [3 ptos] **Período.** Sean las siguientes señales discretas:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_3[n] &= (\underline{0}, 0, 1) \\
\tilde{f}_5[n] &= (\underline{0}, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

¿Cuál es el período de la suma, $\tilde{f}_3[n] + \tilde{f}_5[n]$?

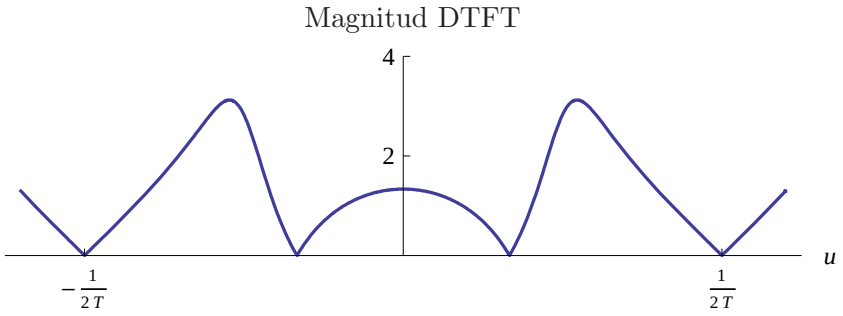
Resultado: El período es 15.

$$\tilde{f}_3[n] + \tilde{f}_5[n] = (\underline{0}, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 2)$$

8. [3 ptos] **DTFT.** Se tiene la función de transferencia de un sistema discreto,

$$H(z) = \frac{z^3 \pm 1}{z^2 + \frac{1}{2}}$$

pero es ambigua debido a un error de impresión que impide ver correctamente el signo en el numerador. Observando la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema (DTFT), determine cuál es el signo correcto.



Resultado: El signo determina la ubicación de los ceros del sistema. Como el numerador tiene 3 raíces que caen en el círculo unitario, éstas significan cruces por cero en la magnitud de la DTFT, que también es la transformada Z en el círculo unitario. Como no la magnitud no vale cero donde $z = 1$, es decir, en $u = 0$, entonces el signo en el numerador debe ser positivo.