Ayudantía 6

Muestreo, interpolación y presentación del proyecto

Señales y Sistemas

7 de octubre de 2022

Contenido

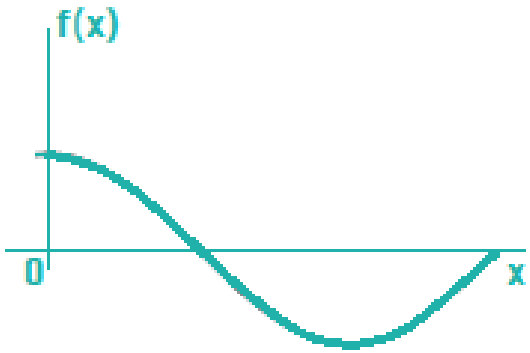
1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

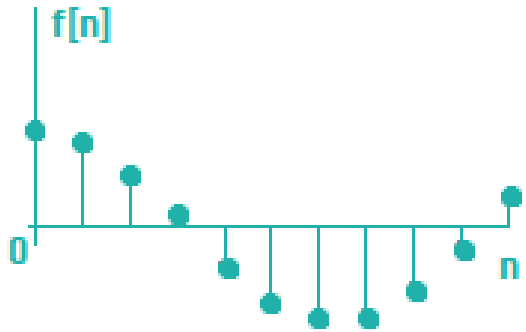
Contenido

1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

Resumen: teorema del muestreo

- Para entender el teorema del muestreo es necesario entender la diferencia entre señal discreta y señal continua e identificar cual es el propósito de muestrear.
- Una señal discreta es aquella que tiene como dominio solo elementos específicos y equiespaciados. Una señal discreta puede tomar cualquier valor en el eje vertical (recorrido) pero solo toma algunos valores en el eje horizontal (dominio). A continuación se muestran una señal continua a la izquierda y a la derecha du versión discretizada:





- En general el proceso de muestrear/discretizar tiene como propósito poder trabajar con la información de la señal con sistemas computacionales (que trabajan con datos discretos).

Resumen: teorema del muestreo

- El proceso para pasar del mundo continuo al mundo discreto se denomina **muestreo**
- Aclaración de **notación** en el contexto de señales y sistemas: cuando el argumento de una señal se escribe con la variable independiente con paréntesis redondos de la forma $f(x)$ se refiere a una señal continua. Cuando el argumento de una señal se escribe con la variable independiente con paréntesis cuadrados de la forma $f[n]$ se refiere a una señal discreta.
- El muestreo se lleva a cabo **multiplicando** la señal a muestrear $f(x)$ por un tren de impulsos Ш_T donde T es el espacio entre las muestras. Por ejemplo, si quiero tomar 1 muestra cada 5 números enteros, mi señal muestreada será $f[n] = f(x) \cdot \text{Ш}_5$
- También es posible que encuentren en los libros el muestreo como $f[n] = f(x) \cdot \frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{x}{T}\right)$

Resumen: teorema del muestreo

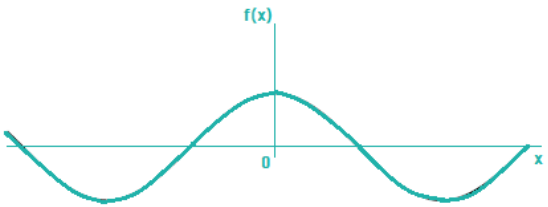
- Es importante tomar en cuenta que **si no se indica explícitamente el valor de T significa que se está considerando una muestra en cada entero**
- En el contexto de muestrear es importante preguntarse ¿Es posible guardar toda la información de una señal en sus muestras?
- La respuesta a esta pregunta es **sí**, siempre y cuando se cumpla el **teorema de Nyquist**

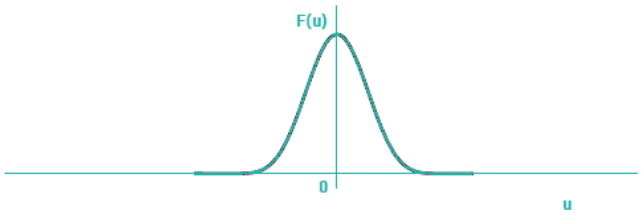
Resumen: teorema del muestreo

- El teorema de Nyquist indica que si una **señal continua es de ancho de banda limitado** con frecuencia máxima f_{max}, el período máximo con el que se puede muestrear la señal para que esta se pueda reconstituir a la perfección es:

$$T < \frac{1}{2f_{max}}$$

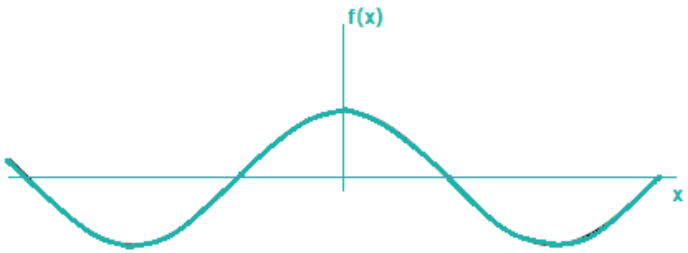
- A continuación, demostraremos el teorema de Nyquist: Consideremos una señal cualquiera de ancho de banda limitado, a continuación se muestra la señal y su transformada de Fourier:

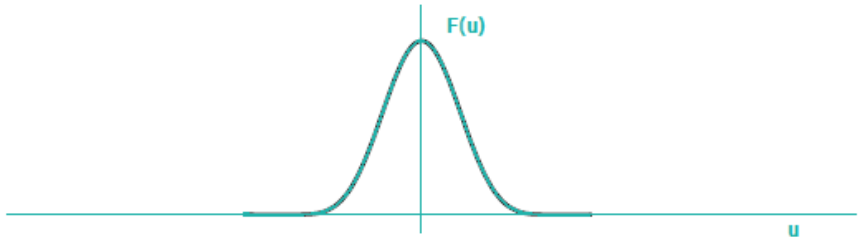




Resumen: teorema del muestreo

- Notemos que cuando estamos muestreando en el tiempo, estamos multiplicando por shah, por lo que, por propiedad de la multiplicación estamos convolucionando en Fourier:





Multiplicar $\frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{x}{T}\right)$

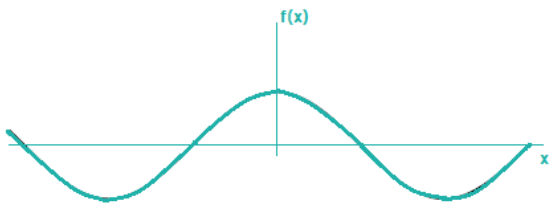


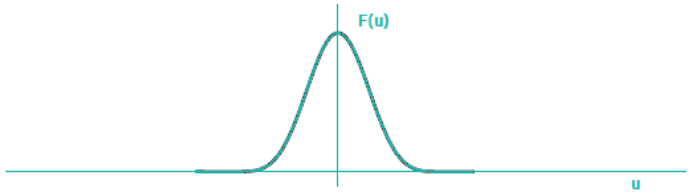
Convolucionar $\text{Ш}\left(uT\right)$

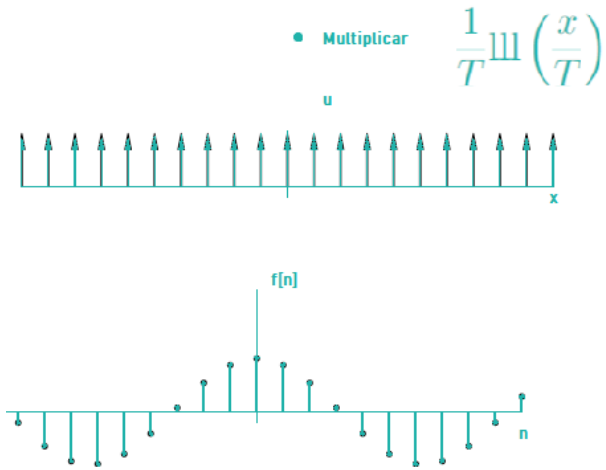


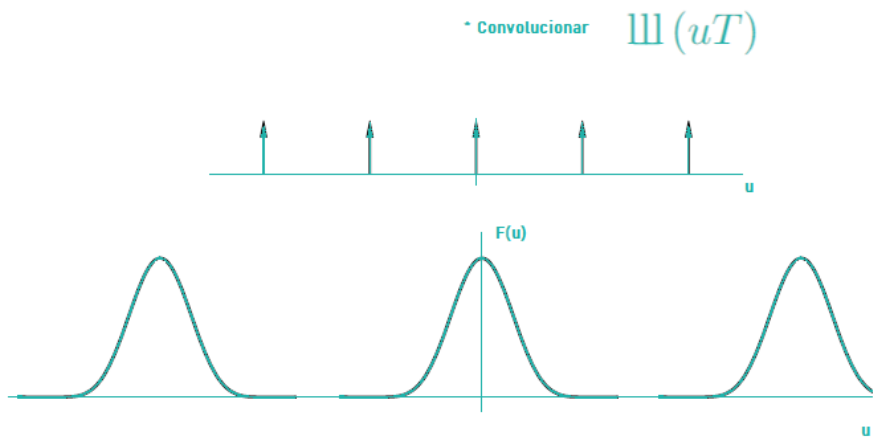
Resumen: teorema del muestreo

- Esto genera que en el tiempo se estén tomando muestras y en la frecuencia se esté periodizando:



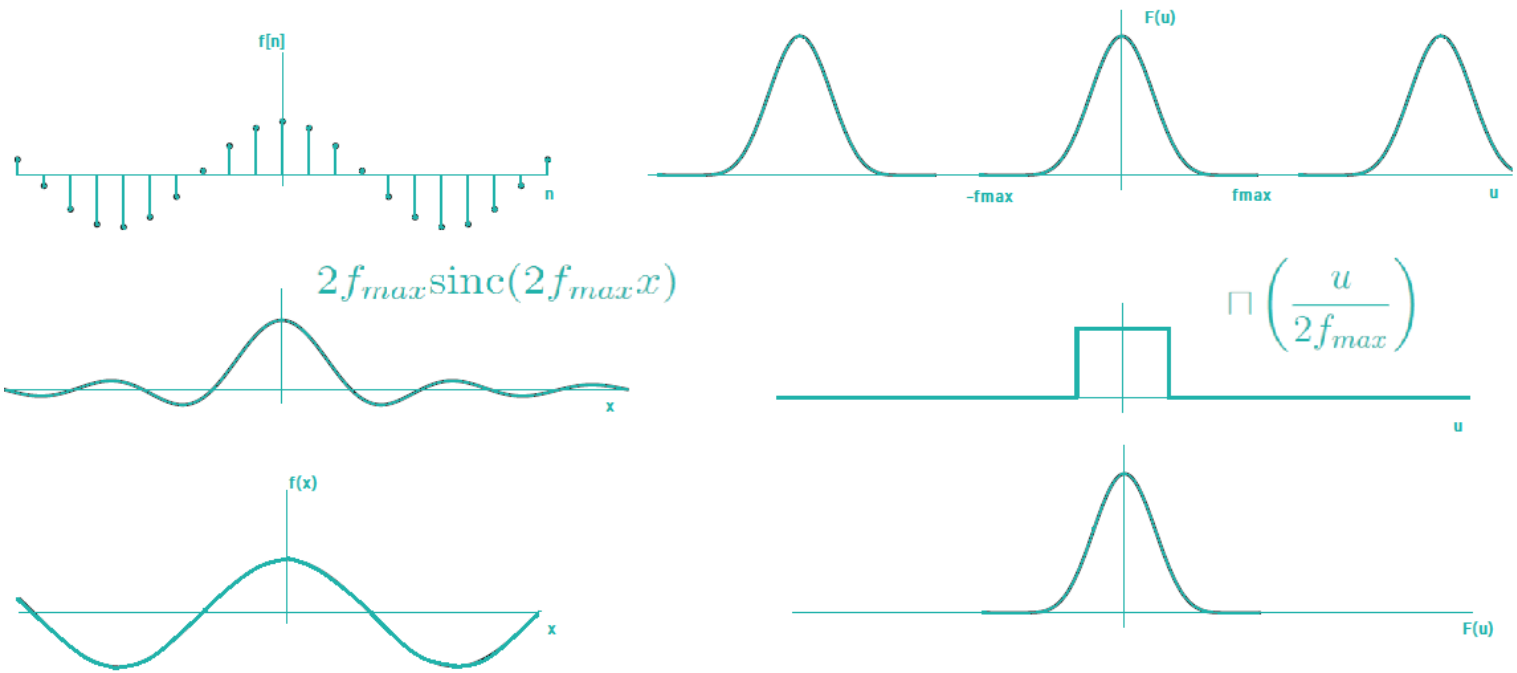






Resumen: teorema del muestreo

- Observemos que para poder recuperar la forma continua de la señal, bastaría aplicar un filtro en frecuencia. Multiplicar por un rect del ancho de la banda permitiría recuperar la transformada de Fourier original, y por lo tanto, podríamos recuperar la señal original convolucionando con un sinc en el tiempo. **Este procedimiento se denomina interpolación sinc**:



Contenido

1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

Ejercicio 1: teorema del muestreo

Determine el período de muestreo crítico de las siguientes señales:

1. $\text{sinc}(t)$
2. $\cos(6\pi t)$
3. $\text{sinc}^2(t)$

Para resolver esto, el paso a paso es el siguiente:

1. Tomar transformada de Fourier
2. Encontrar la frecuencia máxima.
3. Aplicar teorema de Nyquist

Ejercicio 1: período de muestreo crítico de sinc(t)

Sabemos que la transformada de Fourier de un sinc es un rect. La frecuencia máxima del rect es $f_{max} = \frac{1}{2}$, luego:

$$T < \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow T < 1$$

Esto significa que para muestrear un sinc y poder reconstituirlo, la distancia máxima posible que puede haber entre las muestras es $1 - \epsilon$ siendo ϵ un elemento infinitesimal.

Ejercicio 1: período de muestreo crítico de $\cos(6\pi t)$

- Paso 1: tomar transformada de Fourier. Sabemos que:

$$\mathcal{F}\{\cos(\pi t)\}(u) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(u - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(u + \frac{1}{2}\right)\right]$$

- Si ahora usamos propiedad del escalamiento en Fourier, podemos calcular $\mathcal{F}\{\cos(6\pi t)\}(u)$:

$$\mathcal{F}\{\cos(6\pi t)\}(u) = \frac{1}{6}\mathcal{F}\{\cos(\pi t)\}\left(\frac{u}{6}\right)$$

- Sustituyendo y utilizando la propiedad de magnitud del impulso se obtiene que la transformada de Fourier del coseno es un conjunto par de dos impulsos donde cada impulso está posicionado en la frecuencia del coseno:

$$\mathcal{F}\{\cos(6\pi t)\}(u) = \frac{1}{2}\left[\delta(u+3) + \delta(u-3)\right]$$

Ejercicio 1: período de muestreo crítico de $\cos(6\pi t)$

- A partir de la transformada de Fourier del coseno sabemos que la frecuencia máxima de este coseno es $f_{max} = 3$.
- Luego, reemplazando esto en Nyquist:

$$T < \frac{1}{2 \cdot 3} \rightarrow T < \frac{1}{6}$$

- Esto significa que para muestrear un $\cos(6\pi t)$ y poder reconstituirlo, la distancia máxima posible que puede haber entre muestras.

Ejercicio 1: período de muestreo crítico de $\text{sinc}^2(t)$

- Comenzamos calculando la transformada de Fourier de $\text{sinc}^2(t)$: para esto, consideramos que triángulo es la autoconvolución de rect, por lo tanto puedo calcular su transformada de Fourier:

$$\wedge(x) = \sqcap(x) * \sqcap(x)$$

Aplicando Fourier a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x) * \sqcap(x)\}$$

Utilizando propiedad de la convolución:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x)\}\mathcal{F}\{\sqcap(x)\}$$

Dado que $\mathcal{F}\{\sqcap(x)\} = \text{sinc}(u)$:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \text{sinc}^2(u)$$

Ejercicio 1: período de muestreo crítico de $\text{sinc}^2(t)$

- A continuación, analizamos que la frecuencia máxima es el valor más grande del eje u para el que $\wedge(u)$ tiene un velor no nulo, a partir de esto concluimos que la frecuencia máxima de $\text{sinc}^2(x)$ es $f_{max} = 1$
- Aplicando esto en Nyquist:

$$T < \frac{1}{2 \cdot 1} \rightarrow T < \frac{1}{2}$$

- Esto significa que para muestrear un $\text{sinc}^2(t)$ y poder reconstituirlo, la distancia máxima posible que puede haber entre las muestras es $\frac{1}{2} - \epsilon$ siendo ϵ un elemento infinitesimal.

Contenido

1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

Ejercicio 2: teorema del muestreo

Un sistema de grabación digital de audio toma 17000 muestras por segundo de la señal de sonido a grabar, explique cómo se escuchará la grabación y por qué.

- El ser humano es capaz de escuchar sonidos de frecuencias entre 20 y 20000 Hz.
- Esto significa que si la frecuencia máxima es de 20000 Hz, por Nyquist el período de muestreo debería ser mínimo $T_c = \frac{1}{40000}$, es decir, tomar 40000 muestras por segundo.
- Al tomar menos muestras por segundo de las necesarias, si se hace interpolación sinc para recuperar la señal, se genera *aliasión* (los invito a investigar sobre este fenómeno)

Contenido

1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

Ejercicio 1: interpolación

La señal $x(t) = \cos^2(2\pi 2000t)\cos(2\pi 1000t)$ es muestreada a $F_s = 9000Hz$ y luego es reconvertida a señal analógica. Escriba la señal de salida $y(t)$.

- Para comenzar analizamos el problema en forma global: hay que hacer primero el muestreo y después la interpolación sinc. De esta forma, la salida quedará:

$$y(t) = \left[x(t) \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{9000}}\right] * 2f_{max}\text{sinc}(2f_{max}t)$$

- Si la señal fue muestreada respetando el teorema de Nyquist, $y(t) = x(t)$ pero si no se cumplió el teorema, sabemos que $y(t)$ será una versión aliada de $x(t)$.
- Para comenzar el análisis debemos tomar transformada de Fourier de $x(t)$ para encontrar su frecuencia máxima.

Ejercicio 1: interpolación

- Aplicando Fourier a todo $x(t)$ y usando propiedad de la convolución:

$$X(u) = \{\mathcal{F}\{\cos(2\pi 2000t)\} * \mathcal{F}\{\cos(2\pi 2000t)\} * \mathcal{F}\{\cos(2\pi 1000t)\}\}(u)$$

- Calculando las transformadas de Fourier individualmente tendremos:
  - $\mathcal{F}\{\cos(2\pi 2000t)\}(u) = \frac{1}{2}[\delta(u+2000) + \delta(u-2000)]$
  - $\mathcal{F}\{\cos(2\pi 2000t)\}(u) = \frac{1}{2}[\delta(u+1000) + \delta(u-1000)]$
- Aplicando distributividad y propiedad del desplazamiento en la convolución se obtiene:

$$X(u) = \frac{1}{8}[\delta(u+5000) + \delta(u+3000) + \delta(u+1000) + \delta(u-5000) + \delta(u-3000) + \delta(u-1000)]$$

- A partir de la transformada de Fourier es posible identificar que la frecuencia máxima está situada en $f_{max} = 5000Hz$.

Ejercicio 1: interpolación

- Según el desarrollo de la diapositiva anterior, podemos concluir que no se cumple el teorema de Nyquist al muestrear a $F_s = 9000Hz$, ya que la frecuencia de Nyquist es $2f_{max} = 10000Hz$
- Dado que no se cumple Nyquist, la señal reconstituida está aliada y es de la forma:

$$y(t) = \left[x(t) \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{9000}}\right] * 10000\text{sinc}(10000t)$$

Contenido

1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

Ejercicio 2: interpolación

La función $\cos(\omega x + \phi)$ es muestreada a la frecuencia crítica $\frac{\omega}{2\pi} Hz$. Divida la función en su parte par y parte impar y demuestre que las muestras corresponden solo a la parte par. Explique cómo es muestreada la parte impar.

- Para comenzar, sabemos que toda función puede ser expresada como la suma de su parte par y su parte impar:

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x)$$

Donde:

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ejercicio 2: interpolación

- Podemos dividir la función coseno con fase de la forma:

$$f_p(x) = \frac{\cos(\omega x + \phi) + \cos(-\omega x + \phi)}{2} \qquad f_i(x) = \frac{\cos(\omega x + \phi) - \cos(-\omega x + \phi)}{2}$$

- Para resolver, usamos la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

- De esta forma:

$$\cos(\omega x + \phi) = \cos(\omega x)\cos(\phi) - \sin(\omega x)\sin(\phi)$$

$$\cos(-\omega x + \phi) = \cos(-\omega x)\cos(\phi) - \sin(-\omega x)\sin(\phi)$$

- Utilizando en la expresión anterior que coseno es par y seno es impar:

$$\cos(-\omega x + \phi) = \cos(\omega x)\cos(\phi) + \sin(\omega x)\sin(\phi)$$

Ejercicio 2: interpolación

- A partir de los cálculos anteriores, se obtiene que las partes par e impar son:

$$f_p(x) = \cos(\omega x)\cos(\phi) \qquad f_i(x) = -\sin(\omega x)\sin(\phi)$$

- A continuación, planteamos el muestreo de la señal:

$$f[n] = [f_p(x) + f_p(i)] \cdot \text{Ш}_{\frac{2\pi}{\omega}}$$

  Dado que shah es una función par, la multiplicación de shah con f_p es par y la multiplicación de shah por f_i es impar.

- Consideremos que $\cos(\phi)$ es una constante a la que llamaremos α y $\sin(\phi)$ es una constante a la que llamatemos β. De esta forma tendremos:

$$f[n] = \alpha\cos(\omega x) \cdot \text{Ш}_{\frac{2\pi}{\omega}} - \beta\sin(\omega x) \cdot \text{Ш}_{\frac{2\pi}{\omega}}$$

Ejercicio 2: interpolación

- Podemos observar que se están tomando 2 muestras por período, de las cuales en la parte par la muestra siempre cae en el máximo y en la parte impar la muestra cae en el cero. Esto es porque, si reemplazamos los valores en los que muestrea el shah $x = \frac{2\pi n}{\omega}$ donde **n siempre es un entero** se obtiene:

$$f[n] = \alpha \cos\left(\omega \frac{2\pi n}{\omega}\right) - \beta \sin\left(\omega \frac{2\pi n}{\omega}\right)$$

- De esta forma, simplificando:

$$f[n] = \alpha \cos(2\pi n) - \beta \sin(2\pi n)$$

- Dado que n es siempre entero, por periodicidad de seno y coseno tendremos:

$$\cos(2\pi n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \sin(2\pi n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 2: interpolación

- De esta forma se obtiene que las muestras de la parte impar caen siempre en 0 por lo tanto no son representativas de la señal.
- Las muestras de la parte par caen siempre en el máximo.
- De esta forma la señal muestreada es:

$$f[n] = \cos(\phi)$$

  Donde $\cos(\phi)$ es una constante.
- En este ejercicio es **muy importante** notar que no se está cumpliendo el teorema de Nyquist, ya que el teorema exige un período de muestreo **estrictamente menor** a dos veces la frecuencia máxima. Cuando se muestrea a frecuencia crítica se puede perder información.

Contenido

1. Resumen: teorema del muestreo
2. Ejercicio 1: teorema del muestreo
3. Ejercicio 2: teorema del muestreo
4. Ejercicio 1: interpolación
5. Ejercicio 2: interpolación
6. Explicación del proyecto

Explicación del proyecto

Alguna nociones básicas de turbulencia:

- Movimiento altamente impredecible $\rightarrow$ Modelos estadísticos.
- Extremadamente sensible a las condiciones iniciales $\rightarrow$ Caótico.
- Muy impredecible (por ahora), y aparente ser el estado más común de los fluidos.
- Muy entretenido e interesante.

Explicación del proyecto

Campos de velocidad:

- Campo vectorial, en el caso del proyecto se entregarán X e Y, pero se debe desarrollar mucho más...

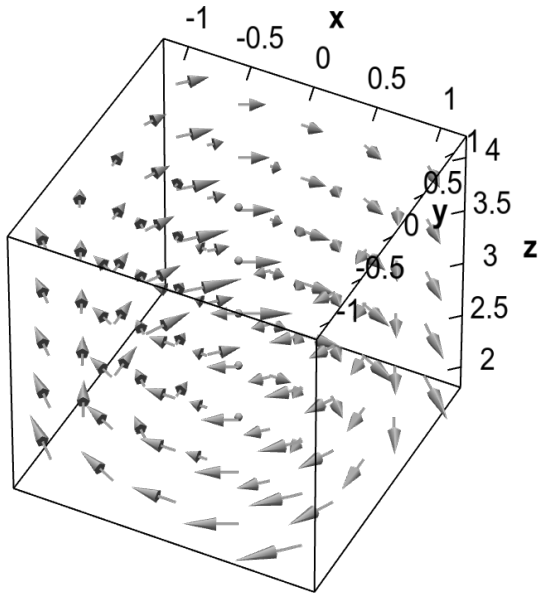


Figura: Campo vectorail de velocidades

Explicación del proyecto

Conceptos más relevantes para entender la turbulencia:

- Valor esperado de un campo de velocidad (promedio):

$$\mu = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

- Puedo relacionar distintos campos para formar un más completo, debo obtener el módulo solamente ya que la posición se puede inferir de su posición en el tensor.

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Explicación del proyecto

¿Cómo se aplica a la turbulencia?

- Existe una estructura natural en la que se genera turbulencia $\rightarrow$ Laminar, sinuoso, caótico.
- Podemos *cuantizar* la turbulencia $Re = \frac{Ud}{\nu}$

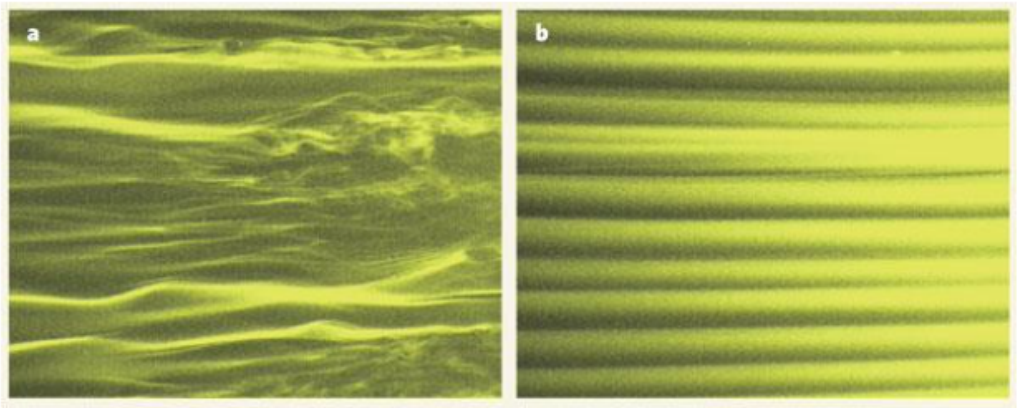


Figura: Kwing-So Choi. Fluid dynamics: The rough with the smooth. Nature 440, 754

Explicación del proyecto

¿Cómo se aplica a la turbulencia?

- Todo campo de velocidad en un sistema turbulento se puede descomponer en un campo de velocidad media sumado a una desviación aleatoria.

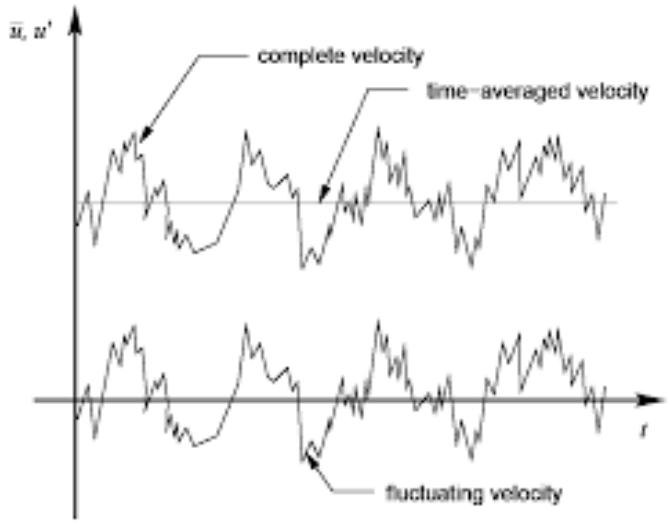


Figura: Gráfica de velocidad en flujo turbulento

Explicación del proyecto

¿Cómo se aplica a la turbulencia?

- Dividamos el gráfico de velocidad en dos partes (Descomposición de Reynolds):

$$u(t) = u'(t) + \overline{u(t)}$$
$$v(t) = v'(t) + \overline{v(t)}$$
$$w(t) = w'(t) + \overline{w(t)}$$
$$\overline{u'(t)} = 0$$
$$\overline{v'(t)} = 0$$
$$\overline{w'(t)} = 0$$

Explicación del proyecto

¿Qué tiene que ver con las señales?

- Modelamos los problemas mediante señales.
- Podemos analizar los problemas como señales $\rightarrow$ Análisis de datos y caracterización de sistemas.
- ¿Se dieron cuenta cómo se comporta la velocidad?

Explicación del proyecto

¿Qué tiene que ver con las señales?

- Podríamos decir que la velocidad **media** es un nivel de corriente DC, mientras que la componente **fluctuante** podría ser el ruido en caso de una aleatoria o simplemente una variación que se aleja de la media.

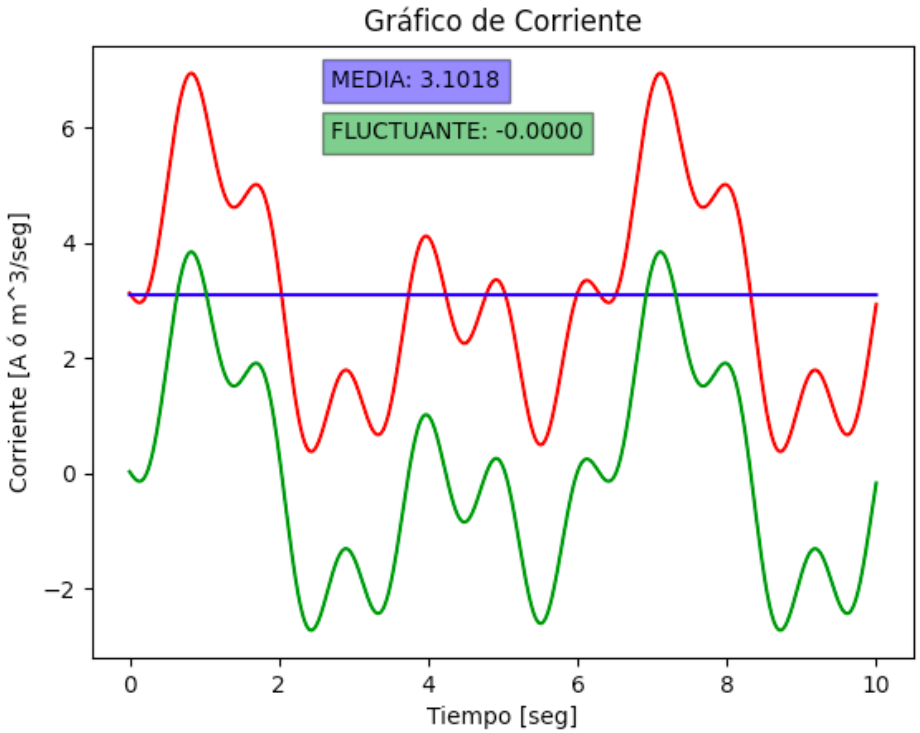


Figura: Función periódica

Explicación del proyecto

¿Qué tiene que ver con las señales?

- Existen ciertos comportamientos que modelan el componente en frecuecias del fluido.
- Primero debemos ver cómo decaen los vórtices.

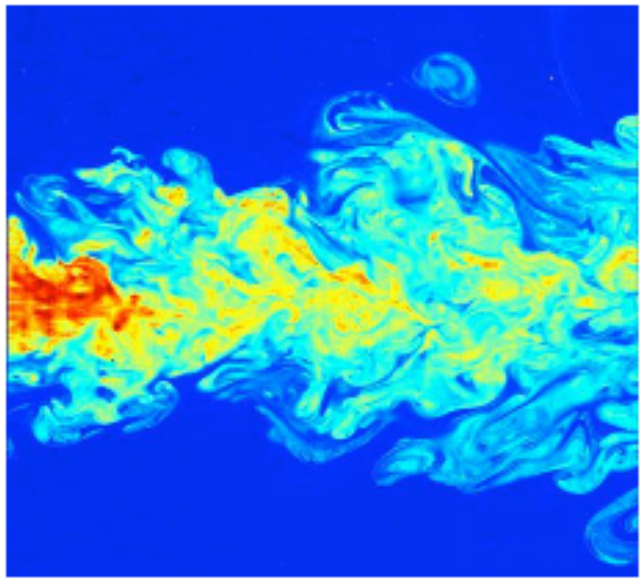


Figura: C. Fukushima and J. Westerweel, Technical University of Delft, The Netherlands

Explicación del proyecto

¿Qué tiene que ver con las señales?

- Existe un efecto que genera la viscosidad (esfuerzo viscoso) $\rightarrow$ ¡Absorbe las altas frecuencias!
- Esto tiene un efecto que se puede medir en los campos de velocidad y además en la energía cinética turbulenta del fluído.

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'}^2 + \overline{v'}^2 + \overline{w'}^2)$$

$$\varepsilon \sim \frac{(u')^3}{l} \qquad \eta = (\frac{\nu^3}{\varepsilon})^{\frac{1}{4}}$$

Anisotropía: $\overline{uv} < 0$

Explicación del proyecto

¿Qué tiene que ver con las señales?

- Existen comportamientos interesante en el mundo de las frecuencias.
- ¿Qué pasas si analizamos el contenido espectral del fluido?
- Debe tenerse en consideración cómo se descomponen los vórtices.

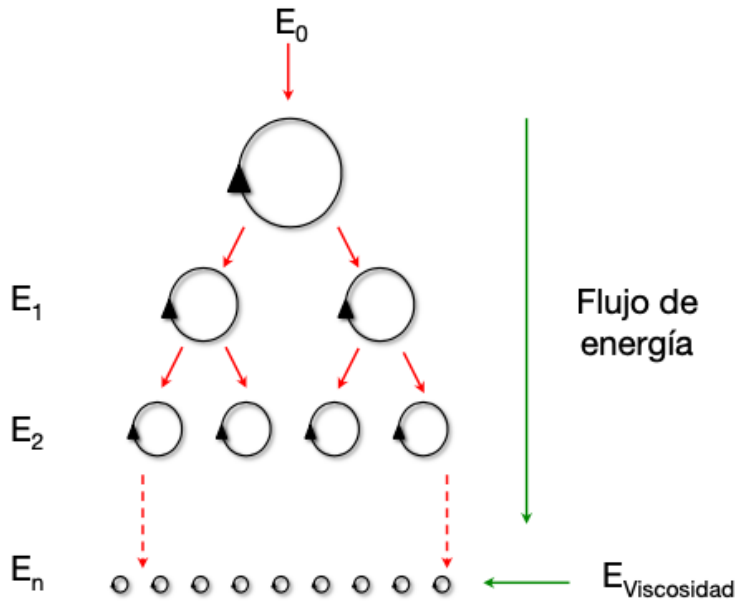


Figura: Cascada de Energía, W. Brevis, Pontificial Universidad Católica de Chile, Chile

Explicación del proyecto

- Escalas de Kolmogorov en rango inercial $\rightarrow M \sim \frac{-5}{3}$
- Existen comportamientos en frecuencia *relativamente* estables (en condiciones particulares).

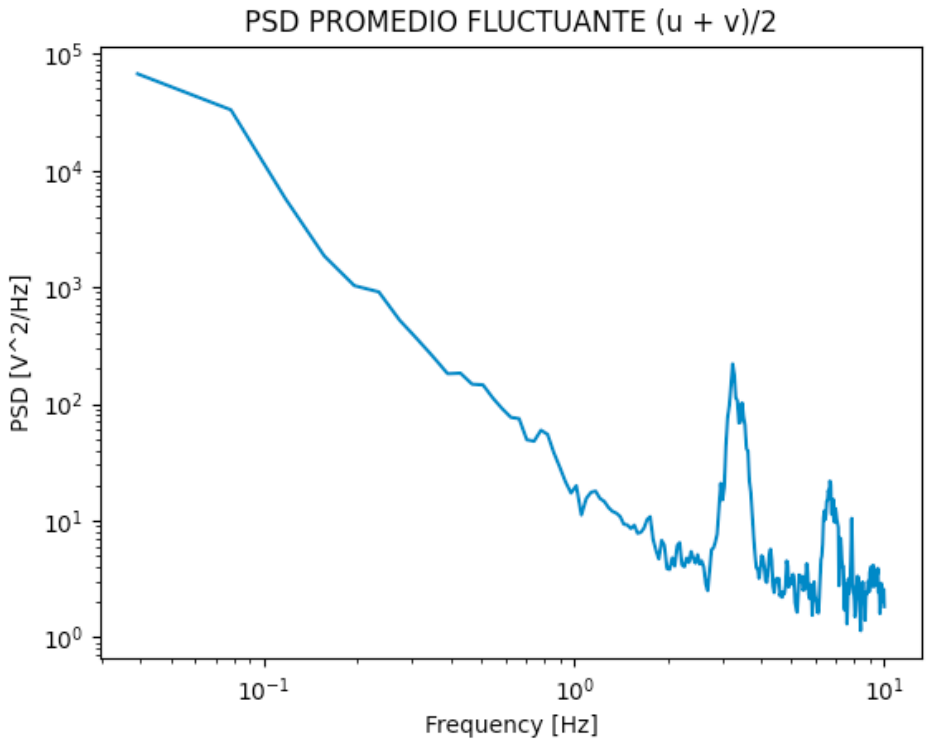


Figura: Espectro de frecuencia de energía