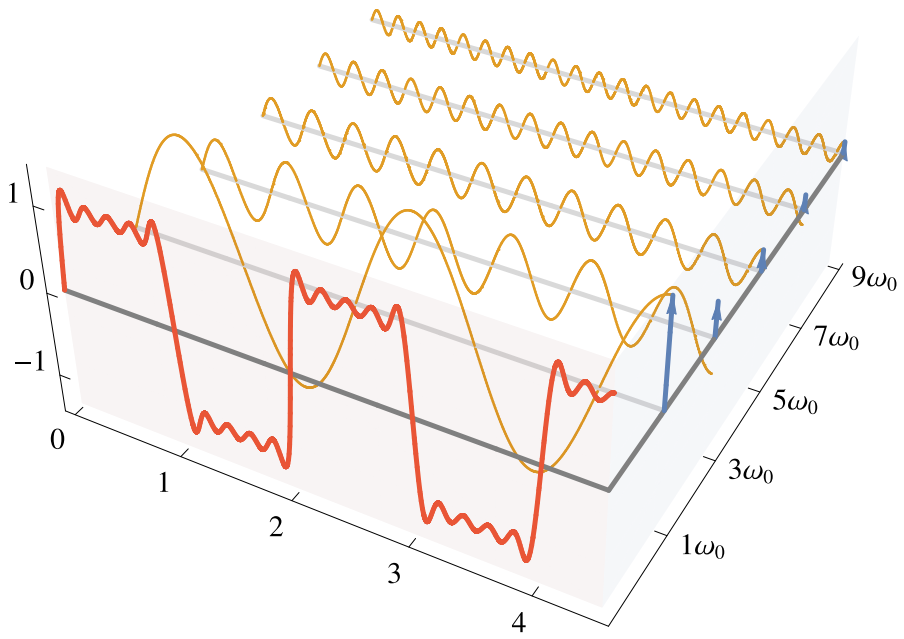
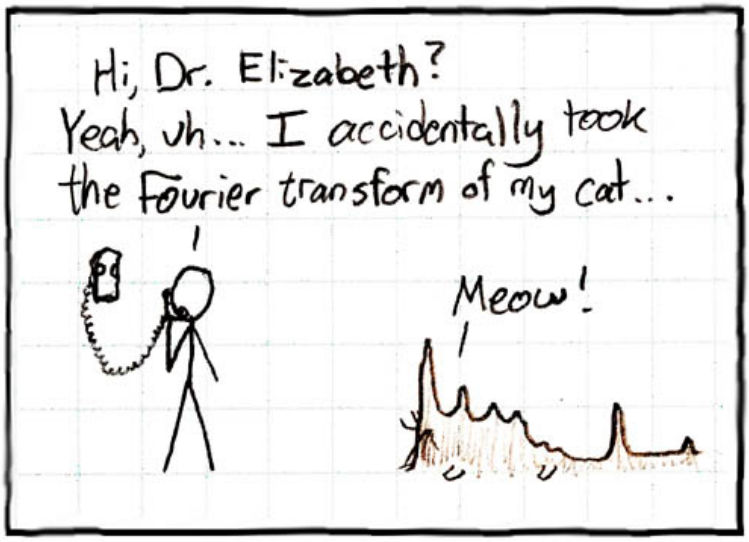
CARLOS CASTILLO

APUNTES: ANÁLISIS DE SEÑALES





Fuente: https://xkcd.com/26/

Índice general

1. Comienza la diversión **9**
1.1. Repaso Conceptual . . . 9
1.1.1. Introducción . . . 9
1.1.2. Traslación . . . 9
1.1.3. Escalamiento . . . 9
1.1.4. Caso especial: Traslación y escalamiento . . . 10
1.1.5. Números complejos . . . 10
1.1.6. La función exponencial compleja: e^{ix} . . . 11
1.1.7. Ejemplo: Logaritmo complejo . . . 12
1.2. Convolución . . . 13
1.2.1. Definición y notación . . . 13
1.2.2. ¿Pero qué significa? . . . 13
1.3. Señales importantes . . . 15
1.3.1. Definiciones no impulsivas . . . 15
1.3.2. Equivalencias y propiedades . . . 16
1.4. Impulso o delta de Dirac: $\delta(x)$ . . . 16
1.4.1. Definición . . . 16
1.4.2. Modificación de amplitud . . . 16
1.4.3. El impulso de una función $\delta(f(x))$ . . . 17
1.4.4. Propiedad del desplazamiento . . . 17
1.4.5. Definiciones impulsivas . . . 17
1.4.6. Equivalencias y propiedades . . . 18
1.4.7. Muestreo . . . 18
1.4.8. Funciones periódicas . . . 18
1.4.9. Ejemplo . . . 19
1.5. Ejercicios . . . 20

2. Series de Fourier **21**
2.1. Repaso Conceptual . . . 21
2.1.1. Producto punto o producto interno . . . 21
2.1.2. Espacio de Hilbert y ortonormalidad funcional . . . 21
2.2. Representación compleja . . . 22
2.2.1. Definición y obtención de coeficientes . . . 22
2.2.2. Ejemplo . . . 23
2.3. Representación trigonométrica . . . 24
2.3.1. Definición y obtención de coeficientes . . . 24
2.3.2. Paridad de la función y su relación con los coeficientes . . . 25
2.3.3. Ejemplo . . . 25
2.4. Teorema de Parseval . . . 26
2.5. Convergencia . . . 27
2.5.1. Condición de convergencia . . . 27
2.5.2. Fenómeno de Gibbs . . . 27
2.6. Ejercicios . . . 28

3. Transformada de Fourier **29**
3.1. Entendiendo la transformada . . . 29
3.1.1. Producto punto, definición y notación . . . 29
3.1.2. Punto de vista intuitivo y relación con la serie . . . 29
3.1.3. Propiedades importantes y simetrías . . . 31
3.1.4. Ejemplo . . . 31
3.2. Ejercicios . . . 32

4. Transformadas de Fourier Discretas **35**
4.1. DTFT: Transformada de Fourier de tiempo discreto . . . 35
4.1.1. Definición y notación . . . 35
4.1.2. Propiedades importantes y simetrías . . . 36
4.1.3. Ejemplo . . . 36
4.2. DFFT: Transformada de Fourier de frecuencia discreta . . . 37
4.2.1. Definición y notación . . . 37
4.2.2. Propiedades importantes y simetrías . . . 38
4.2.3. Ejemplo . . . 39
4.3. Ejercicios DTFT y DFT . . . 39
4.4. DFT: Transformada de Fourier discreta . . . 41
4.4.1. Definición y notación . . . 41
4.4.2. Forma matricial . . . 43
4.4.3. Ejemplo . . . 44
4.4.4. Convolución cíclica . . . 44
4.4.5. Ejercicio . . . 44
4.4.6. Propiedades importantes y simetrías . . . 45
4.5. Ejercicios . . . 45

5. Transformada de Laplace **49**
5.1. Breve introducción . . . 49
5.2. Transformada bilateral de Laplace . . . 49
5.2.1. ¿Y Fourier? . . . 49
5.2.2. Definición y notación . . . 50
5.2.3. Región de convergencia . . . 50
5.2.4. Transformada inversa de Laplace . . . 50
5.2.5. Para curiosos: ¿Por qué se puede aplicar el teorema de los residuos? . . . 51
5.3. Transformada unilateral de Laplace . . . 52

6. Apéndice **53**
6.1. Matemáticas interesantes . . . 53
6.1.1. Funciones y espacios . . . 53
6.1.2. Espacios de Banach y Hilbert . . . 53
6.1.3. Ejemplo: Señales continuas (Transformada de Fourier) . . . 54
6.1.4. Ejemplo: Señales discretas (Transformadas de Fourier discretas) . . . 54
6.1.5. Bases en espacios de Hilbert . . . 55
6.1.6. Propiedades dentro de un espacio de Hilbert . . . 55

6.1.7. Diracs 56
6.2. Variable Compleja 57
6.2.1. Función de variable compleja 57
6.2.2. Función diferenciable (analítica) 57
6.2.3. Ejemplo: Ecuación de Laplace 58
6.2.4. Mapeo conforme 58
6.2.5. Ejemplo: Ecuación de Laplace 59
6.2.6. Definiciones: Series de Taylor y Laurent 59
6.2.7. Integral de una función en variable compleja 59
6.2.8. Ejercicio: “Cedazo complejo” 60
6.2.9. Ejercicio: Coeficientes de Taylor 61
6.2.10. Residuos 62
6.2.11. Ejercicio: Residuos y series de Laurent 62
6.2.12. Fracciones parciales 63

7. Bibliografía **65**

Prefacio

El fin de estos apuntes es mostrar de un punto más intuitivo y amigable la materia del curso IEE2103 Señales y Sistemas, en especial la parte que tiene que ver con Fourier que es la terminada hasta ahora. Los detalles "un poco más formales" se dejaran como un Apéndice en el capítulo 6.

Todo el material que se presenta a continuación fue generado con mucho esfuerzo por mí, a excepción claramente de ciertos ejercicios, e inspirado en distintas fuentes como los libros Análisis de Señales - P. Irarrázabal y Señales y Sistemas - A. Oppenheim. Ojalá éste pueda ser de utilidad en el estudio y más que nada en entender conceptos base del curso.

Un aspecto importante de este apunte son los márgenes, donde habrá información de aspectos relevante/curiosidades/recordatorios y además se destacarán en rojo las mnemotecnias o aspectos importantes para recordar formulas y propiedades.

Aprovecho de agradecer a mi compañero Sebastián Soto por aportar en la recopilación de ejercicios, ideas y desafíos para los alumnos al momento de ser ayudante de este curso.

Se agradece si se encuentra algún error de tipeo/ortografía/etc (porque seguro los habrá) que me lo hagan saber a mí correo: cncastillo@uc.cl.

Carlos Castillo, 19 de mayo de 2017

1 Comienza la diversión

1.1 Repaso Conceptual

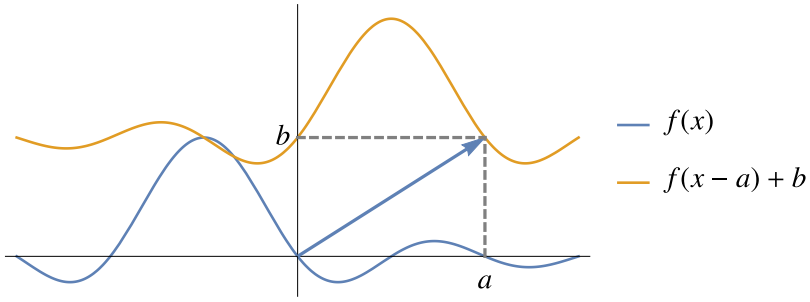
1.1.1 Introducción

Estuve meditando durante varios minutos[1] si debía partir éste libro "tirándolos a los leones" inmediatamente o realizar un repaso, como podrán darse cuenta opté por la segunda opción. Esta decisión se debe a la importancia que tiene comprender **a la perfección** las operaciones básicas (traslación, contracción/dilatación, etc.) que se pueden aplicar a una función $f(x)$ y como esto afecta a su gráfico, además de algunas cosas de números complejos. Sin más preámbulo empezaremos con las transformaciones básicas.

[1] En realidad fueron segundos.

1.1.2 Traslación

Para comenzar, se partirá con la operación más básica: la **traslación**. Existen dos tipos de traslación, la vertical y la horizontal, si queremos desplazar una función en $\boldsymbol{x}_0 = (a, b)$ unidades se tendrá que realizar $f(x-a)+b$.



De este modo conseguimos desplazar cada punto de la función $f(x)$ en el vector $\boldsymbol{x}_0$.

1.1.3 Escalamiento

Se llama escalamiento temporal a la transformación que afecta la "escala" de una función solo de forma horizontal. Es importante mencionar que esta operación se realizan con respecto al origen, por lo que si se traslada la función primero y luego se dilata/expande, esto no será equivalente a aplicarlas al revés, es decir **la traslación y el escalamiento temporal no son conmutativos**.

- Si se desea **dilatar horizontalmente** en un factor $a > 1$ se tendrá

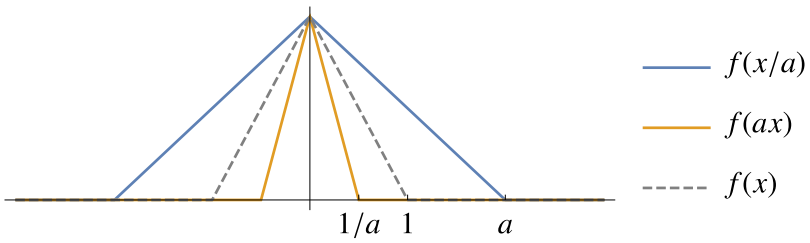
$$f(x/a).$$

- Si por otro lado se desea **contraer horizontalmente** en un factor $a > 1$ se tendrá[2]

$$f(ax).$$

[2] Es posible darse cuenta que una contracción se puede convertir en una dilatación y viceversa si el factor $a > 1$ pasa a ser $0 < a < 1$.

Gráficamente el escalamiento para $a > 1$ es



Notamos que para $f\left(x/a\right)$ el punto que antes estaba en 1 ahora esta en a y al contrario para $f\left(ax\right)$ que se desplaza a $1/a$.

No esta demás decir que si a **es negativo** se cumplirá exactamente lo mismo, pero se **invertirá** la función horizontalmente (esto no tendría ni un efecto si la función es par).

1.1.4 Caso especial: Traslación y escalamiento

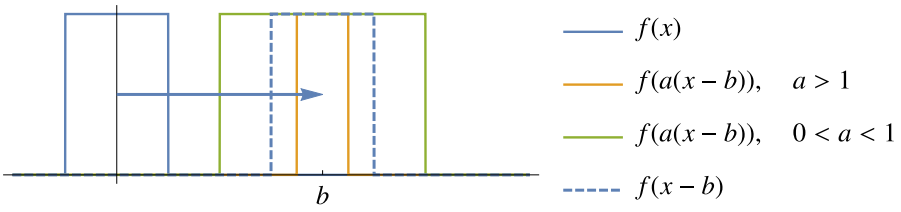
Es de especial interés para este curso analizar de forma correcta que significa la transformación

$$f\left(a\left(x-b\right)\right).$$

Antes de analizar cualquier cosa es recomendable agrupar transformaciones, es decir[3]

$$f\left(a\left(x-b\right)\right) \Longleftrightarrow g\left(x-b\right), \quad g\left(x\right) = f\left(ax\right).$$

De esto se deduce que se desplaza a b un versión escalada en a de $f\left(x\right)$.



Por lo tanto de forma general escribiremos siempre de manera factorizada para comprender mejor que es lo que esta pasando. Como motivación para secciones siguientes veremos que

$$f\left(a\left(x-b\right)\right) = f\left(ax\right) * \delta\left(x-b\right)$$

, siendo $\delta\left(x\right)$ el delta de Dirac (ver sección 1.4) y $*$ la convolución entre dos funciones (ver sección 1.2).

Podemos interpretar los desplazamientos de funciones a través de la operación de convolución que será fundamental en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo por su relación con la transformada de Fourier (ver capitulo 3).

1.1.5 Números complejos

Al igual que las transformaciones de funciones, los números complejos deben ser entendidos a profundidad y en especial la **identidad de Euler**

[3] Notar que esta es diferente a $f\left(ax-b\right)$ en la cual las operaciones de traslación y escalamiento se aplican al revés, teniendo un escalamiento en a y traslación a b/a.

$$f\left(ax-b\right) \Longleftrightarrow g\left(ax\right), \quad g\left(x\right) = f\left(x-b\right).$$

Recordatorio: Complejo conjugado

Sea $z = a + ib$, se define su **complejo conjugado** como

$$z^* = a - ib = |z|\, e^{-i\theta}$$

, es decir es la imagen espejo con respecto al eje real del número z.

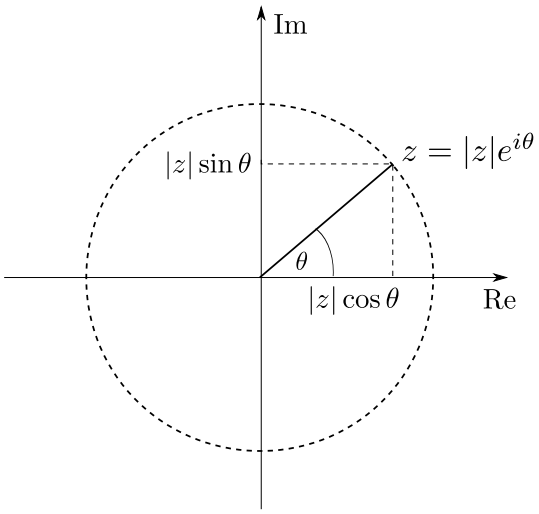
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad . \tag{1.1.1}$$

Que nos muestra un camino distinto para interpretar estos números, de tal modo que para un número complejo z se tiene que

$$z = a + ib, \quad \mathrm{Re}\{z\} = a \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\{z\} = b$$

o

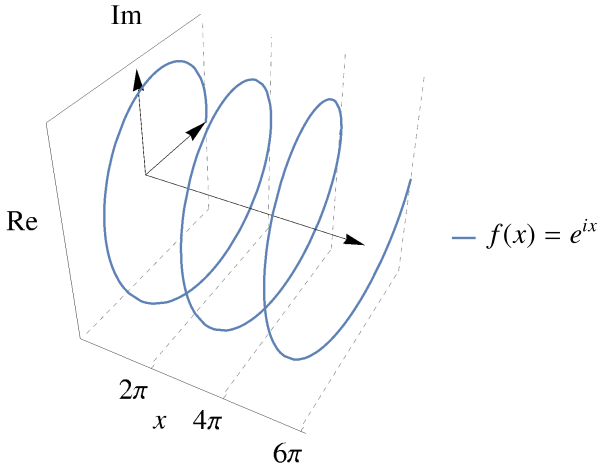
$$z = |z|\, e^{i\theta}, \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}(b/a)\,.$$



Se usa θ en vez de $\angle z$ para recalcar la notación polar e incrementar la comprensión intuitiva, usar un símbolo familiar ayuda a facilitar las cosas.

1.1.6 La función exponencial compleja: e^{ix}

La función[4] $f(x) = e^{ix}$ será muy importante en el análisis de señales y en especial entender su trayectoria en el plano complejo. Nos percatamos que cada vez que x logre llegar a un múltiplo de 2π la trayectoria compleja habrá dado una vuelta en la circunferencia unitaria en contra del sentido de las manecillas del reloj, es decir[5]



Demostración: Identidad de Euler

Sea la serie de Taylor de la exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Evaluamos en $x = i\theta$, así obteniendo

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\theta^n}{n!},$$

ahora, si analizamos el término i^n tendremos que

$$i^n = \begin{cases} (-1)^{n/2} & , n \text{ par} \\ i\,(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} & , n \text{ impar} \end{cases}.$$

Por lo tanto

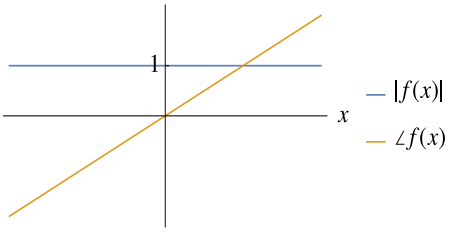
$$e^{i\theta} = \sum_{\substack{n \text{ par} \\ n\geq 0}} \frac{(-1)^{n/2}}{n!}\theta^n + \ldots \; i \sum_{\substack{n \text{ impar} \\ n\geq 0}} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!}\theta^n.$$

Que son justamente las expansiones de coseno y seno, de lo que se deduce que

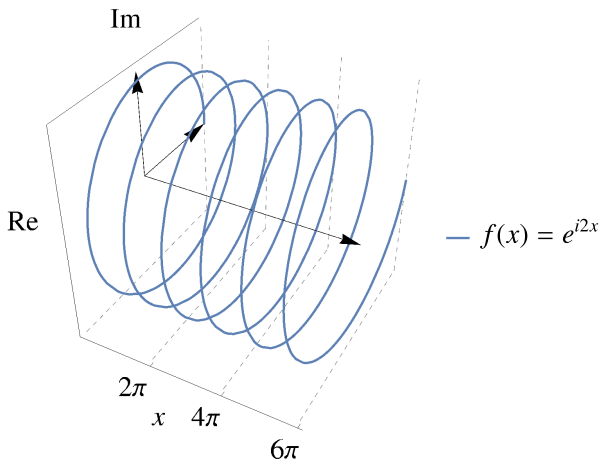
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

[4] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

[5] Otro aspecto importante será que su **fase es lineal** y tiene **magnitud unitaria.**



Además, al igual que en la sección 1.1.3, podemos contraer la función de tal manera que **cambie su frecuencia**, por ejemplo $f(2x)$ girará el doble de rápido (antes giraba a $\frac{1}{2\pi}$ Hz y ahora a $\frac{2}{2\pi}$ Hz).



[6] En este caso la fase lineal tiene pendiente $2\pi u$.

Obteniendo así una fase lineal con el doble de la pendiente original. Para el caso general se tiene que una exponencial compleja que gira a u Hz es[6]

$$g(x) = e^{i2\pi ux} .$$

Esta función puede reemplazar objetos que giren a una determinada frecuencia, facilitando la resolución de distintas ecuaciones diferenciales tales como las presentes en problemas físicos con ejes rotatorios, circuitos eléctricos u ondas electromagnéticas.

1.1.7 Ejemplo: Logaritmo complejo

Encuentre un significado para $x \in \mathbb{R}$ de $\log x$.

Solución:

El principal problema de esta función se encuentra en los números negativos, ya que sabemos el comportamiento en los positivos. Partiremos reescribiendo x como

$$x = |x| e^{i\theta(x)},$$

donde la fase del número x será

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \geq 0 \\ \pi & , \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Esta función puede escribirse de manera compacta como $\theta(x) = \pi \sqcap(-x)$. Ahora, aplicando logaritmo a los dos lados se obtiene que

$$\log x = \log|x| + i\pi \sqcap(-x) .$$

1.2 Convolución

1.2.1 Definición y notación

La convolución entre dos funciones es una operación integral descrita por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x - \xi)\, \mathrm{d}\xi$$

, donde el **resultado de la convolución también es una función**, por lo tanto $(f * g)(x)$ significará el resultado de la convolución evaluada en x. Sin embargo, por simplicidad se usará la notación

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x - \xi)\, \mathrm{d}\xi \quad . \tag{1.2.1}$$

Una propiedad importante es que la convolución **es conmutativa**, por lo que se cumplirá que $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$.

1.2.2 ¿Pero qué significa?

Para entender intuitivamente la convolución primero se "modificará" un poco la definición

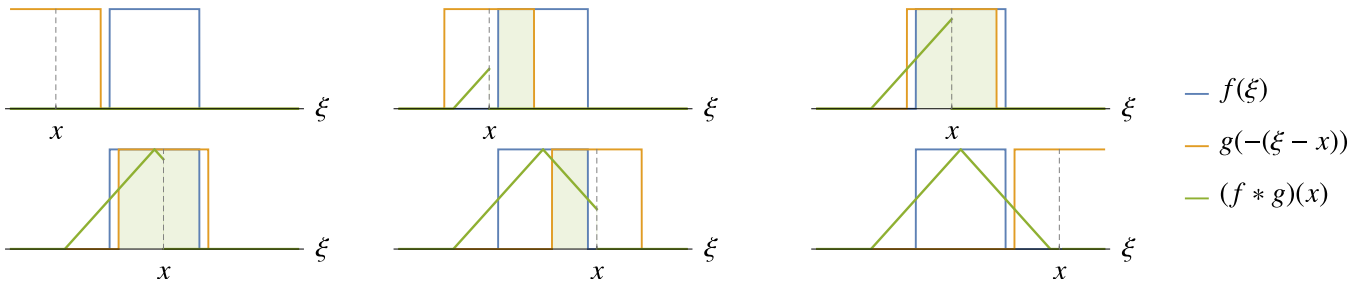
$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(-(\xi - x))\, \mathrm{d}\xi$$

Esto significa que para un x fijo, se tendrá que la convolución será equivalente a:

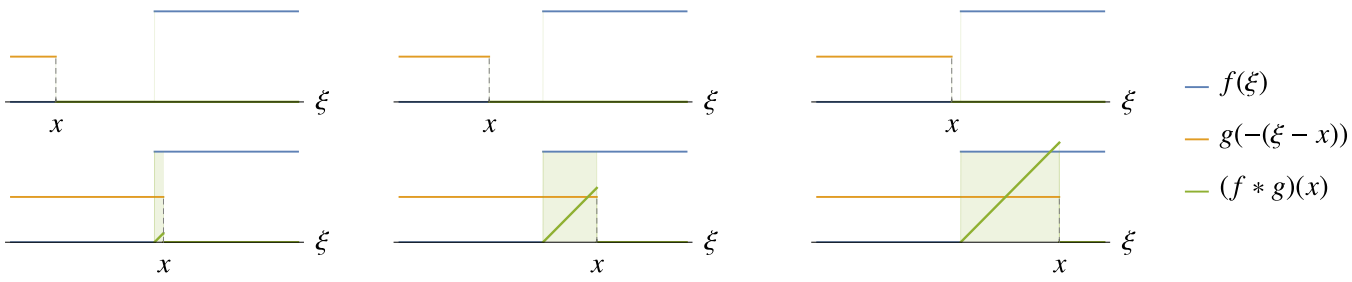
1. Tomar g e invertir horizontalmente (si g es par no se hace nada).
2. Desplazar horizontalmente g invertida en x unidades.
3. Multiplicar dicha función con f y calcular el área de la función resultante.

Como la convolución es conmutativa uno puede escoger cualquiera de las dos como la función que se invierte-traslada, según cual convenga más.

Gráficamente esto puede realizarse para todo x, como por ejemplo para $\sqcap(x) * \sqcap(x)$.



En este caso se eligió una función par por lo que la inversión horizontal no se aprecia en este ejemplo. Es importante notar que el triángulo verde es formado a partir del área de la **multiplicación** de las dos funciones (también en verde, pero trasparente), no de la intersección. Este hecho es importante en el caso



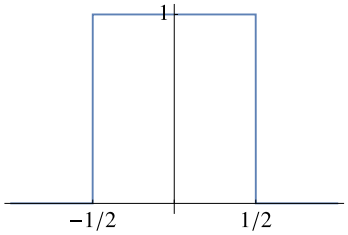
que las funciones no tengan altura unitaria, como $\sqcap(x) * 2\sqcap(x)$ y muchísimas otras, de hecho infinitas.

Ahora que ya entendemos lo que es la convolución y algunas propiedades elementales de funciones podremos empezar a definir lo que son las señales.

1.3 Señales importantes

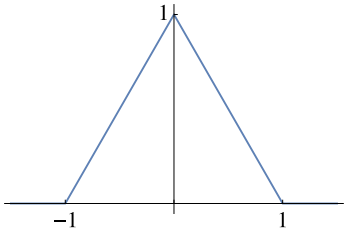
1.3.1 Definiciones no impulsivas

Rect: $\sqcap(x)$



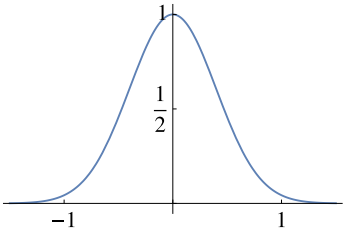
$$\sqcap(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Triángulo: $\wedge(x)$



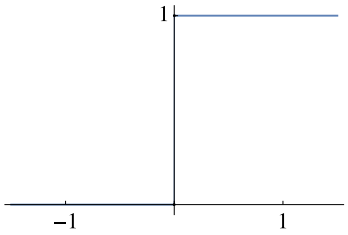
$$\wedge(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$$

Gauss: $\text{Gauss}(x)$



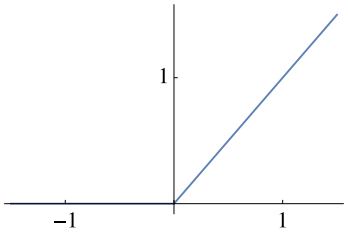
$$\text{Gauss}(x) = e^{-\pi x^2}$$

Escalón: $\sqcap(x)$



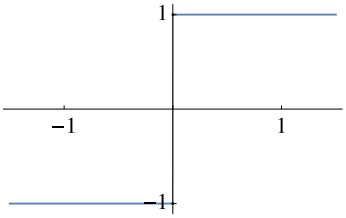
$$\sqcap(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Rampa: $R(x)$



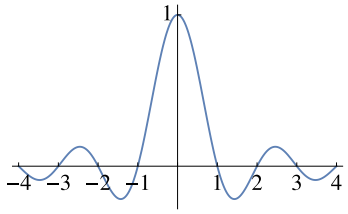
$$R(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Signo: $\text{sgn}(x)$



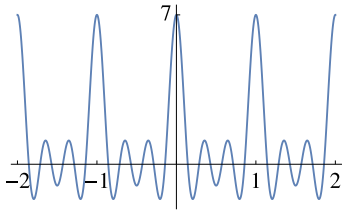
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ -1 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Sinc: $\text{sinc}(x)$



$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Asinc: $\text{asinc}_N(x)$



$$\text{asinc}_N(x) = \frac{\sin\left((2N+1)\,\pi x\right)}{\sin(\pi x)}$$

Las señales de esta página poseen **propiedades** que se comentarán a continuación (solo para algunas de ellas). Sin embargo, faltan aún las señales que son definidas a partir del **impulso**, que al ser muy importante se le dedicará una sección especial.

1.3.2 Equivalencias y propiedades

Partiremos con algunas equivalencias utilizadas en el curso para facilitar cálculos

- $\operatorname{sgn}(x) = x/|x| = 2\sqcap(x) - 1$
- $R(x) = x\sqcap(x)$
- $\sqcap(ax) = \sqcap(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$
- $\sqcap(ax) = 1 - \sqcap(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}^-$
- $\operatorname{sinc}(k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- $\operatorname{asinc}_N(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x - 2Nn)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Gauss}(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $\sqcap(x) * \sqcap(x) = \wedge(x)$

Estas serán de utilidad para ejercicios de distinto tipo.

1.4 Impulso o delta de Dirac: $\delta(x)$

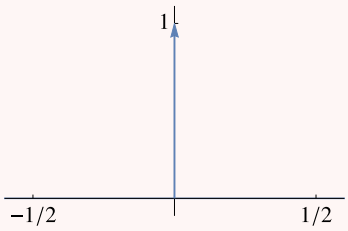
1.4.1 Definición

Quizás una de las funciones más importantes del análisis de señales es el delta de Dirac, esto se debe a que nos permitirá caracterizar la respuesta de un sistema lineal e invariante con su **respuesta al impulso**. Su definición matemática no coincide con la definición habitual de función[7] y suele describirse por su **propiedad del cedazo**

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)}_{\text{Propiedad del cedazo}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.4.1}$$

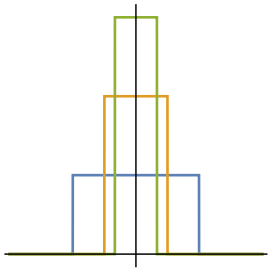
[7] Si no de un **funcional**, matemáticamente el delta de Dirac se define por el resultado que entrega al ser integrado junto a una función.

Notación: Impulso

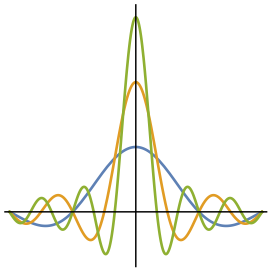


El impulso unitario se denota por una flecha centrada en cero con altura uno debido a su magnitud o área, ya que el impulso tiene un valor divergente en dicho punto $\delta(0) \to \infty$.

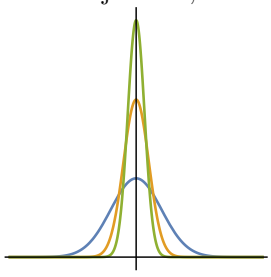
De este modo el impulso sería una función de **área uno** y por esto podemos definir límites de funciones con esta características que converjan a él, como



$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sqcap \left(\frac{x}{\tau}\right)$$



$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$



$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

Todas estas tienen área uno ($\forall \tau, a, \sigma > 0$) y en el límite son equivalentes al impulso.

1.4.2 Modificación de amplitud

Es importante mencionar que esta función modifica el valor de su área al estar escalada en el tiempo. Entonces al **comprimir** el impulso en el tiempo

su **magnitud disminuye**

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{1.4.2}$$

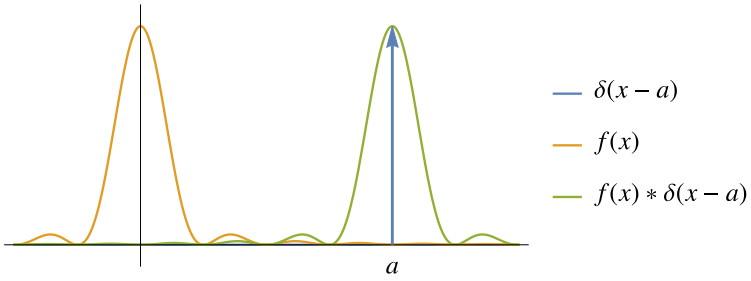
1.4.3 El impulso de una función $\delta(f(x))$

Pensando con una lógica similar a la anterior (subsección 1.4.2), la **contracción** recibida por el impulso si lo evaluamos en una función será para cada punto $|f'(x)|$[8] y este solo tendrá valor distinto de cero cuando la función se haga cero, osea, en sus **raíces** x_n. Así se concluye que

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \tag{1.4.3}$$

1.4.4 Propiedad del desplazamiento

El impulso también tiene propiedades asociadas a la convolución entre funciones, la principal es que el desplazamiento de una función producida por la convolución con $\delta(x-a)$



De este modo se tendrá que

$$f(x-a) = f(x) * \delta(x-a) \tag{1.4.4}$$

Demostración: Modificación de amplitud

Intuitiva:
Se tiene la función generadora

$$\delta_\tau(x) = \frac{1}{\tau}\sqcap\left(\frac{x}{\tau}\right),$$

cuyo área es 1 para todo τ. Por otro lado, $\delta_\tau(ax)$ tendrá área $1/|a|$ y en el límite $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$.

Matemática:
El impulso no es una función, por lo que ésta propiedad debe demostrarse a partir de su definición integral

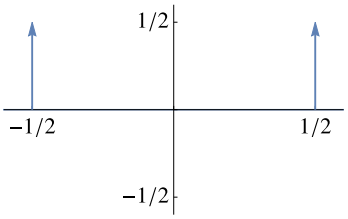
$$\begin{aligned}\langle f, \delta(ax)\rangle &= \frac{1}{|a|}\left\langle f\left(\frac{x}{a}\right), \delta(x)\right\rangle \\ &= \frac{1}{|a|}f(0) \\ &= \left\langle f, \frac{1}{|a|}\delta(x)\right\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto operar con $\delta(ax)$ será equivalente a haberlo hecho con $\delta(x)/|a|$.

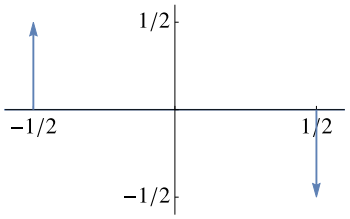
[8] Para una función lineal $ax+b$ es a, y por la expansión en serie de Taylor se demuestra que para f es $|f'(x)|$.

1.4.5 Definiciones impulsivas

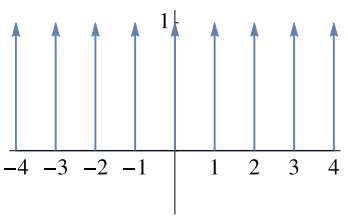
Horquilla: $\uparrow\uparrow(x)$



Anti-hoquilla: $\uparrow\downarrow(x)$



Shah: $\text{ш}(x)$



$$\uparrow\uparrow(x) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) + \delta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\uparrow\downarrow(x) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{ш}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$$

Se definen las siguientes funciones a partir del impulso debido a que volverán a aparecer reiteradas veces, ya sea por ser la transformada de Fourier de las funciones sinusoidales o por participar en el muestreo de funciones.

1.4.6 Equivalencias y propiedades

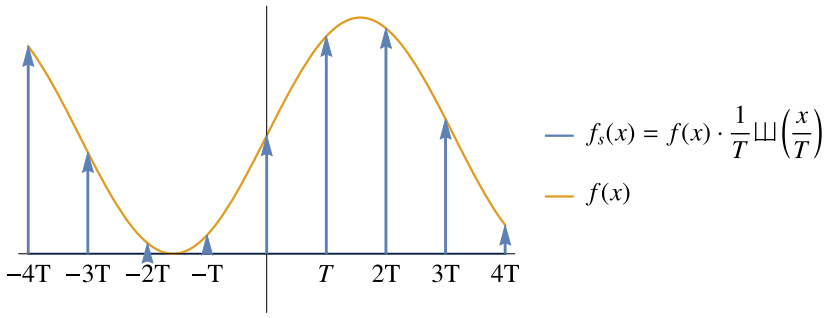
Dentro de las relaciones notables tendremos que:

- $\sqsubset'(x) = \delta(x)$
- $\sqcap'(x) = 2\uparrow\downarrow(x)$
- $\mathcal{F}\{\cos(\pi x)\} = \uparrow\uparrow(x)$
- $\mathcal{F}\{\sin(\pi x)\} = i\uparrow\downarrow(x)$

Algunas de estas relaciones no harán mucho sentido hasta que se vea la transformada de Fourier en el capítulo 3.

1.4.7 Muestreo

Ya definidas todas estas señales importantes, podemos empezar a escribir procesos más complejos con estas. Por ejemplo si se tiene una función $f(x)$ y se desea sacar muestras de ella cada T segundos, esto será equivalente a decir



De este modo se tiene que la función que contiene las muestras de la función cada intervalos de T será[9]

$$f_s(x) = f(x) \cdot \frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{x}{T}\right) \tag{1.4.5}$$

Recordamos que el factor de escalamiento del *shah* se incluye para que cada impulso permanezca con magnitud igual a uno, esto se debe al escalamiento que se genera por la expansión en T, ver la ecuación 1.4.2.

Podemos además definir una función discreta

$$f[n] \stackrel{!}{=} f_s(nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1.4.6}$$

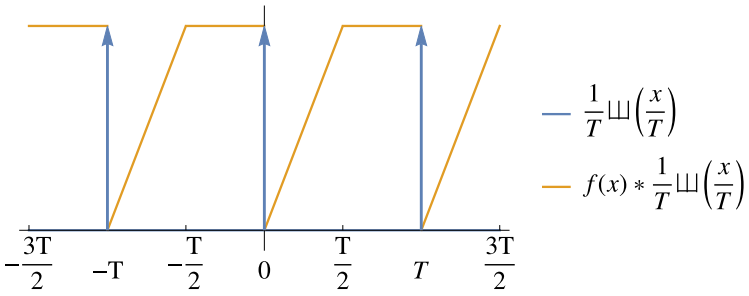
Donde $\stackrel{!}{=}$ significará que la función es equivalente al módulo del impulso en dicho punto, porque la función en rigor divergirá en los puntos nT[10].

1.4.8 Funciones periódicas

Del mismo modo que se puede definir el muestreo de una función a través de la función *shah*, también podemos escribir con ella cualquier función periódica. Para ello tenemos una función $f(x)$ de *tiempo limitado*, osea que será igual a cero para $x \notin [0, T]$. Ya definida esta función se puede definir su versión periódica de periodo T

[9] No confundir $f_s(x)$ con la frecuencia de muestreo u_s, por ahora solo significará la función muestreada o *sampled*.

[10] De este modo cada vez que nos refiramos a una función con "corchetes" en vez de paréntesis en el argumento esto significará que se estará tomando la magnitud del impulso de la función muestreada f_s.



Por lo tanto esto es equivalente a decir, usando la propiedad 1.4.4

$$\tilde{f}(x) = f(x) * \frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{x}{T}\right) \tag{1.4.7}$$

Donde el tilde encima de la función f denota su periodicidad, esta notación será más utilizada cuando se trabaje con trasformadas de Fourier discretizadas.

1.4.9 Ejemplo

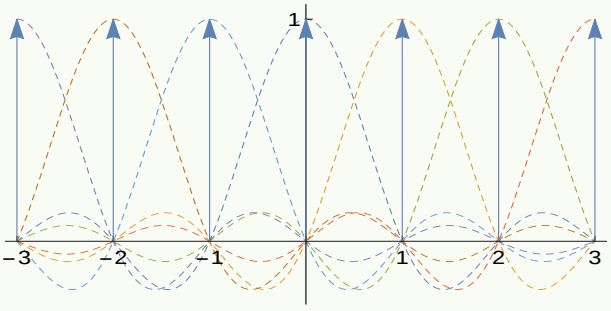
Sea un sistema descrito por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(t-n)\, dt$$

¿Cuál será el valor de la derivada de la salida, si $f(x) = \text{Ш}(x)$?

Solución:

Como la funcion *sinc* tiene valor nulo para todo número entero excepto el origen, la suma de todos los *sinc* desplazados a saltos enteros generará una función que tiene valor uno para todo entero



La función $g(x)$ será equivalente a integrar dichos impulsos a lo largo de x, osea

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqcap(x-n).$$

Por lo tanto la derivada de $g(x)$ será la misma función *shah*

$$g'(x) = \text{Ш}(x)$$

1.5 Ejercicios

1. Responda las siguientes preguntas básicas sobre las señales que usaremos en el curso:

   a) Sea una función $f(x)$ cualquiera, encuentre el gráfico de $f(ax-b)$ ¿Cuál es el desplazamiento y el factor de dilatación/contracción de esta última?

   b) Escriba la función $\operatorname{sgn}(x)$ en términos de $\sqcap(x)$.

   c) Resuelva para todo $\mathbb{R}$ la ecuación $\operatorname{sinc}(x) = 0$.

   d) Calcule la derivada de $\sqcap(x)$ y $\sqcap(x)$.

   e) Calcule el área de $\frac{1}{\tau}\sqcap\left(\frac{x}{\tau}\right)$.

   f) Grafique $\sqcap(ax)$. ¿Cómo influye el valor de a en el gráfico?

   g) ¿Cuál es la magnitud de cada impulso en $\text{Ш}(ax)$?

2. Encuentre y grafique la parte par e impar de las siguientes funciones:

   a) $\sqcap(x)\sin(2\pi x)$ *b*) $\ln(x)$ *c*) $\sqrt{x}$

   Nota: x puede ser cualquier número real, incluido $\frac{\sqrt{\pi}}{17}$.

3. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \wedge(x-1)\,\text{Ш}(100x)\mathrm{d}x.$ *b*) $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ш}\left(\frac{x}{a}\right)\sqcap\left(\frac{x}{5a}\right)\mathrm{d}x$

4. Sea
$$f(x) = \sqcap\left(\frac{x}{4}\right) + \uparrow\uparrow(x) * \wedge(2x) + \frac{2}{3}\uparrow\uparrow\left(\frac{x}{3}\right) * \wedge(2x)$$
   Grafique $f(x)$, indicando puntos relevantes del gráfico.

5. La función $\delta\left[\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]$ representa la suma de muchos impulsos. Grafique 6 de dichos impulsos.

6. Demuestre que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqcap\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqcap\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = \delta\left(x^2-1/4\right).$$

7. Se tiene
$$\delta\left(e^x-b\right) = \delta\left[\frac{3}{2}\left(a-x^2\right)\sqcap(x)+\frac{3a}{2}\sqcap(-x)\right]$$
   Determine a y b para que esto sea cierto. Utilice una precisión de $\pm 0{,}5$.

2 Series de Fourier

2.1 Repaso Conceptual

2.1.1 Producto punto o producto interno

El producto punto es una operación entre dos vectores de un **espacio vectorial**, esta operación tiene la peculiaridad de entregar un resultado escalar, dicho de otra manera, un número común y corriente de la recta numérica tal como π o $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Y para dos vectores de dimensión n, osea, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que este número estará dado por

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{2.1.1}$$

Siendo θ el ángulo entre los dos vectores. Al estar involucrado en su definición el ángulo entre dichos vectores, no es sorprendente pensar que el coseno de este pudiese dar cero o uno. En particular si los vectores son ortonormales[1] (para no ser molestados por la norma de los vectores) se tiene que la susodicha operación tiene como resultado

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \theta = 90° \\ 1 & , \text{ si } \theta = 0° \\ \cos(\theta) & , \text{ si } no \end{cases} \tag{2.1.2}$$

[1] Vectores que distienden un ángulo recto y cada uno posee norma 1.

Hasta ahora esto no resulta bastante sorprendente, sin embargo hay aplicaciones para esto. Se puede despejar un coeficiente particular incógnito con el producto punto, en particular, si se tienen vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ y se sabe que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortonormales, en el caso que se quisiera despejar un coeficiente $d \in \mathbb{R}$ de la expresión

$$d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad = \quad \boldsymbol{c}$$

Aplicando $\cdot\boldsymbol{a}$ a ambos lados de la ecuación y usando la ecuación 2.1.2, quedará inmediatamente que

$$d = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$$

Por lo tanto si tenemos un vector generado por una base ortonormal, **se puede obtener el coeficiente que amplifica la base "proyectando" en la dirección de esta** (las bases de $\boldsymbol{c}$ serían $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en el ejemplo). Es esencial que esto último quede en mente para el desarrollo posterior.

Recordatorio: Proyección

La proyección de un vector $\boldsymbol{u}$ en dirección $\boldsymbol{v}$ esta dada por

$$proy_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$$

Donde $\hat{\boldsymbol{u}}$ es el vector unitario de $\boldsymbol{u}$. Esta es una interpretación geométrica, en el caso que se quisiera conocer el vector proyectado

$$\mathbf{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$$

Este concepto puede ser utilizado para calcular derivadas direccionales.

2.1.2 Espacio de Hilbert y ortonormalidad funcional

¿No sería interesante que con las funciones ocurriera algo similar que con el producto punto en vectores?, para la satisfacción mental de algunos y para el aprendizaje de otros debo decir que **si existe**. Pero para que este exista se definirá, no un espacio vectorial, si no un **espacio de funciones**. Sí leíste bien,

un espacio de funciones, a este se le denomina **espacio de Hilbert** y dentro de él[2] por conveniencia se definirá para un intervalo $[0, T]$ el producto interno de la siguiente manera[3]

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(x)\tilde{g}^*(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.3}$$

Donde $\tilde{g}^*$ es el conjugado de la función $\tilde{g}$. Esto hace sentido debido que si la función $\tilde{f}$ fuese compleja

$$\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{f}(x)|^2 \mathrm{d}x$$

Al aparecer el módulo al cuadrado esta propiedad se asemeja a hacer $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|a\|^2$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Análogamente, sería interesante que se dijera que una función tiene norma 1 si el resultado de la operación resultará 1^2. Entonces, si tenemos por ejemplo $\tilde{f}(x) = e^{in\omega_0 x}$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega_0 x} e^{-in\omega_0 x} \mathrm{d}x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Estos conceptos serán los que ayudarán a construir una base con la cual describir funciones periódicas en $[0, T]$, pero más importante que la norma es la propiedad de ortogonalidad entre bases. Si se define $\omega^n(x) = e^{in\omega_0 x}$ es fácil corroborar que

$$\langle \omega^n, \omega^m \rangle = \begin{cases} 1 & , \text{ si } m = n \\ 0 & , \text{ si } m \neq n \end{cases} = \delta[n-m] = \delta_{nm}$$

Por lo tanto hemos encontrado un candidato a base, debido que tenemos funciones que cumplen con la definición de **ortonormalidad** para cualquier periodo T.

Definición: Ortonormalidad

Un par de funciones $\varphi_n(x)$ y $\varphi_m(x)$ son ortonormales si con una función de peso $w(x)$ (en los casos empleados en el libro esta será una constante) las dos cumplen que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_n w \rangle &= 1 \\ \langle \varphi_m, \varphi_m w \rangle &= 1 \end{aligned}$$

y además que

$$\langle \varphi_n, \varphi_m w \rangle = \delta[m-n] = \delta_{mn}$$

El factor de peso es importante para que las funciones $c_n = \cos(n\omega_0 x)$ y $s_n = \sin(n\omega_0 x)$ puedan cumplir la definición (con $w = 2$)

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_n \rangle &= \tfrac{1}{2} \quad \langle c_n, c_m \rangle = \tfrac{1}{2}\delta_{mn} \\ \langle s_n, s_n \rangle &= \tfrac{1}{2} \quad \langle s_n, s_m \rangle = \tfrac{1}{2}\delta_{mn} \\ \langle c_m, s_n \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Entonces la base c_n es ortonormal al igual que s_n, sin embargo estas son siempre ortogonales entre si.

2.2 Representación compleja

2.2.1 Definición y obtención de coeficientes

Como se vio en la sección anterior la idea de representar una función $f(x)$ en base a la suma de otras no pareciera ser tan descabellada. De hecho si se recuerda la definición de serie de Taylor de una función en torno a $x_0 = a$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \tag{2.2.1}$$

Esto nos muestra que si es posible (en el caso de la serie de Taylor dentro de una región de convergencia) lograr este objetivo. Sin embargo, esta idea no es exactamente igual a la desarrollada debido a que no se esta proyectando la función en una base. Para seguir con esta lógica se puede tratar de escribir una función por polinomios ortonormales como los Hermite, Legendre o Chebyshev.

[2] El factor $1/T$ es por conveniencia, por lo general se define sin él. Sin embargo, esto no es relevante para ni una definición o utilización dentro del curso.

Sin embargo, nos centraremos en tratar de describir una función periódica $\tilde{f}(x)$ con periodo T (frecuencia $u_0 = 1/T$ y frecuencia angular $\omega_0 = 2\pi u_0$) con las bases ya descritas y en particular en esta sección por $\omega^n(x) = e^{in\omega_0 x}$. Diremos que la función $\tilde{f}(x)$ puede ser escrita por ondas ω^n de frecuencia múltiplo de su frecuencia fundamental como

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \omega^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 x} \tag{2.2.2}$$

Y de igual modo que en el repaso conceptual los coeficientes pueden ser despejados fácilmente debido a que es una suma de bases ortonormales

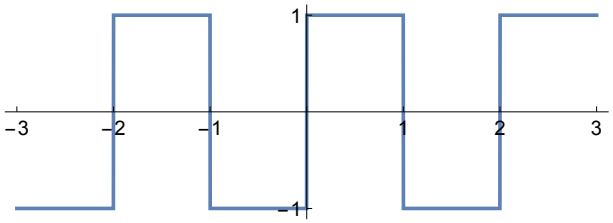
$$C_n = \langle \tilde{f}, \omega^n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(x) e^{-in\omega_0 x} \mathrm{d}x \tag{2.2.3}$$

Otro concepto relevante es que el coeficiente C_0 es la parte DC de la señal, osea, **el promedio de la función en el periodo**. Este resultado se hace obvio al ver la definición

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(x) \mathrm{d}x \tag{2.2.4}$$

2.2.2 Ejemplo

Encuentre los coeficientes C_n de la representación compleja de la serie de Fourier para la señal periódica de la figura



Solución:

Notamos que el periodo de la función será $T = 2$ por lo tanto

$$C_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \tilde{f}(x) e^{-i\pi nx} \mathrm{d}x$$

Ahora como la función esta definida en el intervalo como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & , \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ayuda memoria: Signos de la exponencial

La solución de la ecuación de Schrödinger tiempo-dependiente es una onda descrita por

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}$$

Si nos fijamos en la parte de la onda que varía en el tiempo y no en el espacio, tiene sentido pensar que la base ω^n es de hecho una onda de frecuencia angular ω_0. En el caso que quisiera saber que contribución existe de esa onda en la función f, se procede a dividir por ella en la función (o multiplicar por ω^{-n}) y ver la contribución en todo el dominio (integrar) al igual como se haría por ejemplo para ver cuantos billetes de 2 forman el valor de 24. Y para formar la función f al igual que con los billetes el procedimiento lógico será multiplicar por ω^n.
Este concepto es útil también para la transformada de Fourier.

Recordatorio: Exponencial compleja

Recordamos de la famosa identidad de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

las representaciones de coseno y seno en su forma de exponencial compleja

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

¿Sabías qué?



Las series de Fourier deben su nombre a el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier quien desarrolló la teoría cuando estudiaba la **ecuación del calor**. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicó sus resultados iniciales en 1807 y 1811.

Fuente: Wikipedia

Se desarrolla asumiendo $n \neq 0$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^{-i\pi nx}\mathrm{d}x - \int_1^2 e^{-i\pi nx}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\left(-1+e^{-i\pi n}\right)^2}{2i\pi n} \end{aligned}$$

Como $e^{\pm i\pi} = -1$, la expresión valdrá cero para los coeficientes pares (C_0 también, debido a que el promedio de la función es cero)

$$C_n = \begin{cases} 0 & , \text{ si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{2i\pi n} & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Desarrollando un poco más, como en particular $C_{-n} = -C_n$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\pi nx} = C_0 + \sum_{k=0}^{\infty} C_n e^{i\pi(2k+1)x} - C_n e^{-i\pi(2k+1)x}$$

Si se agrupan los términos negativos con su simétrico positivo, formamos la definición de seno quedando finalmente que

$$\tilde{f}(x) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\,\pi x\right)}{(2k+1)\,\pi}$$

2.3 Representación trigonométrica

2.3.1 Definición y obtención de coeficientes

Si nos fijamos en el desarrollo del ejercicio anterior (de la sección 2.2.2), al final pudimos desde la representación compleja lograr escribir la función como una suma de sinusoides. A este resultado se le llama la representación trigonométrica de la serie de Fourier y es en general la que mucha gente asocia a esta serie. La estructura general de ella es

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{c_n}_{par} + b_n \underbrace{s_n}_{impar} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\omega_0 x\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 x\right) \tag{2.3.1}$$

Nos fijamos que tenemos escrita una función periódica de periodo T por una suma de bases ortonormales (subsección 2.1.2), y que la sumatoria a diferencia de la sección anterior parte desde uno[4]. Como las bases de cosenos (c_n) y senos (s_n) cumplen las propiedades adecuadas (ortonormalidad con función de peso $w = 2$), podemos despejar los coeficientes fácilmente proyectando en la base

[4] Si partiese en cero, el seno se anularía y el coseno se haría uno, entonces quedaría simplemente a_0.

correspondiente, así se obtendrá para $n \neq 0$

$$a_n = w\left\langle \tilde{f}, c_n \right\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \tilde{f}(x)\cos\left(n\omega_0 x\right)\mathrm{d}x \tag{2.3.2}$$

$$b_n = w\left\langle \tilde{f}, s_n \right\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \tilde{f}(x)\sin\left(n\omega_0 x\right)\mathrm{d}x \tag{2.3.3}$$

Para despejar a_0 es necesario hacer una proyección distinta (va a resultar en una integración de las sinusoides en su periodo, que siempre tendrá resultado cero)[5]

$$a_0 = \left\langle \tilde{f}, c_0 \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(x)\mathrm{d}x \tag{2.3.4}$$

[5] Notar que $c_0 = 1$.

Por lo tanto, al igual que con C_0 el coeficiente a_0 es la parte DC de la función, osea, el **promedio de esta en el periodo ($a_0 = C_0$)**.

2.3.2 Paridad de la función y su relación con los coeficientes

Por intuición, si una función es par resultaría difícil pensar que esta se pudiese generar a partir de funciones impares (s_n) y si al contrario esta fuese impar que se formara por funciones pares (c_n). De hecho es posible demostrar que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) \text{ par} \quad &\Rightarrow \quad b_n = 0 \\ \tilde{f}(x) \text{ impar} \quad &\Rightarrow \quad a_n = 0 \end{aligned}$$

Entonces resultará útil analizar la simetría/paridad de la función antes de empezar a calcular los coeficientes de la expansión en serie de Fourier.

Recordatorio: Paridad de una función

Una función $f(x)$ puede ser escrita como la suma de una parte par y una impar

$$f(x) = e(x) + o(x)$$

Donde su **parte par** (que cumple $e(x) = e(-x)$) es

$$e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Y su **parte impar** (que cumple $o(x) = -o(-x)$) es

$$o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

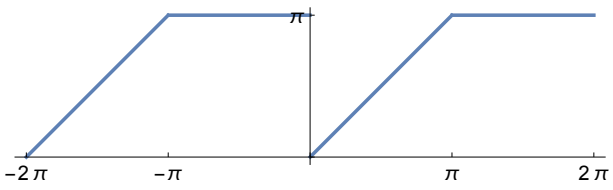
Además, si $f(x)$ es impar y $g(x)$ es par, $h(x) = f(x)g(x)$ es impar y esto implicará

$$\int_{-N}^{N} h(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall N \in \mathbb{R}$$

Esto resulta útil para $N \to \infty$ en posteriores capítulos.

2.3.3 Ejemplo

Considere la función periódica de periodo 2π



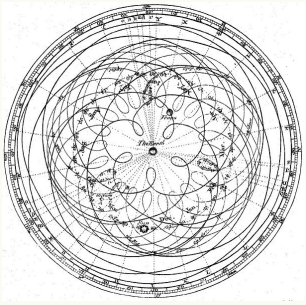
Encuentre los coeficientes a_n y b_n en su expansión en serie de Fourier.

Solución:

Notamos que debido a que el periodo es 2π su frecuencia angular será $\omega_0 = 1$. Por otro lado, calculamos el promedio de la función en el periodo, de lo cual se deduce inmediatamente que $a_0 = \frac{3}{4}\pi$.

¿Sabías qué?

Los griegos pensaban que la tierra y la luna se movían en una circunferencia. El problema con esto es que los planetas a veces parecían moverse en dirección contraria en el cielo, así que Ptolomeo postuló que se movían en una circunferencia grande y a la vez giraban en una más pequeña, a esto se le llamaron los **epiciclos**. Así se logró un mapa del sistema solar que lucia como este



Por supuesto que esa idea era errada, porque ahora sabemos que se mueven en una **elipse** (casi, debido a perturbaciones gravitacionales de los otros planetas y efectos relativistas).
Sin embargo, la idea de sumar y sumar círculos para formar una función de recorrido planetario no es descabellada si recordamos que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ es una circunferencia en el plano complejo y además que una función periódica (como el recorrido planetario) puede ser descrita por

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_k e^{in\omega_0 x}$$

Donde los coeficientes C_k representarían los radios de giro. Así que básicamente podrían haber seguido agregando circunferencias y cada vez obtener un resultado más preciso.

Fuente: StackExchange-Math

Para $n \neq 0$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(1\cdot nx)\,\mathrm{d}x + \pi\int_{\pi}^{2\pi}\cos(1\cdot nx)\,\mathrm{d}x\right)$$

La primera integral puede ser calculada mediante integración por partes y la segunda directamente al saber la primitiva, entonces

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{, si } n \text{ es par} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{, si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

De forma análoga

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} x\sin(1\cdot nx)\,\mathrm{d}x + \pi\int_{\pi}^{2\pi}\sin(1\cdot nx)\,\mathrm{d}x\right)$$

Que desarrollando de manera similar quedará

$$b_n = -\frac{1}{n}$$

Si escribimos la función representada por la serie

$$\tilde{f}(x) - \frac{3}{4}\pi = \sum_{n\ \text{impar}} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(nx)$$

y evaluamos en $x = \frac{\pi}{2}$ (en ambos lados), de tal manera que el coseno se anule en los términos impares y así el seno tenga valor distinto de cero en estos ($n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$)

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{, si } n \text{ es par} \\ (-1)^k & \text{, si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Se llega a la **serie de Leibnitz** (en honor al matemático) para aproximar el número π

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

2.4 Teorema de Parseval

El teorema de Parseval es una extensión del teorema de Pitágoras aplicado a espacios de Hilbert, matemáticamente es representado por (con B una base **ortonormal**)

$$\left\|\tilde{f}\right\|^2 = \left\langle \tilde{f}, \tilde{f}\right\rangle = \sum_{v\in B} \left|\left\langle \tilde{f}, v\right\rangle\right|^2 \tag{2.4.1}$$

Recordamos que nuestras bases **ortonormales** para las series de Fourier son

- Representación exponencial: ω^n, con factor de peso $w = 1$
- Representación trigonométrica: c_n y s_n, con factor de peso $w = 2$

Que aplicado a su **representación exponencial**:

$$\|\tilde{f}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{2.4.2}$$

Y para la **representación trigonométrica**:

$$\|\tilde{f}\|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \tag{2.4.3}$$

Demostración: Teorema de Parseval

Como la función $\tilde{f}$ puede escribirse como:

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + b_n s_n$$

Calculamos $\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle$ en el lado derecho fácilmente debido a que c_n y s_n son bases ortonormales $(w = 2)$, entonces el producto punto de unas con otras dará cero si no coinciden entre sí, para $n \neq 0$

$$\langle c_n, c_n \rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle s_n, s_n \rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle c_n, s_n \rangle = 0 \qquad \langle a, a \rangle = |a|^2$$

Por lo tanto

$$\|\tilde{f}\|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

2.5 Convergencia

2.5.1 Condición de convergencia

Para que una función periódica tenga una representación válida en serie de Fourier se deben cumplir las condiciones de Dirichlet

1. En el periodo la función debe ser **absolutamente integrable**, osea
$$\int_0^T |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$
2. La función debe tener un **número finito de máximos y mínimos** en el período.
3. La función debe tener un **número finito de discontinuidades** en el intervalo.

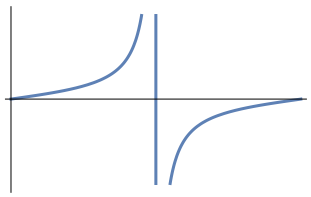


Figura 2.5.1: No cumple condición 1.

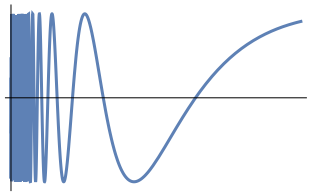


Figura 2.5.2: No cumple condición 2.

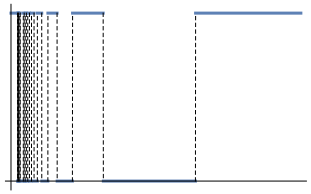


Figura 2.5.3: No cumple condición 3.

2.5.2 Fenómeno de Gibbs

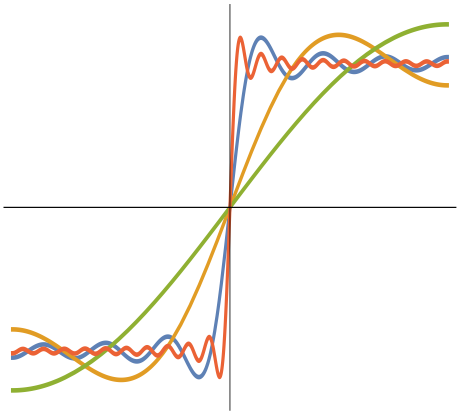


Figura 2.5.4: Fenómeno de Gibbs.

En los puntos de discontinuidad de la función la serie de Fourier converge al punto medio de la discontinuidad, sin embargo se producen resaltos en los bordes de discontinuidad que no desaparecen para una aproximación finita de la serie.

Este fenómeno es nombrado por el físico Americano Josiah Willard Gibbs. Ocurren cada vez que las señales tienen discontinuidades de salto (generalmente en los extremos), y siempre estarán presentes cuando la señal tiene oscilaciones fuertes.

2.6 Ejercicios

1. Calcule la expansión en serie de Fourier trigonométrica de:

   a) $1 + e^{ix}$

   b) $\cos(2x) + \sin(4x)$

   c) $(1 + \sin(x))\cos(5x)$

   d) $\cos^3(x)$

2. Una señal $x(t)$ se puede expresar en series de Fourier como

$$7\cos(10\pi t) + \cos(20\pi t) + 2\cos(40\pi t)$$

   Determine la potencia media de la señal.

3. Considere la señal periódica $y(t)$ cuyo periodo es:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si } -T < t < -\tau \\ K & , \text{si } -\tau < t < \tau \\ 0 & , \text{si } \tau < t < T \end{cases}$$

   ¿Cuál es la componente continua del desarrollo en serie de Fourier de $y(t)$?

4. Si las dos mitades del período de una función tienen forma idéntica salvo en que una es la negativa de la otra, entonces se dice que la señal tiene simetría de media onda. Una señal periódica de período τ que satisface esta condición cumplirá que:

$$f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = -f(t)$$

   Demuestre que los armónicos impares vienen dados por:

$$a_n = \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathsf{d}t \quad \text{y} \quad b_n = \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathsf{d}t$$

   ¿Qué puede decir de los coeficientes pares?

5. Si la potencia media de una señal esta dada por

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \mathsf{d}x$$

   Calcule la potencia media exclusivamente en términos de los coeficientes complejos C_n de la representación compleja de su serie de Fourier.

6. Determine explícitamente la señal $f(x)$ si se conocen las siguientes características de ella:

   - Es real y par
   - Es periódica con periodo $T = 6$
   - No posee componente continua
   - $a_n = 0, \quad \forall n > 1$
   - La señal posee energía 3
   - La señal cumple $f(x-3) = -f(x)$
   - a_1 es un número real positivo

3 Transformada de Fourier

3.1 Entendiendo la transformada

3.1.1 Producto punto, definición y notación

Quizás la transformada de Fourier es una de las operaciones matemáticas más notables por su gran versatilidad y gran número de aplicaciones, pero precisamente ¿qué es la trasformada de Fourier?

La transformada de Fourier de manera similar a las series de Fourier (ver subsección 2.1.2) pueden ser interpretadas como la proyección de una función $f(x)$ en un **espacio de bases o funciones**, que ahora no serán interpretadas como ondas con frecuencias múltiplos de una fundamental ω_0, si no que pasamos a un **mundo continuo de frecuencias**

$$\omega^n = e^{in\omega_0 x}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \omega^u = e^{i2\pi ux}, \quad u \in \mathbb{R}$$

De este modo la transformada de Fourier es la proyección de $f(x)$ en la base "con frecuencia u" ω^u. Pero queda un detalle por determinar y es que la transformada de Fourier[1] no estará restringida a funciones definidas en un intervalo $[0, T]$ como en el caso de las series. Por esto mismo será conveniente definir el producto punto para funciones no periódicas como

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g^*(x)\, \mathrm{d}x \tag{3.1.1}$$

Es decir la transformada de Fourier será equivalente a[2]

$$(\mathcal{F} f)(u) = \langle f(x), \omega^u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i2\pi ux} \mathrm{d}x \tag{3.1.2}$$

Sin embargo, la notación de operador se tenderá a obviar y usualmente la transformada de Fourier puede ser escrita como $\mathcal{F}\{f(x)\}$ o de manera más simple $F(u)$.

Y claramente con esto ya definido se puede también escribir su trasformada inversa, que no es más que escribir la función como una "suma" de bases ω^u

$$f(x) = \langle F(u), \omega^{-u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i2\pi ux} \mathrm{d}u \tag{3.1.3}$$

Usualmente escribiremos $\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\}$ para referirnos a la transformada inversa de Fourier de la función $F(u)$.

3.1.2 Punto de vista intuitivo y relación con la serie

La transformada de Fourier puede entenderse intuitivamente a través de un concepto similar al de la serie de Fourier, queremos determinar "cuanto de una

[1] Esta es considerada un *isomorfismo* para el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable (esto se para que $\|f\|^2 < \infty$) y eso hace que tenga muchas aplicaciones y propiedades especiales.

[2] Se usa una "F" cursiva para representar el operador de la transformada de Fourier, sin embargo según las normas ISO la fuente correcta es $\mathcal{F}$ y no $\mathcal{F}$ como usualmente se denota.

frecuencia u" tiene mi función, osea $F(u)$ representará la contribución de dicha frecuencia en la señal.

En secciones siguientes se demostrará como ejercicio que una sinusoide de frecuencia f tendrá una transformada de Fourier equivalente a impulsos ubicados en $\pm f$, osea que solo tendremos contribución de una frecuencia para construir nuestra señal.

Sabemos además que una señal periódica cualquiera puede escribirse como suma de muchas de estas sinusoides, pero de frecuencias múltiplo de una "fundamental" de la señal. ¿Habrá alguna relación que conecte este concepto de serie de Fourier con su transformada?

En particular, para representar funciones periódicas podremos decir que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 x}$$

Pasándolo al dominio de Fourier:

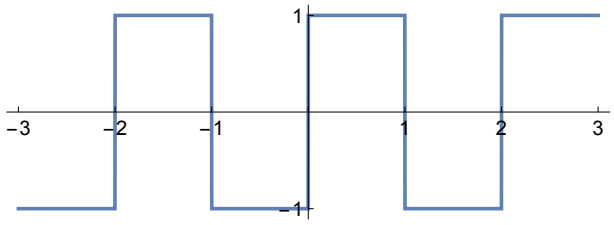
$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(u - n f_0)$$

Se podrá decir entonces que

$$F(n f_0) \overset{!}{=} C_n \tag{3.1.4}$$

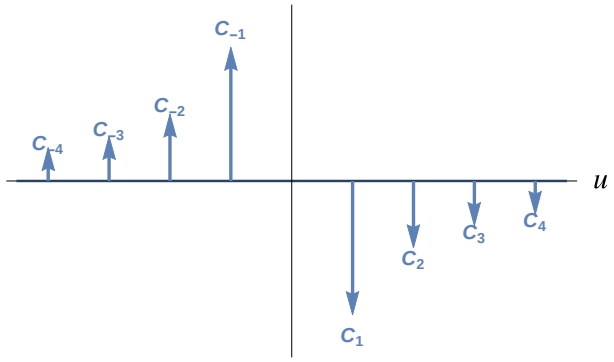
Es decir, la transformada de Fourier en nf_0 será C_n (en realidad será un impulso de magnitud C_n, por eso se usa $\overset{!}{=}$).

Por ejemplo para la onda rectangular del ejercicio de la sección 2.2.2, que tiene $T = 2 \Rightarrow f_0 = 1/2$



Se tendrá que su transformada de Fourier serán impulsos de magnitud igual a $C_n = -\dfrac{4i}{2\pi(2n+1)}$ ubicados en $nf_0 = n/2$[3]

[3] Si es que no queda claro, esto significa que cada uno de los impulsos estará ubicado en una frecuencia múltiplo de la fundamental f_0.



Notamos que estás serán muchas antihorquillas imaginarias, de lo que se podrá deducir que la función puede ser escrita como una suma de senos (porque $\sin(\pi x) \to i\uparrow\downarrow(u)$), en este caso particular como una suma de funciones *sinc*.

Quedará como ejercicio para el lector relacionar la representación de la serie trigonométrica con la transformada de Fourier.

3.1.3 Propiedades importantes y simetrías

Es de gran importancia conocer las propiedades de la transformada antes de seguir, a continuación se resumirán las propiedades de la transformada de Fourier:

Dualidad

$$F(u) \to f(-x)$$

Escalamiento

$$f(ax) \to \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right)$$

Desplazamiento en tiempo

$$f(x-a) \to F(u)\, e^{-i2\pi u a}$$

Desplazamiento en frecuencia

$$f(x)\, e^{i2\pi x a} \to F(u-a)$$

Convolución

$$f(x) * g(x) \to F(u)\, G(u)$$

Producto

$$f(x)\, g(x) \to F(u) * G(u)$$

Parseval o Energía, $(\|f\|^2 = \|F\|^2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \, \mathrm{d}u$$

Derivada

$$f'(x) \to i2\pi u F(u)$$

Cuadro 3.1.1: Resumen de propiedades.

Notar que no se han escrito todas ellas debido a que muchas se pueden deducir a partir de estas propiedades básicas.

Ahora, las relaciones de simetría son:

$$\begin{aligned}
f(x),\ \text{real} &\to F(u),\ \text{hermitiana} \\
f(x),\ \text{real y par} &\to F(u),\ \text{real y par} \\
f(x),\ \text{hermitiana} &\to F(u),\ \text{real} \\
\\
f(x),\ \text{imaginaria} &\to F(u),\ \text{antihermitiana} \\
f(x),\ \text{imaginaria y par} &\to F(u),\ \text{imaginaria y par} \\
f(x),\ \text{antihermitiana} &\to F(u),\ \text{imaginaria}
\end{aligned}$$

Es bueno tener éstas en mente, pero en la práctica, las simetrías más utilizadas son las que relacionan funciones reales debido a que en el mundo cotidiano será difícil implementar señales complejas.

Recordatorio: Simetría de funciones

Sea una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se puede escribir esta como:

$$f(x) = h(x) + a(x)$$

Donde su **parte hermitiana** (que cumple $h(x) = h^*(-x)$) es

$$h(x) = \frac{f(x) + f^*(-x)}{2}$$

Y su **parte antihermitiana** (que cumple $a(x) = -a^*(-x)$) será

$$a(x) = \frac{f(x) - f^*(-x)}{2}$$

Una función es hermitiana si su $\mathrm{Re}\{f(x)\}$ es par y $\mathrm{Im}\{f(x)\}$ impar.

Una función es antihermitiana si su $\mathrm{Re}\{f(x)\}$ es impar y $\mathrm{Im}\{f(x)\}$ par.

3.1.4 Ejemplo

Calcule la transformada de Fourier de $f(x) = \cos(\pi x)$.

Solución:

Para realizar esto se preferirá expresar coseno en su representación compleja, usando la identidad de Euler ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) se puede deducir que

$$f(x) = \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2}$$

Luego aplicamos la transformada de Fourier

$$F(u) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\left\{e^{i2\pi x/2}\cdot 1\right\} + \mathcal{F}\left\{e^{-2i\pi x/2}\cdot 1\right\}\right)$$

Podemos identificar que la transformada de dichas exponenciales complejas pueden verse como la transformada de 1 desplazada en frecuencia. Como $\delta(x) \to 1$ por cedazo, se tendrá por dualidad $1 \to \delta(u)$, entonces

$$F(u) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(u - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(u + \frac{1}{2}\right)\right)$$

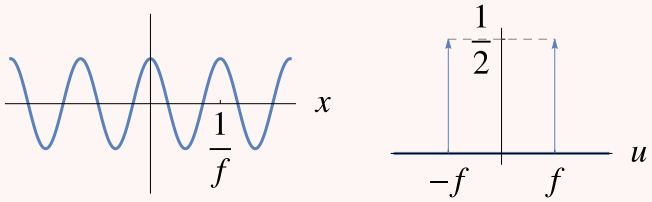
Identificamos que esto será una función horquilla, por lo tanto

$$\cos(\pi x) \to \uparrow\uparrow(x)$$

Podemos extender esto y darnos cuenta que la transformada de Fourier de un coseno de frecuencia f será

$$\cos(2\pi f x) \to \frac{1}{2}\left(\delta(u - f) + \delta(u + f)\right)$$

Osea su representación espectral coincidirá con dos impulsos de magnitud $1/2$ ubicados en $\pm f$. Éste concepto será más intuitivo que verlo como horquillas expandidas en frecuencia.



Demostración:
$1 \to \delta(u)$

$$\begin{aligned}
F(u) &= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-i2\pi ux}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \cos(2\pi ux)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to\infty}\frac{2\sin(2\pi ua)}{2\pi u} \\
&= \lim_{a\to\infty} 2a\cdot\operatorname{sinc}(2au) \\
&= \delta(u)
\end{aligned}$$

3.2 Ejercicios

1. Haciendo uso de propiedades, entreténgase calculando las siguientes transformadas:

   a) $\wedge(x)$.
   b) $\sin(\pi x)$.
   c) $\sqcap(x)\operatorname{sgn}(x)$.
   d) $2\sqcap(3-3x) - 1$.
   e) $\delta(ax)$.
   f) $3xe^{-2x^2}$.
   g) $\delta(\sin\pi x)$

2. Demuestre que:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqcup(x)\right\}=\frac{1}{1-e^{-i2\pi u}}.$$

3. Sea $f(x)$ una función compleja de argumento real con $f(x)\longrightarrow F(u)$. Encuentre las siguientes transformadas:

   a) $\mathcal{F}\{f^*(x)\}$.

   b) $\mathcal{F}\{f(x)+f^*(x)\}$.

   c) $\mathcal{F}\{f(x)-f^*(x)\}$.

   A partir de las transformaciones anteriores encuentre las fórmulas para descomponer una función cualquiera como la suma de una función hermitiana y una función antihermitiana.

4. *a*) Pruebe la propiedad de diferenciación en la frecuencia:

$$-i2\pi t f(t)\ \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u},$$

   y úsela para calcular la FT de $t\cos(\omega t)$.

   b) Pruebe el siguiente conjunto par de propiedades duales:

$$\begin{cases} f(t)\sin(2\pi u_0 t) & \longleftrightarrow \quad \dfrac{F(u-u_0)-F(u+u_0)}{2i}, \\[2ex] \dfrac{f(t+T)-f(t-T)}{2i} & \longleftrightarrow \quad F(u)\sin 2\pi u T. \end{cases}$$

   Úselas para calcular por inspección $\sqcap(x+\alpha)-\sqcap(x-\alpha)$.

5. Considere la función $f(x)=f(x-1)$, con coeficientes de Fourier $C_k=e^{-|k|}$.

   a) Calcule $F(u)$, la transformada de Fourier continua de $f(x)$.

   b) Exprese $F(u)$ como producto de la función $\sqcup(u)$ por otra función $G(u)$.

6. La modulación de amplitud (AM) es una técnica utilizada en comunicación electrónica y en la síntesis de sonidos, cuya gran ventaja es la simplicidad de su demodulación (recuperación de la señal original). Una ecuación básica de una señal $f(t)$ modulada en amplitud es:

$$S(t)=\alpha f(t)\cos(\omega_p t),$$

   donde $S(t)$ es la señal modulada, α es un parámetro del sistema y ω_p es la frecuencia angular de la señal portadora.

   a) Considere que se desea transmitir una señal $f(t)$ de ancho de banda limitada a $\omega_{\text{máx}}$. Determine condiciones sobre ω_p para que la señal sea demodulable. *Hint:* ¿A qué equivale la multiplicación por coseno en el dominio de la frecuencia?

   b) Suponiendo que se ha escogido un ω_p apropiado, se desea realizar una demodulación. Usted solo dispone de amplificadores, filtros pasabajos ideales y moduladores AM. Diseñe un sistema que realice demodulación AM, i.e. que la entrada sea una señal modulada $S(t)$ y el resultado sea la señal original $f(t)$. Exprese su resultado mediante diagrama de bloques.

7. Una señal causal $h(t)$ (que puede escribirse como $f(t)\sqcap(t)$ tiene transformada de Fourier $H(u)$. Si $R(u)$ y $X(u)$ son sus partes real e imaginaria, i.e. $H(u) = R(u) + iX(u)$, entonces:

   a) Demuestre que:

   $$R(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(u)}{u-y}\,\mathrm{d}y \quad \text{y} \quad X(u) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(u)}{u-y}\,\mathrm{d}y,$$

   asumiendo que $h(t)$ no tiene un impulso en el origen. Este par de funciones se conocen como transformadas de Hilbert:

   $$y(t) \stackrel{\triangle}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

   Hint: Tome la parte par e impar de esta función. Las funciones par e impar se relacionan mediante la función $\mathrm{sgn}(x)$.

   b) Si $f(x) \longleftrightarrow F(u)$ y se sabe que $F(u)$ cumple con la propiedad

   $$F(u) * \frac{i}{\pi u} = F(u),$$

   encuentre

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   c) Encuentre las propiedades de escalamiento, desplazamiento, dualidad y derivada para esta transformada.

   d) ¿Cuál es la relación entre las transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$.

4 Transformadas de Fourier Discretas

4.1 DTFT: Transformada de Fourier de tiempo discreto

4.1.1 Definición y notación

Ya formalizamos todos los conceptos relevantes a la transformada de Fourier de funciones continuas, sin embargo será necesario ver sus versiones discretizadas. Partiremos como dice el título de la sección, discretizando el tiempo, esto se relacionará con tomar muestras de una función en el tiempo de la misma forma que en la subsección 1.4.7.

Luego de tomar muestras, queremos saber cual será la transformada de Fourier de dicha función f_s (puede ver la ecuación 1.4.5). Aplicando directamente la definición de la transformada de Fourier de dicha función

$$\tilde{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(x)\, e^{-i2\pi ux} \mathrm{d}x$$

Y usando la propiedad del cedazo (ver la ecuación 1.4.1) quedará que (T es el tiempo entre muestras)

$$\tilde{F}(u) = \mathrm{DTFT}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, e^{-i2\pi unT} \tag{4.1.1}$$

Donde $\tilde{F}(u)$ es una función **continua** y **periódica** en u. Se usará en general la notación de la "tilde" encima de las funciones para mostrar que es una función periódica, en este caso la transformada es periódica por que la función f_s tiene una multiplicación por un *shah*, por lo que estará convolucionada con uno en frecuencia por la propiedad del producto (ver la subsección 1.4.8).

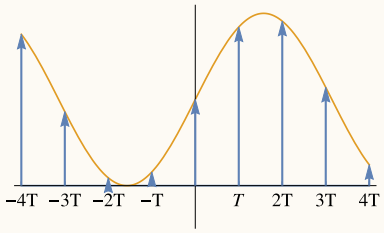
Como esta transformada es periódica en frecuencia, para obtener su inversa simplemente sacaremos la "serie de Fourier" a $\tilde{F}(u)$[1] y esto por dualidad será $f[-n]$, es decir (por las relaciones que se vieron con la FT en la subsección 3.1.2)

$$f[-n] = \frac{1}{U}\int_0^U \tilde{F}(u)\, e^{-i2\pi un/U} \mathrm{d}u$$

Donde U será el periodo de $\tilde{F}(u)$, que claramente estará relacionado con T de la siguiente forma $T = 1/U$. Ahora hacemos un cambio de variable $n' = -n$ y luego reemplazamos los $1/U$ por T, de lo que se deduce que

$$f[n] = \mathrm{DTFT}^{-1}\{\tilde{F}(u)\} = T\int_0^{1/T} \tilde{F}(u)\, e^{i2\pi unT} \mathrm{d}u \tag{4.1.2}$$

Recordatorio: Muestreo y definiciones



Una función que contiene las muestras cada intervalos de T será

$$f_s(x) = f(x)\cdot\frac{1}{T}\text{ш}\left(\frac{x}{T}\right)$$

Podemos además definir una función discreta

$$f[n] \overset{!}{=} f_s(nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Donde $\overset{!}{=}$ significará que la función es equivalente al módulo del impulso en dicho punto.

[1] veremos más adelante que esto será equivalente a la DFFT

4.1.2 Propiedades importantes y simetrías

Al ser la DTFT equivalente a la FT heredará varias de sus propiedades y las relaciones de simetría. Las más importantes serán las siguientes:

Cuadro 4.1.1: Resumen de propiedades.

Dualidad

$$\tilde{F}(u) \overset{\mathcal{F}}{\to} f[-n]$$

Escalamiento ($a \in \mathbb{Z}$)

$$f[an] \to \tilde{F}\left(\tfrac{u}{a}\right); \quad f_{(a)}[n] \to \tilde{F}(au)$$

Desplazamiento en tiempo

$$f[n-a] \to \tilde{F}(u)\, e^{-i2\pi u T a}$$

Desplazamiento en frec. ($a \in \mathbb{R}$)

$$f[n]\, e^{i2\pi n T a} \to \tilde{F}(u-a)$$

Convolución

$$f[n] *_l g[n] \to \tilde{F}(u)\, \tilde{G}(u)$$

Producto

$$f[n]\, g[n] \to T \int_0^{1/T} \tilde{F}(u-w)\tilde{G}(w)\mathrm{d}w$$

Parseval o Energía, ($\|f\|^2 = \|F\|^2$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 = T \int_0^{1/T} \left|\tilde{F}(u)\right|^2 \mathrm{d}u$$

Derivada en frecuencia

$$nf[n] \to \frac{i}{2\pi T} F'(u)$$

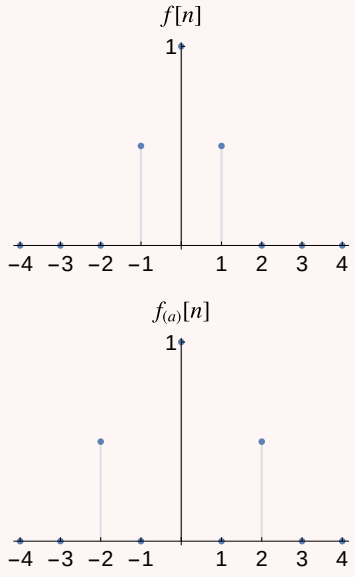
Como se dijo más arriba las condiciones de simetría serán las mismas que para la transformada de Fourier, por lo que no será necesario anotarlas.

Notación: Expansión en el tiempo

Sea una señal discreta en el tiempo $f[n]$, se define una versión expandida de ella en un factor $a \in \mathbb{Z}$ como

$$f_{(a)}[n] = \begin{cases} x[n/a] & \text{, si } n = ka \\ 0 & \text{, si no} \end{cases}$$

A continuación se presenta un ejemplo con $a = 2$



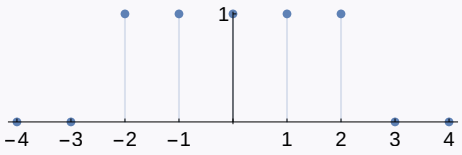
4.1.3 Ejemplo

Calcule la DTFT de la siguiente señal:

$$f[n] = \sqcap[n+2] - \sqcap[n-3]$$

Solución:

Primero que todo, como es habitual lo primero será observar la señal



De lo que vemos nos percatamos que la función será equivalente a

$$\begin{aligned} f[n] &= \sqcap\left[\frac{n}{2\cdot 2}\right] \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \delta[n-k] \end{aligned}$$

¿Algunos se preguntarán porqué no se usa la propiedad del escalamiento para seguir? esto no se hace de esta forma debido a que el factor que mul-

tiplica adentro **no es entero**. Por lo tanto simplemente se calculará por definición y usando la propiedad del desplazamiento en el tiempo (se asume $T = 1$)

$$\tilde{F}(u) = \sum_{k=-2}^{2} e^{-i2\pi un}$$

Agrupando los términos simétricos

$$\tilde{F}(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{2} \cos(2\pi ku)$$

No se demostrará acá, pero la función que se obtuvo puede reescribirse en términos de la función *asinc* (puede demostrarse por inducción) y en términos más generales

$$\begin{aligned} \sqcap\left[\frac{n}{2N}\right] \quad \to \operatorname{asinc}_N(u) \quad &= \frac{\sin[(2N+1)\pi u]}{\sin(\pi u)} \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2\pi ku) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(u - 2Nn) \end{aligned}$$

¡Esto es muy interesante! se pueden obtener relaciones trigonométricas complejas a partir de razonamientos relacionados a la transformada de Fourier.

4.2 DFFT: Transformada de Fourier de frecuencia discreta

4.2.1 Definición y notación

De una manera similar, para la DFFT queremos saber cual será la transformada de Fourier de una función periódica, para esto recordamos que una función de tiempo limitado $f(x)$, osea que es igual a cero para $x \notin [0, T]$, puede generar una función periódica de periodo T si ésta se convoluciona con un *shah* (recordar subsección 1.4.8).

Por lo tanto si partimos de ella, su transformada de Fourier por propiedad de convolución será (usando $U = 1/T$, que es la separación de las muestras en frecuencia)

$$\tilde{f}(x) = f(x) * \frac{1}{T}\text{ш}\left(\frac{x}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_s(u) = F(u)\,\text{ш}\left(\frac{u}{U}\right)$$

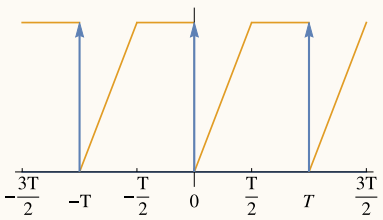
Si se discretiza la frecuencia se obtiene que

$$F[k] = UF(kU) \overset{!}{=} F(kU)\,\text{ш}(kU/U)$$

¿Por qué nos resulta familiar esta expresión?, porque es ¡exactamente la relación que existía entre la transformada de Fourier y los coeficientes de la serie! (ver ecuación 3.1.4). Por lo tanto resulta fácil deducir que la manera de calcular la

Reccordatorio: Funciones periódicas

Para una función $f(x)$ de *tiempo limitado*, osea que será igual a cero para $x \notin [0, T]$, se tendrá que una versión periódica de ella de periodo T será



Por lo tanto esto es equivalente a decir, usando la propiedad 1.4.4

$$\tilde{f}(x) = f(x) * \frac{1}{T}\text{ш}\left(\frac{x}{T}\right)$$

Donde el tilde encima de la función f denota su periodicidad.

DFFT es exactamente la misma que la serie, de hecho son lo mismo, por lo cual[2]

$$F[k] = \text{DFFT}\left\{\tilde{f}(x)\right\} = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(x)\, e^{-i2\pi kx/T}\mathrm{d}x \tag{4.2.1}$$

[2] Se recuerda nuevamente que $U = 1/T$.

Como ya es usual, para definir la transformada inversa simplemente se usará el principio de dualidad, esto significará que $F[k] \overset{\text{DTFT}}{\longrightarrow} \tilde{f}(-x)$

$$\tilde{f}(-x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]\, e^{-i2\pi kUx}$$

Es decir,

$$\tilde{f}(x) = \text{DFFT}^{-1}\{F[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]\, e^{i2\pi kUx} \tag{4.2.2}$$

Es importante no perder de vista que estas dos transformadas discretas, DTFT y DFFT **son equivalentes a la transformada de Fourier** (para dos casos particulares de funciones muestreadas y periódicas) y por eso se utiliza la propiedad de dualidad para demostrar ciertas cosas.

4.2.2 Propiedades importantes y simetrías

Al ser la DFFT equivalente a la FT heredará varias de sus propiedades y las relaciones de simetría. **¡Estás propiedades también se cumplirán para los coeficientes de la representación compleja de la serie de Fourier!** Las más importantes serán las siguientes:

Cuadro 4.2.1: Resumen de propiedades.

Dualidad	**Escalamiento** ($a \in \mathbb{R}$)
$F[k] \overset{\mathcal{F}}{\to} \tilde{f}(-x)$	$\tilde{f}(ax)$, con periodo $T/a \to F[k]$
Desplazamiento en tiempo	**Desplazamiento en frec.** ($a \in \mathbb{Z}$)
$\tilde{f}(x-a) \to F[k]\, e^{-i2\pi kUa}$	$\tilde{f}(x)\, e^{i2\pi xUa} \to F[k-a]$
Convolución	**Producto**
$\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(\xi)\,\tilde{g}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \to F[k]\,G[k]$	$\tilde{f}(x)\,\tilde{g}(x) \to F[k] *_l G[k]$
Parseval o Energía, ($\|f\|^2 = \|F\|^2$)	**Derivada**
$\frac{1}{T}\int_0^T \left\|\tilde{f}(x)\right\|^2 \mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|F[k]\|^2$	$\tilde{f}'(x) \to i2\pi kU\, F[k]$

Las condiciones de simetría serán las mismas que para la transformada de Fourier, por lo que no será necesario anotarlas.

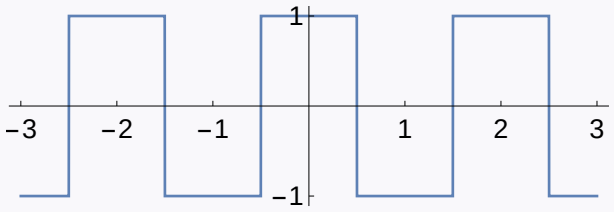
4.2.3 Ejemplo

Calcule la DFFT de

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sqcap (x-n)$$

Solución:

Primero que todo identificaremos que dicha función es periódica de $T = 2$



Luego su DFFT será (se le suma uno para que sea más fácil el calculo de la integral)

$$\text{DFFT}\left\{\tilde{f}(x)+1\right\} = \frac{1}{T}\int_{-1/2}^{1/2} 2e^{-i2\pi kx/T}\mathrm{d}x$$

Como es usual la parte impar de la exponencial compleja se anula debido a que se integra en un intervalo simétrico

$$\begin{aligned}\text{DFFT}\left\{\tilde{f}(x)+1\right\} &= \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{\sin(\pi kx)}{\pi k}\right|_{-1/2}^{1/2}\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\text{DFFT}\left\{\tilde{f}(x)+1\right\} = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2}$$

Entonces

$$F[k] = \text{sinc}(k/2) - \delta[k]$$

4.3 Ejercicios DTFT y DFT

1. Calcule la DTFT de las siguientes señales:

   a) $\delta[n-n_0]$.

   b) $a^n \sqcap[n] \quad ; \quad |a|<1$.

   c) $\sqcap[n-2] - \sqcap[n-6]$.

   d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$.

   e) $2^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\sqcap[-n]$.

   f) $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \le n \le 3 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

2. Evaluando la DTFT de alguna señal $x[n]$ en alguna frecuencia arbitraria, calcule:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ayuda: Puede serle útil recordar la propiedad de diferenciación en la frecuencia:

3. Encuentre, en la forma más simplificada posible,

$$g(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(m+\alpha)$$

Indicación: Recuerde que $\operatorname{sinc}^2(u)$ es la transformada de Fourier de $\wedge(t)$. Muestree adecuadamente la función para obtener un espectro periódico.

4. Sea $f(x)$ una función continua cuya Transformada de Fourier existe y se denota por $F(u)$. Para $\tau \in \mathbb{R}$ fijo se define la función $\varphi(t)$ como:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n\tau)$$

a) Decida qué Transformada de Fourier se debiese calcular para $\varphi(t)$: FT, DTFT ó DFFT. Justifique.

b) Calcule dicha Transformada de Fourier para $\varphi(t)$.

c) A partir de $\mathcal{F}\{\varphi(t)\}$ deduzca la Fórmula de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)$$

5. Sea $\text{DTFT}\{f[n]\} = \sqrt{\sin \pi u} + 2$. Calcule $f[n] *_\ell \sqcap[n]$ evaluada en $-\infty$ e ∞.

6. Una señal $f[n]$ es aproximada en términos de otra señal $x[n]$ sobre un intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$ como:

$$f[n] \approx cx[n] \quad ; \quad N_1 \leq n \leq N_2$$

a) Demuestre que la mejor expresión que minimiza la energía de la señal de error $e[k] = f[k] - cx[k]$ sobre el mismo intervalo es:

$$c = \frac{1}{\mathcal{E}\{x[n]\}} \sum_{n=N_1}^{N_2} f[n]x^*[n]$$

b) Para la definición anterior de c, ¿qué puede deducir de f y x si $c = 0$?

c) Demuestre que el conjunto de señales $\left\{e^{i2\pi runT}\right\}$ para $r = 1, 2, \ldots, N_0 - 1$ genera $c = 0$ entre ellas.

4.4 DFT: Transformada de Fourier discreta

4.4.1 Definición y notación

Notamos que la DTFT transforma funciones discretas en el tiempo a espectros periódicos en frecuencia y la DFFT toma señales periódicas en el tiempo y las transforma a discretas en frecuencia, pero del punto de vista computacional no podemos trabajar con este tipo de funciones, entonces ¿Cómo podremos trabajar con funciones que sean discretas en tiempo y frecuencia?

La respuesta a esta pregunta es tomar una función que sea periódica y discretizarla para que cumpla con los requerimientos en frecuencia. De este modo si se tiene una función de *tiempo limitado* $f(x)$, al igual que en secciones anteriores, y se vuelve una señal periódica de periodo NT, con N muestras en dicho periodo

$$\tilde{f}_s(x) = \tilde{f}(x)\frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{x}{T}\right) \rightarrow \tilde{F}_s(u) = F_s(u) * \text{Ш}(Tu)$$

Además, tenemos que

$$\tilde{f}(x) = f(x) * \frac{1}{NT}\text{Ш}\left(\frac{x}{NT}\right) \rightarrow F_s(u) = F(u)\,\text{Ш}\left(\frac{u}{U}\right)$$

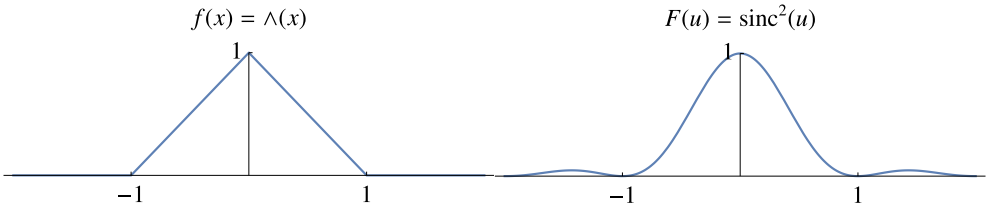
Donde $U = 1/NT$ es la separación de muestras en frecuencia, osea que

$$NUT = 1 \tag{4.4.1}$$

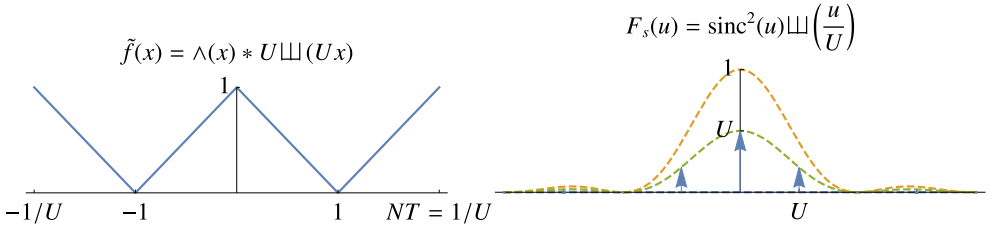
Por lo tanto, se tendrá que la transformada de Fourier de $\tilde{f}_s(x)$ será

$$\tilde{f}_s(x) = \left[f(x) * \frac{1}{NT}\text{Ш}\left(\frac{x}{NT}\right)\right]\frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{x}{T}\right) \rightarrow \tilde{F}_s(x) = \left[F(u)\,\text{Ш}\left(\frac{u}{U}\right)\right] * \text{Ш}(Tu)$$

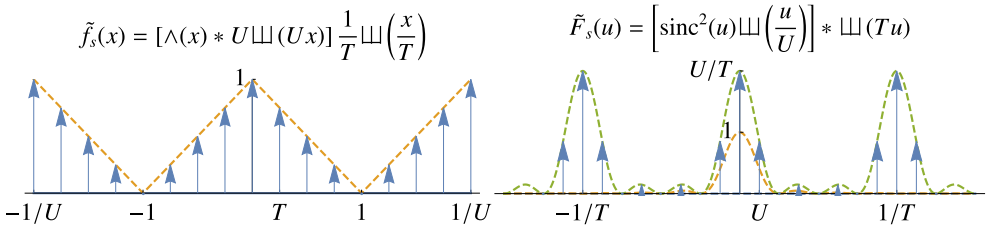
Veamos esto con un ejemplo, la función $f(x) = \wedge(x)$, cuya transformada de Fourier es $\text{sinc}^2(x)$



Se puede volver periódica de periodo $1/U = 2$ de modo que en frecuencia se muestrea cada $U = 1/2$



Si finalmente tomamos muestras cada $T = 1/4$ de modo que en frecuencia quede una función de periodo $1/T = 4$



Por lo que se obtiene una función periódica y discreta en frecuencia como estábamos buscando. Notamos también que la DFT de la señal se diferencia a la transformada de $f(x)$ por un factor de escala (olvidándonos claramente del efecto que genera la suma de versiones desplazadas de ella producto de la periodicidad en frecuencia), pero esto no será relevante y no implicará que la DFT es incorrecta, simplemente son factores que se producen por el muestreo y la periodicidad.

Ahora que entendemos el concepto general, simplemente hay que sacar la DFFT de una señal periódica y muestreada $\tilde{f}_s(x)$ cualquiera

$$\begin{aligned}\tilde{F}[k] &= \frac{1}{NT}\int_0^{NT}\tilde{f}_s(x)\,e^{-i2\pi kUx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{NT}\int_0^{NT}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(nT)\delta(x-nT)\right)e^{-i2\pi kUx}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Como solo habrá N muestras en el periodo, aplicando la linealidad para "meter la integral" dentro de la suma y usando la propiedad del cedazo se obtiene que

$$\begin{aligned}\tilde{F}[k] &= \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}(nT)\left(\int_0^{NT}\delta(x-nT)\,e^{-i2\pi kUx}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}(nT)e^{-i2\pi kn/N}\end{aligned}$$

Por definición se tiene que $\tilde{f}[n] = \tilde{f}(nT)$, es decir

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}[n]\,e^{-i2\pi kn/N}$$

Sin embargo, no siempre se conocerá el tiempo de muestreo, porque este tipo de funciones se tratarán en el computador como un arreglo de largo N, por lo que se asumirá $T = 1$ para llegar a

$$\tilde{F}[k] = \mathrm{DFT}\left\{\tilde{f}[n]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}[n]\,e^{-i2\pi kn/N} \tag{4.4.2}$$

Para sacar la transformada discreta de Fourier inversa se realiza un procedi-

miento completamente análogo pero con la DTFT inversa y se obtiene que

$$\tilde{f}[n] = \text{DFT}^{-1}\left\{\tilde{F}[k]\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}[k]\, e^{i2\pi kn/N} \tag{4.4.3}$$

4.4.2 Forma matricial

El procedimiento anterior puede verse como el producto punto entre un vector de largo N llamado $\boldsymbol{f}$ con una matriz cuadrada $\mathcal{W}$ cuya definición es

$$w_{kn} = \frac{1}{N} e^{-i2\pi kn/N}, \quad k, n \in \{0, \ldots, N-1\} \tag{4.4.4}$$

De modo que el vector $\boldsymbol{F}$ será la DFT del vector $\boldsymbol{f}$ al realizar la siguiente operación

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{W}\boldsymbol{f} \tag{4.4.5}$$

Es de gran importancia notar que:

- La primera fila y columna de $\mathcal{W}$ siempre estará llena de unos.
- La matriz $\mathcal{W}$ es simétrica, debido que $w_{kn} = w_{nk}$.
- No será necesario calcular las columnas n-ésimas de la matriz en las que $\tilde{f}[n] = 0$.

Se tendrá entonces de manera inmediata que la transformada inversa puede representarse con una matriz $\mathcal{W}^{-1} = N\left(\mathcal{W}^*\right)^{\text{T}}$[3], porque $w_{nk}^{-1} = e^{i2\pi kn/N}$. De este modo si se define la operación † como la matriz traspuesta-conjugada se tiene que

$$\boldsymbol{f} = N\mathcal{W}^\dagger \boldsymbol{F} \tag{4.4.6}$$

A partir de esto se puede deducir el **teorema de Parseval**, simplemente hay que multiplicar por $\boldsymbol{F}^\dagger$ por izquierda en la ecuación 4.4.5

$$\boldsymbol{F}^\dagger \boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}^\dagger \mathcal{W}^\dagger \mathcal{W} \boldsymbol{f}$$

Como $\mathcal{W}^\dagger = \frac{1}{N}\mathcal{W}^{-1}$ la operación $\mathcal{W}^\dagger\mathcal{W} = \frac{1}{N}\mathbb{I}$, entonces

$$\boldsymbol{F}^\dagger \boldsymbol{F} = \frac{1}{N}\boldsymbol{f}^\dagger \boldsymbol{f}$$

Es decir,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|\tilde{f}[n]\right|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} \left|\tilde{F}[k]\right|^2 \tag{4.4.7}$$

[3] Donde la conjugación es para cambiar el signo del exponente de la exponencial compleja y se aplica la trasposición para que las columnas de la nueva matriz conicidad con los k's del vector $\boldsymbol{F}$.

Recordatorio: A^{T}, A^{-1} y $\boldsymbol{a}^*$

Recordamos algunas propiedades de las matrices inversas y traspuestas

$$\begin{aligned} (AB)^{\text{T}} &= B^{\text{T}}A^{\text{T}} \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

Además, para un número complejo z cualquiera se tiene que $|z|^2 = zz^*$. Esto puede extenderse para el producto punto entre vectores $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^N$ como

$$\boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2$$

4.4.3 Ejemplo

Calcule la DFT de $\tilde{g}[n] = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Primero nos damos cuenta que el largo del periodo de dicha función es $N = 4$, de este modo calculamos la matriz $\mathcal{W}$ y multiplicamos por $\boldsymbol{g}$.
Como $N = 4$ eso significará que para cada elemento de la primera columna se avanzará en $\pi/4$ en la circunferencia unitaria y para la segunda en $\pi/2$, es decir

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & -1 & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & -1 & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que será equivalente a

$$G[k] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notamos que $\tilde{g}[n] = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es $\tilde{f}[n] = \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 \end{pmatrix}$ estirada en un factor 2. La DFT de $\boldsymbol{f}$ es

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Que es igual a

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 \end{pmatrix}$$

Por la propiedad de estiramiento $\tilde{f}_{(2)}[n] \to \frac{1}{2}F[k|2]$, que es exactamente el resultado obtenido en la primera parte de esta solución. ¡Las propiedades funcionan!

4.4.4 Convolución cíclica

De manera similar a la convolución vista en secciones anteriores a la transformada de Fourier, la convolución cíclica será la encargada de tener una propiedad relacionada a la DFT. Se tenemos dos señales periodicas $\tilde{f}[n]$ de largo P y $\tilde{g}[n]$ de largo Q se tiene que

$$\tilde{f}[n] * \tilde{g}[n] = \sum_{m=0}^{Q-1} f[n-m|P]\, g[m] \tag{4.4.8}$$

donde $[x|P]$ denota el índice x módulo P.

4.4.5 Ejercicio

Se tienen dos señales periodicas $\tilde{f}[n] = (\underline{a}, b, c)$ y $\tilde{g}[n] = (\underline{d}, e, f)$, determine $\tilde{f}[n] * \tilde{g}[n]$.

Solución:

Este ejercicio fue escogido para eliminar las dudas que genera el cálculo de la convolución cíclica. Como sabemos al ser señales periódicas

$$(a,b,c)*(d,e,f) \quad = \quad \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, no es tan claro que pasará en el caso que los largos no sean iguales. Si tenemos $\tilde{f}[n] = (\underline{a}, b, c)$ y $\tilde{g}[n] = (\underline{d}, e, f, g)$ podemos acudir a la definición 4.4.8 para obtener que

$$(a,b,c)*(d,e,f,g) \quad = \quad \begin{pmatrix} a & c & b & a \\ b & a & c & b \\ c & b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix}.$$

Es decir, deberemos invertir la señal y extender periódicamente.

4.4.6 Propiedades importantes y simetrías

Las propiedades más importantes de la DFT serán las siguientes:

Dualidad

$$\tilde{F}[k] \to \frac{1}{N}\tilde{f}[-n]$$

Parseval, $(\|f\|^2 = N\|F\|^2)$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|\tilde{f}[n]\right|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} \left|\tilde{F}[k]\right|^2$$

Cuadro 4.4.1: Resumen de propiedades.

Desplazamiento en tiempo $(a \in \mathbb{Z})$

$$\tilde{f}[n-a] \to \tilde{F}[k]\, e^{-i2\pi k a/N}$$

Desplazamiento en frec. $(a \in \mathbb{Z})$

$$\tilde{f}[n]\, e^{i2\pi n a/N} \to \tilde{F}[k-a]$$

Convolución ($\tilde{f}$ **y** $\tilde{g}$ **del mismo largo**)

$$\tilde{f}[n] * \tilde{g}[n] \to N\tilde{F}[k]\,\tilde{G}[k]$$

Producto ($\tilde{f}$ **y** $\tilde{g}$ **del mismo largo**)

$$\tilde{f}[n]\,\tilde{g}[n] \to \tilde{F}[k] * \tilde{G}[k]$$

Estiramiento (ver notación 4.1.2, $a \in \mathbb{Z}$**)**

$$\tilde{f}_{(a)}[n] \to \frac{1}{a}\tilde{F}[k|N], \text{ de largo } aN$$

Las condiciones de simetría serán las mismas que para la transformada de Fourier, por lo que no será necesario anotarlas.

4.5 Ejercicios

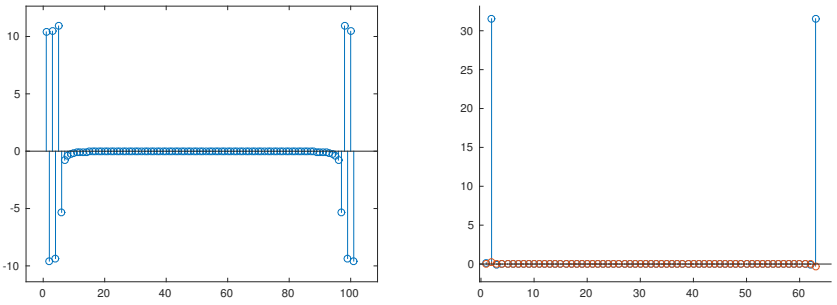
1. Encuentre la DFT de las siguientes señales, trate de **usar propiedades**:

a) $(1,-1)$.
b) $(-1,1)$.
c) $(1,1,0,0)$.
d) $(1,-1)*(1,1,0,0)$.
e) $(1,0,-1,0)$.

2. Su buen amigo Matías no entiende porque a veces se tiene que usar *fftshift* y a veces no para que la *fft* de una señal resulte en "el resultado correcto", el tiene los siguientes ejemplos de código con su resultado:

```
1) x=-5:.1:5; f = sinc(x); F = fft(f); stem(F)% Solo muestra Re{F[k]}
2) x=0:.1:2*pi; f = cos(x); F = fft(f); hold on,
 stem(real(F)), stem(imag(F))
```

Figura 4.5.1: (izq.) Resultado código 1) y (der.) resultado código 2).



¿A qué se debe que el resultado de 1) quede un *rect* con valores alternantes y que el resultado de 2) sea correcto? ¿Cómo se puede corregir 1)?

3. Para un par de funciones periódicas $\tilde{f}[n]$ de largo N y $\tilde{g}[n]$ de largo $2N$ cuyas DFT son $\tilde{F}[k]$ y $\tilde{G}[k]$ respectivamente. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Para $\tilde{g}[n] = [f_0, 0, f_1, 0, \ldots, f_n, 0]$:

$$\tilde{G}[k] = \frac{1}{2}\tilde{F}[k|N]$$

Donde $k|N$ significa k módulo N, osea que $(k < N)\,|N = k$, $N|N = 0$, $(N+1)\,|N = 1$, etc.

b) Para $\tilde{g}[n] = [f_0, \ldots, f_n, f_0, \ldots, f_n]$:

$$\tilde{G}[k] = \begin{cases} \tilde{F}\,[k/2] & \text{, si } k\text{es par} \\ 0 & \text{, si no} \end{cases}$$

4. Si $\check{f}\,[n] = \begin{pmatrix} \underline{a} & 0 & b & 0 & c & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ tiene DFT con valores conocidos:

$$\check{F}\,[k] = \begin{pmatrix} \check{A} & \check{B} & \check{C} & \check{D} & \check{E} & \check{F} & \check{G} & \check{H} \end{pmatrix}.$$

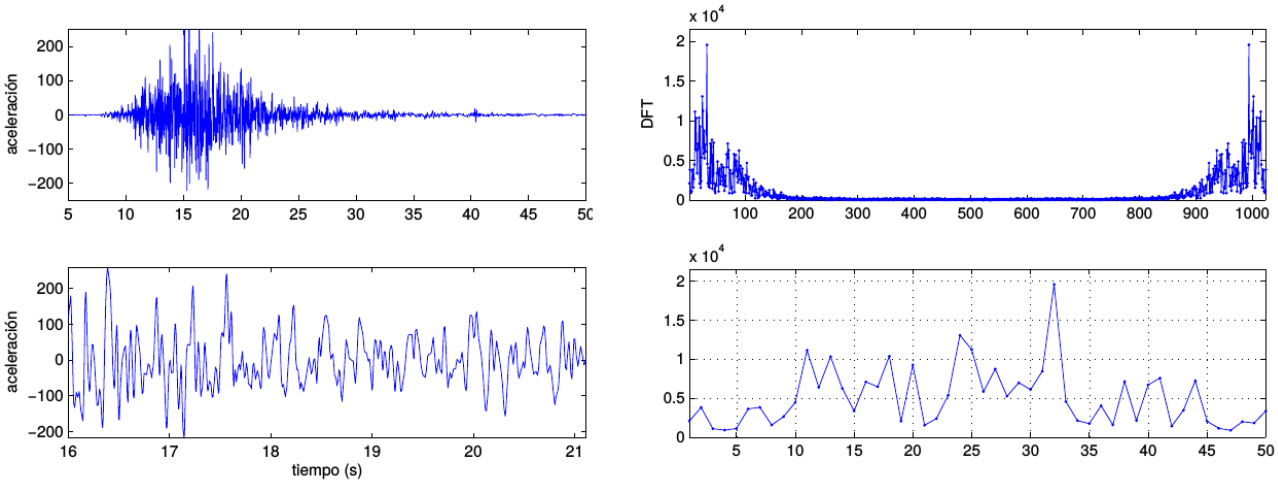
Entonces, ¿cuál es la DFT de $\begin{pmatrix} \underline{d} & c & b & a \end{pmatrix}$?

5. Se define una transformada discreta en forma matricial como $\boldsymbol{F} = \mathcal{W}\boldsymbol{f}$. Esta transformada cumple con el siguiente teorema de Rayleigh o Parseval:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{F}[k]|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{f}[n]|^2$$

¿Cuál es la relación entre la matriz inversa $\mathcal{W}^{-1}$ y la transpuesta conjugada $\mathcal{W}^{\dagger}$, ?

6. Las figuras de la izquierda muestran el registro de un acelerómetro para el terremoto de Loma Prieta, California (dirección Norte-Sur, según demo de Matlab). Los datos fueron muestreados a 200 Hz. Arriba está el registro completo y abajo un intervalo de interés de 1024 muestras. Las figuras de la derecha muestran la magnitud de la DFT tomada a los 1024 puntos de la región de interés. Abajo se grafica un detalle con las muestras 1 a la 50. ¿Cuál es la frecuencia (en Hz) con más energía? Indique aproximadamente la frecuencia de Nyquist para estos datos.



7. Interesa filtrar con $h[n]$ la señal $x[n]$, encontrar $y[n] = x[n] *_l h[n]$. Los recursos computacionales son escasos y la señal $x[n]$ es muy larga, por lo que necesita un algoritmo que lo haga por partes, separando al señal por tramos. El largo de $h[n]$ es M. Defina ese algoritmo considerando que cuenta con las siguientes rutinas computacionales. No existe una rutina para hacer convoluciones lineales, por lo que hay que emplear la convolución cíclica en el dominio de Fourier.

Rutina	Operación	Explicación
$F = DFT(f)$	$F[k] = DFT\{f[n]\}$	Calcula la DFT
$f = IDFT(F)$	$f[n] = IDFT\{F[k]\}$	Calcula la DFT inversa
$h = MULT(f, g)$	$g[n] = f[n]g[n]$	Multiplica dos secuencia de mismo largo
$g = PAD(f, N)$	$g[n] = (f[n], 0, \ldots)$	Acolcha la secuencia hasta un largo N
$g = CUT(f, p, L)$	$g[n] = f[n + pL]$	Extrae un tramo de largo L en pL
$g = PUT(g, f, p, L)$	$g[pL + n] = f[n]$	Coloca f, de largo L, en la posición pL
$g = SUM(g, f, N, p, L)$	$g[pL + n] = g[pL + n] + f[n]$	Suma f, de largo N, a g en la posición pL
$g = INIT(f)$	$g[n] = 0 \cdot f[n]$	Vector cero del mismo largo que f

8. Un alumno sugirió que la versión correcta de la propiedad de la suma de la DFT para $\tilde{f}[n] \to \tilde{F}[k]$, es

$$\sum_{j=0}^{n} \tilde{f}[j] \to \frac{\tilde{F}[k] - \tilde{F}[0]}{1 - e^{-i2\pi k/N}} \quad \text{para } k \neq 0.$$

¿Es correcta esta sugerencia? Demuestre su respuesta (ya sea positiva o negativa) para el caso $N = 4$.

5 Transformada de Laplace

5.1 Breve introducción

La transformada de Laplace se ve en cursos de ecuaciones diferenciales al ser capaz de transformar las **ecuaciones diferenciales** en **ecuaciones algebraicas**. Esto se debe a una de sus propiedades fundamentales[1]

$$\mathscr{L}_1\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x\right)\right\} = sF\left(s\right) - f\left(0\right) \quad .$$

[1] En realidad esta es una propiedad de la transformada de Laplace unilateral que se explicará en posteriores secciones.

Siendo de cierta forma un vínculo con el método desarrollado por Heaviside para justificar el reemplazo del operador $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ por uno s[2], al generar la abstracción de un cambio de dominio.

[2] Él le llamaba p.

En su momento a nadie le parecía dicho método (aun que funcionara) por su falta de justificación matemática, sin embargo fue demostrado por Bromwich cerca de la muerte del Heaviside usando la mismísima transformada de Laplace.

Aun que como veremos la teoría que justifica la transformada de Laplace y su inversa es bastante más complicadas de lo que parece, por lo que se dejará detallada a fondo en la sección del apéndice relacionada con funciones de variable compleja (ver subsección 6.2.1).

5.2 Transformada bilateral de Laplace

5.2.1 ¿Y Fourier?

La transformada de Laplace es útil debido a que es capaz de abarcar un espacio de funciones mayor a el de la transformada de Fourier, al tener un término $e^{-\sigma t}$ con $\sigma \in \mathbb{R}$ que es capaz de hacer converger la transformada para funciones de crecimiento exponencial. De hecho se tiene que

$$\mathscr{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \mathscr{F}\left\{f\left(t\right)e^{-\sigma t}\right\} \quad . \tag{5.2.1}$$

[3] En especial en Ingeniería Eléctrica que las respuestas suelen ser exponenciales como: en la carga y descarga de capacitores, etc.

Este hecho hace sumamente práctica la TL para analizar la estabilidad de sistemas LTI[3], además de ser más cómodo utilizar la **variable compleja**

$$s = \sigma + i2\pi u \quad , \tag{5.2.2}$$

en vez de escribir continuamente $i2\pi u$.

5.2.2 Definición y notación

[4] Sin decirle a nadie.

Como la transformada de Laplace se suele utilizar para problemas cuya variable independiente es el tiempo empecé a usar[4] la variable t en vez de x. Luego si definimos las bases $\left\{e^{st}\right\}_{s\in\mathbb{C}}$, la proyección de una función en dicha base estará dada por

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t, \quad \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta \quad .$$

Es importante notar que ahora el argumento de la función $F(s)$ es un número complejo s, por lo que se dirá que obtendremos una **función de variable compleja** (ver subsección 6.2.1). Además se tendrá que dicha operación debe estar definida en una región de convergencia, como se verá en la subsección siguiente, que solo dependerá de la **parte real del argumento.**

5.2.3 Región de convergencia

Muy bien, nos ahorramos unos cuantos $i2\pi u$, sin embargo esto tiene una pequeña desventaja ¡ahora nos tendremos que preocupar en la región del plano complejo s en la que converge la transformada de Laplace!

Se podrán estar preguntando ¿por qué?, pues toda la culpa está en que al cambiar nuestras variables sin querer hicimos que la transformada de Laplace **no fuera inyectiva**. Lo que será muy importante para definir una transformada inversa.

Por ejemplo veamos el siguiente ejemplo ($a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} e^{-at}\sqcap(t) &\rightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a \\ -e^{-at}\sqcap(-t) &\rightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a. \end{aligned}$$

En este caso las dos funciones tienen la misma transformada de Laplace, sin embargo poseen **distinta región de convergencia** y de hecho si quisiéramos realizar la operación inversa no podríamos decidir de cual de las dos funciones provino, por lo que de ahora en adelante cada vez que se pida calcular una transformada de Laplace será igualmente importante especificar la ROC que la expresión $F(s)$.

5.2.4 Transformada inversa de Laplace

La transformada inversa es bastante fea

$$f(t) = \frac{1}{i2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\, e^{st}\mathrm{d}s, \quad \sigma \in \mathrm{ROC} \quad . \tag{5.2.3}$$

Que es una integral en un contorno del plano complejo, ¡aaa no entiendo nada! En realidad la derivación de dicha fórmula no es tan complicada si acudimos a la relación (5.2.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f(t)\,e^{-\sigma t}\right\} &= F(s) \quad \Big/\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}\\ f(t)\,e^{-\sigma t} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i2\pi u)\,e^{i2\pi u t}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Solo falta multiplicar por $e^{\sigma t}$ a ambos lados y hacer un cambio de variable

$$s=\sigma+i2\pi u \Rightarrow \mathrm{d}s = i2\pi \mathrm{d}u$$

y se obtiene inmediatamente la fórmula de inversión de Laplace presentada en al ecuación (5.2.3).

Sin embargo, en un sentido práctico esta expresión es inútil, por lo que se tendrá que aplicar un teorema que nos facilitará la vida: El Teorema de los Residuos (ver subsección 6.2.10). Éste dice que

$$\frac{1}{i2\pi}\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{Res} g(z_n)$$

y para el cálculo de la transformada inversa nos interesará en particular cuando $g(s)=F(s)\,e^{st}$, de lo que se obtiene que

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{Res} F(s_n)\,e^{s_n t}\,.$$

Siendo N el número de polos con sus respectivas multiplicidades y $\operatorname{Res}\cdot$ el residuo que corresponde al mismo.

5.2.5 Para curiosos: ¿Por qué se puede aplicar el teorema de los residuos?

Este teorema es aplicable en este contexto porque la integral de Bromwich es equivalente a una integral en un contorno cerrado, que no es para nada obvio, pero se puede observar teniendo una pequeña abstracción.

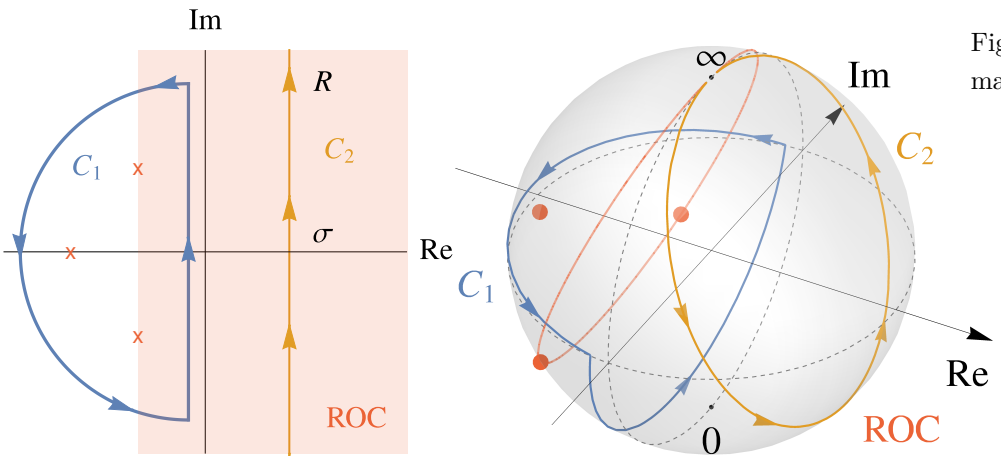


Figura 5.2.1: Contornos complejos y su mapeo en la esfera de Rienmann.

Podemos representar la curva C_2 como una curva cerrada si mapeamos el plano complejo a una esfera, de tal forma que en el hemisferio sur este el 0 complejo y en el norte el ∞ complejo.

Residuos

Si se tiene una función en variable compleja $f(z)$, la integral en un contorno que encierra a un polo simple será

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{i2\pi}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Utilizando la fórmula integral de Cauchy se tendrá que $\operatorname{Res} f(a)$ es

$$\lim_{z\to a} f(z)\,(z-a)$$

y para el caso que el polo sea de orden n, usaremos la versión generalizada donde el $\operatorname{Res} f(a)$ es

$$\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[f(z)\,(z-a)^n\right].$$

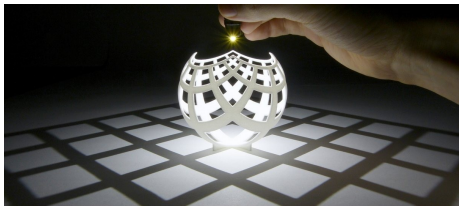


Figura 5.2.2: Mapeo de los números complejos a la esfera de Rienmann. Créditos a Henry Segerman.

¿Cómo? para imaginárselo es mejor compararlo a algo que sí conocemos, la luz. El mapeo que se genera es equivalente al rayo que conecta un punto de la esfera con el plano en la Figura 5.2.2

En esta se nota claramente la correspondencia de los puntos de la esfera de Rienmann con el plano complejo que en ese caso sería la mesa en la que es proyectada dicha estructura.

5.3 Transformada unilateral de Laplace

6 Apéndice

Las secciones siguientes trataran de cubrir un poco de la teoría matemática necesaria para comprender de manera adecuada y a profundidad el análisis de señales, debido que entiendo que a algunos les pica el bichito matemático y quieren averiguar un poco más del tema. Siendo la primera sección principalmente utilizada en todo lo referente a Fourier y la segunda más enfocada a comprender el concepto de una función de variable compleja para la transformada de Laplace y Z.

6.1 Matemáticas interesantes

6.1.1 Funciones y espacios

Las señales son modeladas por funciones medibles. Una función o señal f se dice integrable si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. El espacio de funciones integrables se llama $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R})$. Dos funciones f y g son iguales en $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R})$ si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|\,dx = 0.$$

Esto significa que la función $\boldsymbol{f}$ **y** $\boldsymbol{g}$ **pueden diferir en un número infinito de puntos** mientras la medida del set de puntos sea 0 (como todos los racionales por ejemplo[1]). Si se cumple esto se dirá que las funciones son iguales *casi en todas partes*.

[1] De hecho cualquier conjunto numerable tiene medida cero, es decir cualquier conjunto que pueda establecer una biyección con $\mathbb{N}$.

Éste concepto tiene relevancia en el caso del delta de Dirac (ver sección 1.4), podemos en este caso definir una familia de funciones $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *casi en todas partes.*

6.1.2 Espacios de Banach y Hilbert

Por otro lado las señales se pueden considerar como vectores. Para definir una distancia, trabajaremos en un espacio vectorial $\boldsymbol{H}$ que admita una norma. Una **norma** satisface las siguientes propiedades:

- Positividad: $\forall f \in \boldsymbol{H}$, $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
- Ponderación por escalar: $\forall a \in \mathbb{C}$, $\|af\| = |a|\,\|f\|$.
- Desigualdad triangular: $\forall f, g \in \boldsymbol{H}$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Con esa norma, la convergencia de $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $f(x)$ en $\boldsymbol{H}$ significa que[2]

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

[2] Para garantizar que $f_n \in \boldsymbol{H}$ cuando tomamos el límite se pedirá que $\boldsymbol{H}$ posea la propiedad de completitud. Un espacio es completo si toda *secuencia Cauchy* converge a un elemento de él, donde una *secuancia Cauchy* es tal que $\forall \epsilon > 0$ existen n y p suficientemente grandes tales que $\|f_n - f_p\| < \epsilon$.

Ahora se define un **espacio de Banach** $\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R})$ como el espacio de funciones f medibles en $\mathbb{R}$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

De este modo un espacio de Banach se define a través de la norma que podamos diseñar.

Sin embargo, para tratar bien las señales como vectores nos falta aún un producto punto. El **espacio de Hilbert** es un espacio de Banach con un producto punto. El **producto punto** entre dos señales $\langle f, g\rangle$ debe cumplir las siguientes propiedades:

- Linealidad: $\forall a, b \in \mathbb{C},\ \langle af_1 + bf_2, g\rangle = a\langle f_1, g\rangle + b\langle f_2, g\rangle$.
- Simetría hermitiana: $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle^*$.
- Positividad: $\langle f, f\rangle \geq 0$ y $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Lo interesante es que se puede ver que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ es una norma. De ahí podemos deducir de la positividad la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|,$$

que cumplirá la igualdad cuando f y g sean linealmente dependientes.

6.1.3 Ejemplo: Señales continuas (Transformada de Fourier)

Para dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$, un producto punto puede definirse por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g^*(x)\, \mathrm{d}x.$$

Donde la norma resultante será

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x}.$$

El espacio $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$ de funciones de energía finita es también un espacio d Hibert y por lo tanto dos funciones serán igual si

$$\|f(x) - g(x)\| = 0,$$

lo que significa que $f(x) = g(x)$ en casi todas partes para $x \in \mathbb{R}$.

Notamos que si dichas funciones son perióodicas de periodo T el producto punto puede definirse para $\boldsymbol{L}^2([0, T])$ como

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(x)\, \tilde{g}^*(x)\, \mathrm{d}x.$$

Donde la constante no afectará en que el producto interno cumpla sus caracteristicas y es un método de normalización simplemente.

6.1.4 Ejemplo: Señales discretas (Transformadas de Fourier discretas)

El producto punto para dos señales discretas $f[n]$ y $g[n]$ puede definirse

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, g^*[n].$$

Esta definición, conlleva a la norma en $\boldsymbol{l}^2(\mathbb{Z})$:

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x)|^2}.$$

Notamos, al igual que en el ejemplo anterior, que para funciones periodicas de periodo N puede definirse el producto interno para $\boldsymbol{l}^2(\{0,\dots,N-1\})$ como

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]\, \tilde{g}^*[n].$$

Donde la constante no afectará en que el producto interno cumpla sus caracteristicas y es un método de normalización simplemente.

6.1.5 Bases en espacios de Hilbert

Una familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$ es ortogonal si

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

Si para cualquier $f \in \boldsymbol{H}$ existen coeficientes C_n tales que

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n \right\| = 0,$$

entonces $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama una *base ortogonal*[3] *de* $\boldsymbol{H}$. Esto implicará necesariamente que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n \quad . \tag{6.1.1}$$

[3] La base será ortonormal si $\|\varphi_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como dato curioso, se dice a un espacio de Hilbert que admite una base ortogonal un espacio separable.

6.1.6 Propiedades dentro de un espacio de Hilbert

Para $f, g \in \boldsymbol{H}$, con $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal, si tomamos el producto punto con g en la ecuación 6.1.1 se obtiene el **teorema de Parseval**

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_n \rangle^* \quad , \tag{6.1.2}$$

y en el caso de que $f = g$ se obtiene la **fórmula de Plancherel**

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \quad . \tag{6.1.3}$$

Notemos que en el caso de la transformada de Fourier, la representación de f en las bases ω^u es igual a

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \omega^u \rangle\, \omega^u \mathrm{d}u.$$

Entonces, obtendremos las propiedades anteriores en el caso de Fourier continuo reemplazando las sumatorias por la integral de arriba, es decir

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \omega^u\rangle \langle g, \omega^u\rangle^* \, \mathrm{d}u,$$

[4] lo que implicará que el teorema de Parseval es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, G^*(u)\, \mathrm{d}u$$

y la fórmula de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \, \mathrm{d}u \quad .$$

[4] Recordemos que $F(u) = \langle f, \omega^u\rangle$.

6.1.7 Diracs

El delta de Dirac es útil para realizar la transición de funciones continuas a discretas. El cálculo simbólico con Diracs simplifica cálculos sin preocuparse con problemas de convergencia. Esto es justificado por la teoría de distribuciones. Un Dirac δ tiene un soporte reducido a $x = 0$ y asocia a una función continua cualquiera a su valor en $x = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = f(0).$$

Convergencia débil. Un Dirac puede ser obtenido a través de "apretar" una función integrable tal que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Sea $g_s(x) = \frac{1}{s} g\left(\frac{x}{s}\right)$. Para cualquier función continua $f(x)$

$$\lim_{s\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_s(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{6.1.4}$$

De este modo un Dirac puede ser formalmente definido como el límite $\delta = \lim_{s\to 0} g_s$, que debe ser entendido en el sentido de la ecuación (6.1.4). A esto se le llama *convergencia débil*. El Dirac no es una función debido que es cero para $t \neq 0$, la parte derecha es solo una notación simbólica que significa aplicar un Dirac en una función continua.

Las distribuciones en general se definen en un espacio $\boldsymbol{C}_0^{\infty}$[5] de *funciones de prueba* que son infinitamente continuamente diferenciables con soporte compacto, es decir se vuelven cero como la función $\sqcap(x)$, $\wedge(x)$, $\Psi(x)$[6], etc.

Cálculos simbólicos. La integra simbólica en un Dirac es una notación útil debido a que tiene las mismas propiedades que una integral usual, incluyendo cambios de variable e integración por partes. Un Dirac trasladado cumplirá que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \delta(\xi - x)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \delta(x - \xi)\, \mathrm{d}t = f(x).$$

Esto significa que $f(x) * \delta(x) = f(x)$, de manera similar

$$f(x) * \delta(x - a) = f(x - a) \quad .$$

[5] Estas se usan como funciones suaves de ventaneo o como particiones suaves de la unidad.

[6] $\Psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \sqcap(x/2)$.

Un Dirac $\delta(x-a)$ puede ser multiplicado por una función continua y como este será cero $x \neq a$

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a).$$

La derivada del Dirac es definida a partir de una integración por partes. Si $f \in \boldsymbol{C}^1$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = -f'(0).$$

Así la derivada n-ésima de δ para $f \in \boldsymbol{C}^n$ será

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0) \quad .$$

Con estas propiedades será trivial darse cuenta que la transformada de Fourier del Dirac es $\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1$ y después de una traslación

$$\mathcal{F}\{\delta(x-a)\} = e^{-i2\pi ua}.$$

La transformada de Fourier de la función *shah* será $\text{ш}(x) \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi un}$. Entonces, por la formula de Poisson se tendrá que

$$\mathcal{F}\{\text{ш}(x)\} = \text{ш}(x).$$

Por supuesto que estas igualdades deben entenderse en el sentido de la ecuación (6.1.4).

Formula de Poisson

Para una función $f(x)$ con transformada de Fourier $F(u)$, la formula de Poisson dice que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k).$$

6.2 Variable Compleja

6.2.1 Función de variable compleja

Se define una función de variable compleja $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como un mapeo entre el plano complejo $x+iy$ y $u+iv$ de manera que

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad .$$

Es claro ver que hay una conexión entre esta definición y una interpretación de esta como un campo vectorial bidimensional $\boldsymbol{f}(x,y) = (u,v)$, de lo que se explica la similaridad entre muchos resultados obtenidos entre los dos.

6.2.2 Función diferenciable (analítica)

Si la función $f(z)$ es **diferenciable o analítica**[7] entonces el siguiente límite debe existir

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad .$$

[7] Si $f(z)$ es diferenciable en a, entonces $f^{(n)}(a)$ existe, por lo mismo existirá una expansión en serie de potencia que asegura que sea analítica.

Vemos que la condición de diferenciabilidad es bastante fuerte, debido a que hay infinitas maneras de acercarse tal que $\Delta z \to 0$ y en todas ellas el límite debe ser el mismo.

Si se eligen dos caminos particulares $\Delta z = \Delta x$ y $\Delta z = i\Delta y$ veremos que

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad \text{y} \quad f'(z) = -iu_y + v_y.$$

[8] Como ejercicio puede demostrar que: $f(z) = z^2$ es analítica, $f(z) = 1/z$ es analítica $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y que $f(z) = z^*$ no lo es, osea que no tiene derivada (las derivadas direccionales existen, pero no son las mismas).

[8] De lo que se deducen las **condiciones de Cauchy-Rienman**, es decir $f(z)$ es diferenciable si y solo si

$$u_x = v_y \quad y \quad u_y = -v_x \quad .$$

Estas son condiciones necesarias y suficientes, entonces si recordamos un poco de lógica,

$$f(z) \text{ analítica} \iff u_x = v_y \quad y \quad u_y = -v_x$$

Como el **contrarrecíproco siempre es cierto** se deduce que

$$u_x \neq v_y \quad o \quad u_y \neq -v_x \iff f(z) \text{ no es analítica.}$$

6.2.3 Ejemplo: Ecuación de Laplace

Sea la ecuación de Laplace (modelando temperatura en estado estacionario)

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}y^2} = 0,$$

se tiene que para $T(z) = u + iv$ analítica las condiciones de Cauchy-Rienman asegurarán que tanto la $\mathrm{Re}\{T\} = u$ como la $\mathrm{Im}\{T\} = v$ serán solución de esta.

Lo interesante será que las soluciones de la ecuación de Laplace deberán ser partes reales e imaginarias de funciones analíticas, que no son muchas, por lo que conociendo algunas podremos solucionar ecuaciones físicas y por lo tanto predecir resultados en el mundo real.

6.2.4 Mapeo conforme

Si retomamos la idea generada en la subsección 6.2.1, vemos que para $\boldsymbol{f}(x, y) = (u, v) \iff f(z) = u + iv$ el mapeo

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}\right\}$$

será **localmente invertible** si el jacobiano de la transformación es distinto de cero, es decir $u_x v_y - u_y v_x \neq 0$. Notamos que si $f(z)$ es analítica $u_x v_y - u_y v_x = |f'(z)|^2$, es decir el mapeo será invertible solo si además la derivada no es cero.

Hay mapeos "más bonitos" que otros, con esto me refiero a un caso particular: el **mapeo es conforme**. Éste preserva ángulos entre curvas, es decir, si dos curvas se intersectan en el dominio con cierto ángulo, las curvas imágenes se intersectarán con el mismo ángulo siempre que $f'(z_0) \neq 0$ donde z_0 es la intersección entre las curvas originales.

Lo interesante de todo esto es que si $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ el mapeo será conforme y adquirirán esta condición "bonita".

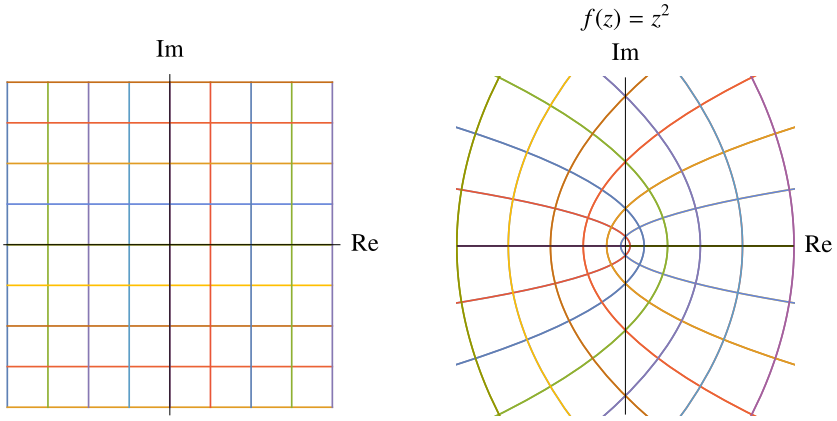


Figura 6.2.1: Mapeo conforme: $f(z) = z^2$ no es analítica en $z = 0$, por lo mismo las curvas no cumplirán que su ángulo se intersectará en un ángulo recto en dicho punto, pero si en todos los demás.

6.2.5 Ejemplo: Ecuación de Laplace

Sea la ecuación de Laplace definida con solución única para el sistema

$$\begin{cases} T = T_0(x, y) & \text{en una curva } C \\ T_{xx} + T_{yy} = 0 & \text{en una región } R \end{cases},$$

si encontramos un mapeo en que el sistema es más fácil de resolver $f : R \to S$, nada nos asegurará que la ecuación de Laplace se siga cumpliendo. Esto solo ocurrirá si el mapeo es conforme, si esto se cumple $T_{uu} + T_{vv} = 0$[9] también será cierto por lo que tendrá sentido cambiar el dominio del problema para solucionarlo.

[9] De hecho $T_{xx} + T_{yy} = (T_{uu} + T_{vv}) |f'(z)|^2$.

6.2.6 Definiciones: Series de Taylor y Laurent

Una función analítica tiene una expansión en serie de Taylor que converge dentro de un circulo si[10]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad |z| < R$$

y además una serie de Laurent convergente dentro de un anillo si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad R_1 < |z| < R_2.$$

[10] Con coeficientes $c_n = f^{(n)}(a) / (n!)$.

6.2.7 Integral de una función en variable compleja

A diferencia de la integral de Rienman en que la integral es definida si contiene límites de integración, para integrales en variable compleja en general importará el camino en el cual se llega de un punto a otro

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,\mathrm{d}t, \quad z(t) = x(t) + iy(t).$$

Esto lleva a que si reemplazamos $f(z) = u + iv$ en la expresión quedará

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i \int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).$$

Si $f(z)$ es **analítica** implicará que los diferenciales sean exactos (por las condiciones de Cauchy-Rienman) y por lo tanto las integrales **solo dependan de los puntos extremos**. Por lo tanto

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a), \quad F'(z) = f(z)$$

sin importar el camino tomado. Esto nos llevará al **teorema de Cauchy**: para cualquier curva cerrada la integral compleja de $f(z)$ **analítica** en y adentro de C [11,12]

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \forall C$$

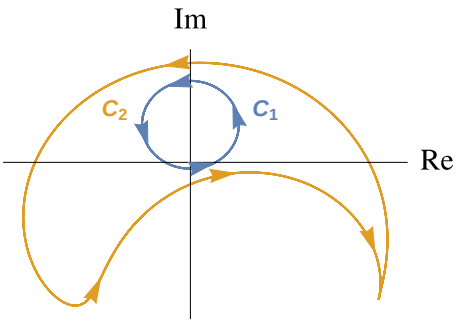
Otros resultados importantes son que si se tiene una curva C_2 que contiene a una C_1 y la función $f(z)$ es analítica en ellas y en la región entre ellas se tendrá que

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \quad , \tag{6.2.1}$$

de lo que se deduce que estas tienen valor cero si $f(z)$ es analítica adentro de C_1 y tomará un valor distinto de cero si no lo es.

[11] Si f no es analítica esta integral necesita ser distinta de cero. Por ejemplo: $\oint_C \mathrm{d}z/z = i2\pi$ para $C = Re^{i\theta}$.

[12]



Contornos con integral compleja equivalente. Nota curiosa: C_2 es el mapeo de Joukowski $f(z) = z + z^{-1}$ de un circulo. Éste mapeo se usaba para analizar perfiles de ala en aviones, por razones evidentes

6.2.8 Ejercicio: "Cedazo complejo"

Suponga $f(z)$ analítica y digamos que C es una curva cerrada simple (que es continua y no se atraviesa a si misma) que contiene $z = a$, pruebe la **fórmula integral de Cauchy**

$$f(a) = \frac{1}{i2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

Solución:

Como $f(z)$ es analítica podremos elegir la curva $z(\theta) = a + Re^{i\theta}$ tal que

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} f\left(a+Re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Si tendemos $R \to 0$ quedará finalmente que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = i2\pi f(a).$$

De este modo se tendrá que

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

que se parecerá bastante a una convolución compleja "$f(z) * -1/(i2\pi z)$", esto no es coincidencia de hecho la propiedad del producto en Laplace es $\mathcal{L}\{f(t)\,g(t)\} = \frac{1}{i2\pi}\oint_C F(\zeta)\,G(s-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

6.2.9 Ejercicio: Coeficientes de Taylor

Demuestre que si $f(z)$ es analítica y C es una curva cerrada simple que encierra a $z = a$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{i2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

Solución:

Partimos de

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

luego expandimos $1/(\zeta - z)$ a partir de la serie geométrica centrada en a, osea

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1.\end{aligned}$$

Ahora reemplazando este resultado en la integral se obtiene que

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{i2\pi}\oint_C f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\underbrace{\frac{1}{i2\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta}_{c_n}.\end{aligned}$$

Como sabemos que los coeficiente de la serie de potencias que representa a f son los de Taylor (son únicos, para demostrar que coinciden con los de Taylor solo bastará derivar n veces a ambos lados y evaluar en a en la serie de potencias), es decir $c_n = f^{(n)}(a)/n!$, podemos deducir entonces que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{i2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

Esto prueba en particular una propiedad bastante importante, si f es diferenciable en $z = a$, entonces posee derivadas de cualquier orden n. Por eso mismo el termino de función analítica significa que o bien f es diferenciable o que posee derivadas de cualquier orden (i.e. puede ser expresada en serie de potencias).

Fórmula integral de Cauchy

Suponga $f(z)$ analítica y digamos que C es una curva cerrada simple (que es continua y no se atraviesa a si misma) que contiene $z = a$, entonces se cumplirá que

$$f(a) = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$$

y su versión generalizada (debido a que ésta es un caso particular con $n = 0$)

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

6.2.10 Residuos

Quedamos con la pregunta, ¿Qué valor tomará $\oint f(z)\,\mathrm{d}z$ si el contorno C encierra un polo? Cuando dentro de C la función es analítica ya sabemos que el resultado será cero, pero para este caso la integral tiene la necesidad de ser distinto de cero. Por lo que se define el residuo de la función en $z = a$ como

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{i2\pi} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

Esto no ha sido de gran ayuda para solucionar nuestra pregunta, sin embargo reescribiremos de tal modo de usar la fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(a) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)(z-a)}{z-a} \mathrm{d}z \\ &= \lim_{z\to a} f(z)(z-a) \end{aligned}$$

y para el caso que el polo sea de orden n, usaremos la versión generalizada

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(a) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)(z-a)^n}{(z-a)^n} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[f(z)(z-a)^n \right]. \end{aligned}$$

Ahora ya podremos solucionar nuestra problemática inicial, sea C una curva tal que encierra N polos, el valor de la integral en dicha curva de la función f será

$$\frac{1}{i2\pi} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Res} f(z_n) \quad .$$

Otro aspecto importante del residuo es que es equivalente al coeficiente c_{-1} en al expansión en serie de Laurent en torno a $z = a$.

6.2.11 Ejercicio: Residuos y series de Laurent

1. Encuentre el valor de
$$\frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z-i)(z-2)}$$
para una curva C que incluye $z = 1$ y $z = 2$.

2. Encuentre el valor de
$$\frac{1}{i2\pi} \oint_C e^{3/z} \mathrm{d}z$$
para una curva C que incluye $z = 0$.

Solución:

1. Usando residuos quedará inmediatamente que
$$\begin{aligned} \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z-i)(z-2)} &= \operatorname{Res} f(1) + \operatorname{Res} f(2) \\ &= -\frac{1}{1-i} + \frac{1}{2-i} \end{aligned}$$

2. Expandiendo la exponencial en su serie de potencias

$$\begin{aligned}\frac{1}{i2\pi}\oint_C e^{3/z}\mathrm{d}z &= \frac{1}{i2\pi}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}z^{-n}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{i2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\oint_C z^{-n}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Como $\oint_C z^{-n}\mathrm{d}z$ será igual a cero si $n \neq 0$ e igual $i2\pi$ si $n = 1$, quedará entonces que

$$\frac{1}{i2\pi}\oint_C e^{3/z}\mathrm{d}z = 3.$$

Notamos que esto ocurrirá para la serie de Laurent de una función $f(z)$ general, por lo que se deduce que

$$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1}$$

, donde $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$.

6.2.12 Fracciones parciales

Una aplicación directa del teorema de los residuos es la descomposición en fracciones parciales, para esto se explicará mediante un ejemplo.

Calcule los coeficientes A, B y C de

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)^3} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{(s-a)}.$$

Solución:

Olvidémonos por un segundo de las fórmulas extrañas de variable compleja y entendamos que el método de los residuos es una forma de simplificarnos la vida. Para polos simples es bastante evidente su aplicación

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1}, \tag{6.2.2}$$

donde

$$\begin{aligned}A =& \operatorname{Res} f(-1) = \lim_{s\to -1} F(s)(s+1) = -\frac{1}{2} \\ B =& \operatorname{Res} f(1) = \lim_{s\to 1} F(s)(s-1) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

El método es bastante simple debido a que al aplicar la operación designada por los residuos se despeja la variable deseada.
Sin embargo, la aplicación para polos de mayor orden como el del ejemplo

no es tan claro. Veamos lo que quedan las siguientes operaciones sobre $F(s)$

$$\begin{aligned} F(s)(s-a)^3 &= A + (s-a)(C(s-a)+B) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)(s-a)^3 &= 2C(s-a)+B \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F(s)(s-a)^3 &= 2C. \end{aligned}$$

Es claro ver, extendiendo el método inmediatamente, que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{0!}\lim_{s\to a} F(s)(s-a)^3 \\ B &= \frac{1}{1!}\lim_{s\to a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)(s-a)^3 \\ C &= \frac{1}{2!}\lim_{s\to a} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F(s)(s-a)^3. \end{aligned}$$

Que es equivalente a aplicar

$$\mathrm{Res}_j F(a) = \frac{1}{(j-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}s^{j-1}}\left[F(s)(z-a)^n\right], \quad i = 1,\ldots,3.$$

7 Bibliografía

[1] E. Butkov. *Mathematical physics*. Addison-Wesley series in advanced physics. Addison-Wesley Pub. Co., 1968.

[2] H. Gross. Calculus revisited: Complex variables, differential equations, and linear algebra, 2011. Disponible en: http://ocw.mit.edu.

[3] P. Irarrazával. *Análisis de señales*. McGraw-Hill Interamericana, 1999.

[4] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*. Academic Press, 3rd edition, 2008.

[5] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and S.H. Nawab. *Signals and Systems*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, 1997.