Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2008-2

INTERROGACION Nº 1

1. Un sistema dinámico se caracteriza por la siguiente relación entrada-salida:

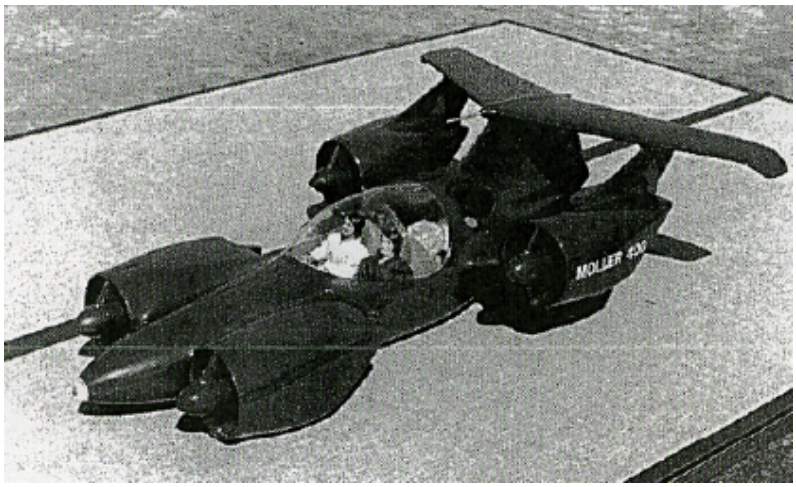
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1)x(\lambda)d\lambda$$

1.1 Clasifique el sistema dinámico.
1.2 Obtenga y grafique la función respuesta al impulso $h(t)$.
1.3 Aplique convolución para determinar la salida $y(t)$ para una entrada $x(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$.

2. La figura 2 muestra un vehículo de despegue vertical cuyo modelo aproximado corresponde a la ecuación diferencial:

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = \dot{x} + 4x$$

La variable y representa la velocidad angular y la variable x el torque aplicado.

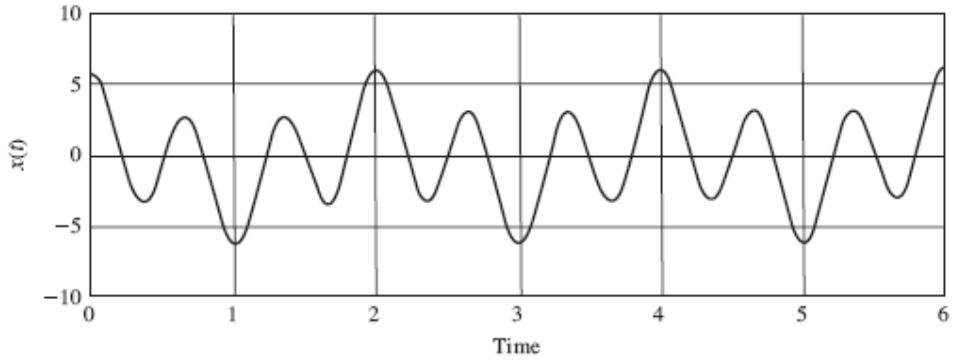


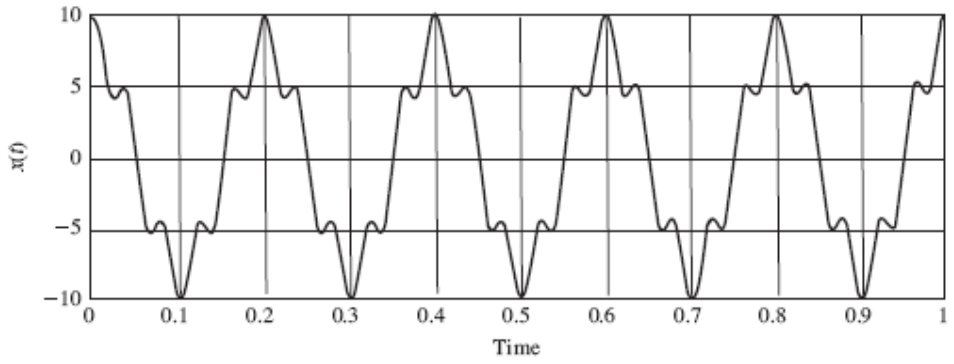
2.1 Obtenga un diagrama de simulación que incluya como elementos sólo integradores, sumadores, restadores y amplificadores.
2.2 Es posible obtener una forma canónica diagonal para este sistema? Justifique.
2.3 Sea $z = \dot{y}$ con lo cual la ecuación diferencial se reduce a:

$$\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z = \dot{x} + 4x$$

Obtenga la correspondiente función respuesta al impulso.

3. Se pide encontrar una expresión analítica para cada señal mostrada en las figuras 3a y 3b. Justifique su respuesta.





Observaciones

Tiempo: 2 horas.

Consultas sobre aclaraciones de enunciado sólo pueden realizarse al profesor y en los primeros 15 min.

No puede hacerse uso de material impreso ni calculadora.

Si requiere información complementaria para resolver un problema, agregue la que Usted considere más apropiada y especifíquelo en su respuesta.

Responda cada pregunta en hojas separadas. Recuerde escribir su nombre en cada hoja.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2008-2

PAUTA INTERROGACION Nº 1

PREGUNTA 1

1.1 Clasificación del sistema (2 pt)

Los sistemas dinámicos se clasifican en lineal/no lineal, variante/invariante, memoria/sin memoria, causal/no causal, invertible/no invertible, estable/inestable, tiempo continuo/tiempo discreto.

El puntaje máximo se asignará con 5 de estas clasificaciones, por ejemplo, lineal/no lineal, variante/invariante, memoria/sin memoria, causal/no causal, estable/inestable.

El sistema es lineal, invariante, con memoria, causal e inestable.

Linealidad (0,4 pt)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1)\, x(\lambda) d\lambda$$

Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ dos entradas, $y_1(t)$, $y_2(t)$ las correspondientes salidas dadas por:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1) x_1(\lambda) d\lambda$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1) x_2(\lambda) d\lambda$$

Asumiendo a y b constantes, la respuesta a la entrada

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1)\left[a x_1(\lambda) + b x_2(\lambda)\right] d\lambda = a \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1) x_1(\lambda) d\lambda + b \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1) x_2(\lambda) d\lambda = a y_1(t) + b y_2(t)$$

Así se concluye que el sistema es lineal.

Invarianza (0,4 pt)

Sea

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1) x(\lambda) d\lambda$$

la respuesta a la entrada *x(t)*. Entonces, la respuesta a la entrada *x(t-T)* es:

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1)x(\lambda - T)d\lambda$$

Haciendo el cambio de variables $\mu = \lambda - T$.

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{t-T} (t - (\mu + T) + 1)x(\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{t-T} ((t - T) - \mu) + 1)x(\mu)d\mu$$

De aquí, $y_0(t) = y(t - T)$, lo que demuestra que el sistema es invariante en el tiempo.

Memoria (0.4 pt)

La salida $y(t)$ depende de la entrada *x* en el instante *t* y también de la historia anterior de *x(t)*, por lo que el sistema tiene memoria.

Causalidad (0.4 pt)

La salida $y(t_0)$ depende sólo de los valores de la entrada *x(t)* para $t \leq t_0$, por lo que el sistema es causal.

Estabilidad (0.4 pt)

Para una entrada acotada, por ejemplo $x(t) = 1$, la salida diverge, es decir, el sistema es inestable.

1.2 Respuesta al impulso (2 pt)

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1)\delta(\lambda)d\lambda$$

Para $t < 0$,

$$h(t) = 0$$

Para $t >= 0$, por la propiedad del impulso, tenemos que *h(t)* es la función que multiplica a $\delta(t)$ evaluada en 0, esto es:

$$h(t) = t + 1$$

Entonces,

$$h(t) = (t + 1)u(t)$$

1.3 Respuesta a *x(t)* *(2 pt)*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1)\, x(\lambda) d\lambda$$

La expresión anterior corresponde a la convolución

$$y(t)=h(t)*x(t)$$

Como el sistema es lineal e invariante, si designamos con $y_0(t)$ a la respuesta a la entrada $u(t)$, entonces:

$$y(t) = y_0(t) - 2y_0(t-1) + y_0(t-2)$$

Se obtiene:

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 1) u(\lambda) d\lambda$$

Para $t < 0$: $y_0(t) = 0$

Para $t \geq 0$: $y_0(t) = \int_{0}^{t} (t - \lambda + 1) d\lambda = \frac{1}{2}t^2 + t$

Entonces:

$$y_0(t) = \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right] u(t)$$

De aquí:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right] u(t) - 2\left[\frac{1}{2}(t-1)^2 + t - 1\right] u(t-1) + \left[\frac{1}{2}(t-2)^2 + t - 2\right] u(t-2)$$

PREGUNTA 2

2.1 (2 ptos)

$$\dddot{y} + 3 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} = \dot{x} + 4 \cdot x$$

El diagrama de simulación depende de la definición de las variables de estado, por ejemplo la primera o la segunda forma canónica.

Primera forma canónica

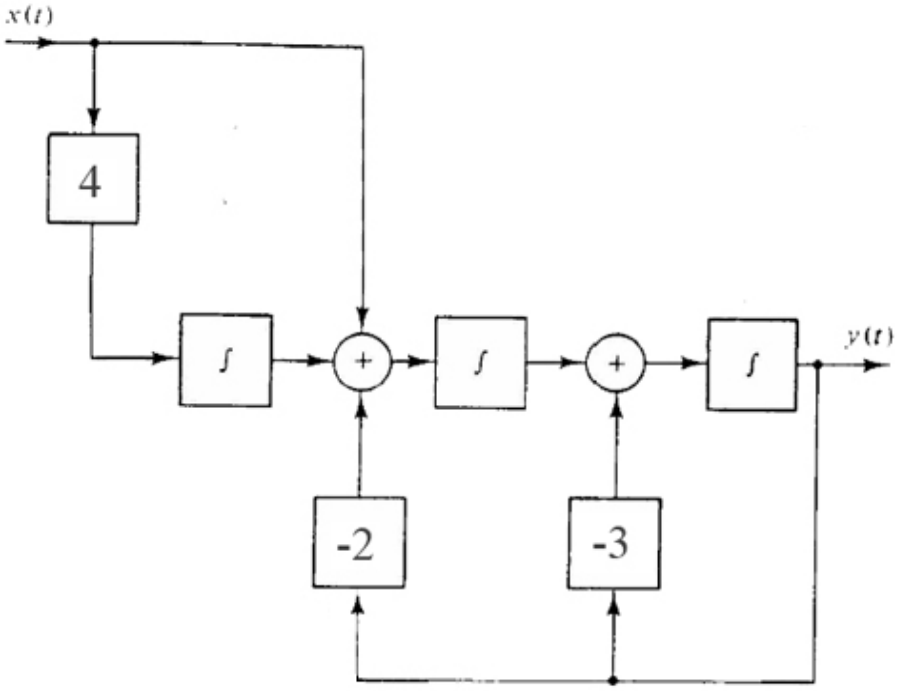
Despejamos la derivada de mayor orden de *y* y agrupamos derivadas de igual orden al otro lado de la ecuación:

$$\dddot{y} + 3 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} = \dot{x} + 4 \cdot x$$
$$\dddot{y} = -3 \cdot \ddot{y} + (\dot{x} - 2 \cdot \dot{y}) + 4 \cdot x$$

Integramos 3 veces, para eliminar todas las derivadas:

$$y = \int (-3 \cdot y)dt + \iint (x - 2 \cdot y)dt + \iiint (4 \cdot x)dt$$

El diagrama de primera forma canónica se obtiene directamente de esta expresión:



Segunda forma canónica

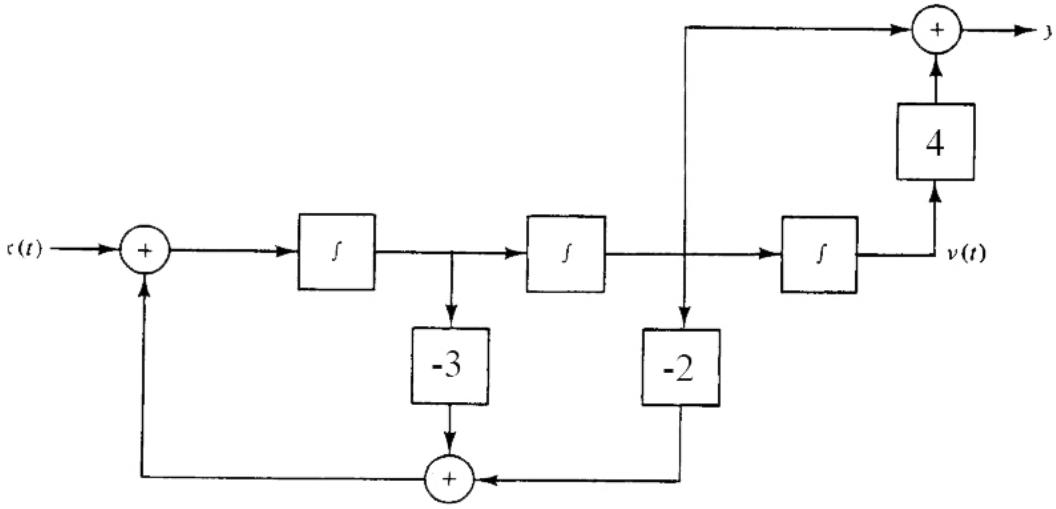
Definimos *v(t)* tal que:

$$\dddot{v} + 3 \cdot \ddot{v} + 2 \cdot \dot{v} = x$$

Por lo tanto:

$$y = \dot{v} + 4 \cdot v$$

Con estas 2 expresiones obtenemos el diagrama de segunda forma canónica:



2.2 (2 ptos)

Para determinar si es posible obtener la forma canónica diagonal debemos poder transformar la ecuación diferencial en una expresión como esta:

$$y = \sum_i \frac{\beta_i}{D - \alpha_i} \cdot x$$

En este caso:

$$\dddot{y} + 3 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} = \dot{x} + 4 \cdot x$$
$$\left(D^3 + 3 \cdot D^2 + 2 \cdot D\right) \cdot y = \left(D + 4\right) \cdot x$$
$$y = \frac{D + 4}{D^3 + 3 \cdot D^2 + 2 \cdot D} \cdot x$$

Expandimos en fracciones parciales:

$$\frac{D+4}{D^3+3\cdot D^2+2\cdot D}=\frac{D+4}{D\cdot(D+1)\cdot(D+2)}=\frac{A}{D}+\frac{B}{D+1}+\frac{C}{D+2}$$

$$A=\left.\frac{D+4}{(D+1)\cdot(D+2)}\right|_{D=0}=2$$
$$B=\left.\frac{D+4}{D\cdot(D+2)}\right|_{D=-1}=-3$$
$$C=\left.\frac{D+4}{D\cdot(D+1)}\right|_{D=-2}=1$$

Finalmente:

$$y=\left(\frac{2}{D}-\frac{3}{D+1}+\frac{1}{D+2}\right)\cdot x$$

Por lo tanto, si es posible determinar la forma canónica diagonal.

2.3 (2 ptos)

$$\ddot{z}+3\cdot\dot{z}+2\cdot z=\dot{x}+4\cdot x$$

El problema puede resolverse empleando cualquier método, por ejemplo obteniendo la homogénea y la particular, o bien transformada de Laplace.

Método homogénea más particular

La solución homogénea se obtiene resolviendo la ecuación característica:

$$s^2+3\cdot s+2=0$$
$$(s+1)\cdot(s+2)=0$$

$$\Rightarrow s_1=-1$$
$$s_2=-2$$

La solución homogénea es $h_H(t)=\left(A\cdot e^{-t}+B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot u(t)$. Como el orden de las derivadas de y es mayor que el orden de las derivadas de x, la solución particular es 0.

Calculamos las derivadas de la solución homogénea:

$$\begin{aligned}\dot{h}_H(t)&=\left(-A\cdot e^{-t}-2\cdot B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot u(t)+\left(A\cdot e^{-t}+B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot\delta(t)\\&=\left(-A\cdot e^{-t}-2\cdot B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot u(t)+(A+B)\cdot\delta(t)\\\ddot{h}_H(t)&=\left(A\cdot e^{-t}+4\cdot B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot u(t)+\left(-A\cdot e^{-t}-2\cdot B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot\delta(t)+(A+B)\cdot\dot{\delta}(t)\\&=\left(A\cdot e^{-t}+4\cdot B\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot u(t)+(-A-2\cdot B)\cdot\delta(t)+(A+B)\cdot\dot{\delta}(t)\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\ddot{h} + 3 \cdot \dot{h} + 2 \cdot h = \dot{\delta} + 4 \cdot \delta$$

$$\begin{gathered}\left(A \cdot e^{-t} + 4 \cdot B \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \cdot u(t) + \left(-A - 2 \cdot B\right) \cdot \delta(t) + \left(A + B\right) \cdot \dot{\delta}(t) \\ + 3 \cdot \left[\left(-A \cdot e^{-t} - 2 \cdot B \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \cdot u(t) + \left(A + B\right) \cdot \delta(t)\right] \\ + 2 \cdot \left[\left(A \cdot e^{-t} + B \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \cdot u(t)\right] \\ = \dot{\delta}(t) + 4 \cdot \delta(t)\end{gathered}$$

$$\left(A + B\right) \cdot \dot{\delta}(t) + \left(2 \cdot A + B\right) \cdot \delta(t) = \dot{\delta}(t) + 4 \cdot \delta(t)$$

Igualando las constantes respectivas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered}A + B = 1 \\ 2 \cdot A + B = 4\end{gathered}$$

Resolviendo el sistema obtenemos A=3 y B=-2.

Por lo tanto, la respuesta al impulso es:

$$h(t) = \left(3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \cdot u(t)$$

Método transformada de Laplace

Tomamos la transformada de Laplace del sistema con condiciones iniciales nulas (recordar que $L\{\delta(t)\} = 1$):

$$\begin{gathered}s^2 \cdot H(s) + 3 \cdot s \cdot H(s) + 2 \cdot H(s) = s + 4 \\ \left(s^2 + 3 \cdot s + 2\right) \cdot H(s) = s + 4 \\ H(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 3 \cdot s + 2}\end{gathered}$$

Expandiendo en fracciones parciales:

$$\frac{s + 4}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = \frac{s + 4}{\left(s + 1\right) \cdot \left(s + 2\right)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

$$\begin{gathered}A = \left.\frac{s + 4}{s + 2}\right|_{s=-1} = 3 \\ B = \left.\frac{s + 4}{s + 1}\right|_{s=-2} = -2\end{gathered}$$

Por lo tanto:

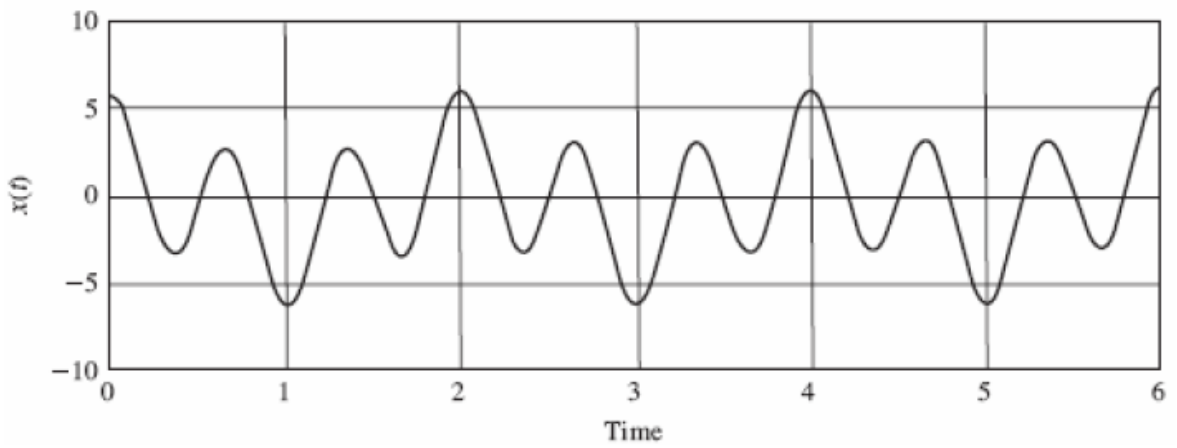
$$H(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

La respuesta al impulso es la transformada inversa de la función de transferencia (recordar que $L\{e^{-a\cdot t}\cdot u(t)\} = \frac{1}{s+a}$). Por lo tanto la respuesta al impulso es:

$$h(t) = \left(3\cdot e^{-t} - 2\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot u(t)$$

PREGUNTA 3

3a) (3 ptos)



Se observa que el gráfico representa una señal periódica de período *T=2 seg.* Esta señal corresponde a la suma de dos sinusoides de diferente frecuencia. Por lo tanto la expresión analítica general de la señal será:

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t - \phi_1) + B\cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (0.5\ )$$

Al observar la señal, considerando que el tiempo va de 0 a 6 segundos, podemos obtener directamente ω_1 y ω_2:

Una sinusoide realiza 9 ciclos en 6 segundos, luego $\omega_1 = \frac{9*2\pi}{6} = 3\pi$ rad/seg 0.5p

La otra sinusoide realiza 3 ciclos en 6 segundos, luego $\omega_2 = \frac{3*2\pi}{6} = \pi$ rad/seg 0.5p

La señal comienza en un máximo, por lo que el caso más sencillo e intuitivo es considerar $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 0.25p.

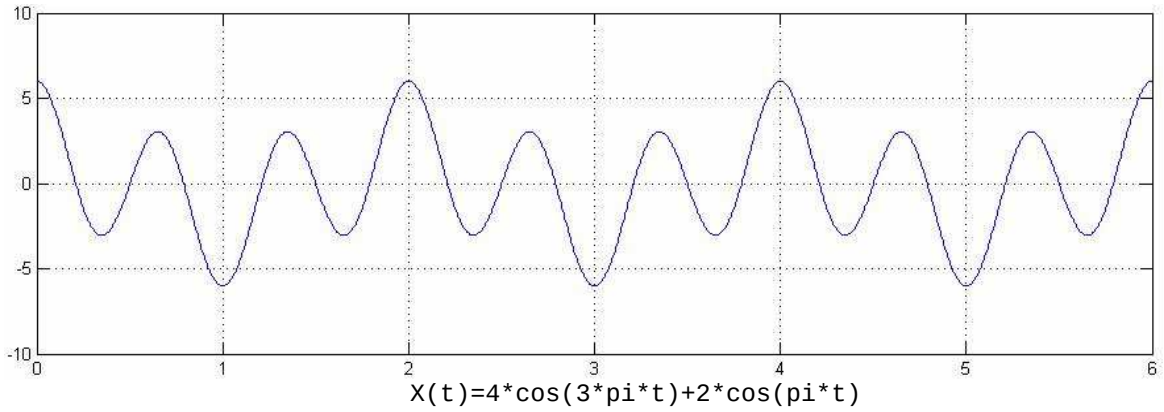
Luego, para $t = 0$ tenemos $A + B = 6$ 0.5p

Luego, para $t = \frac{2}{3}$ (aquí hay un máximo local) tenemos $A\cos(3\pi\frac{2}{3}) + B\cos(\pi\frac{2}{3}) = 3$ 0.5p

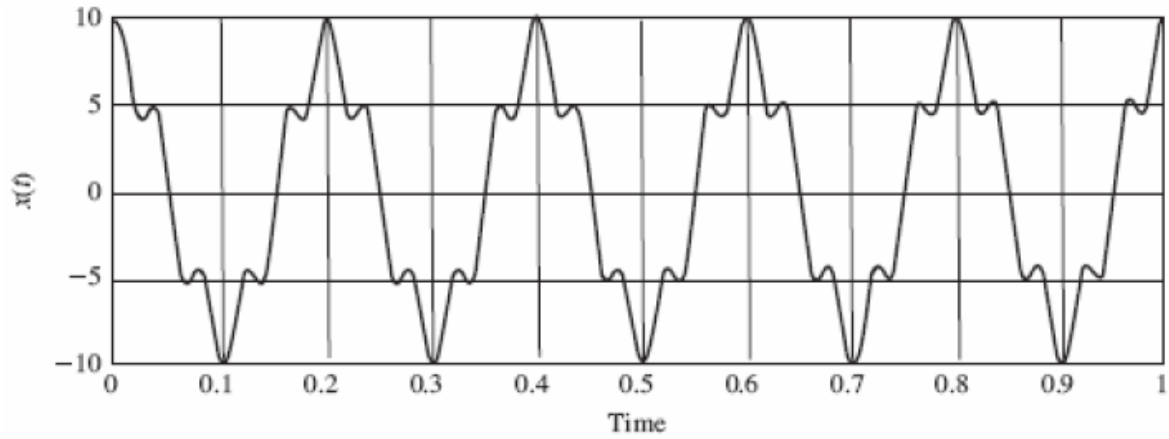
Es decir $A - \frac{1}{2}B = 3$, y juntando esta ecuación con la primera obtenemos:

$A = 4$
$B = 2$ 0.25p

El gráfico obtenido computacionalmente corrobora nuestro resultado:



3b) (3 ptos.)



También en este caso se observa que el gráfico representa una señal periódica, ahora de período *T=0,2 seg.* Esta señal corresponde a la suma de dos sinusoides de diferente frecuencia. Por lo tanto la expresión analítica general de la señal será:

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t - \phi_1) + B\cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (0.5\ )$$

Con esta señal hacemos un procedimiento análogo al anterior.

Igual que antes, consideramos $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 0.25p

Una sinusoide realiza 5 ciclos en 1 segundo, luego $\omega_1 = \frac{5*2\pi}{1} = 10\pi$ rad/seg 0.5p

La otra sinusoide realiza 25 ciclos en 1 segundo, luego $\omega_2 = \frac{25*2\pi}{1} = 50\pi$ rad/seg 0.5p

Luego, para $t = 0$ tenemos $A + B = 10$ 0.5p

Para $t = \frac{0.1}{4}$ tenemos $A\cos(\frac{\pi}{4}) + B\cos(\frac{5\pi}{4}) = 4$

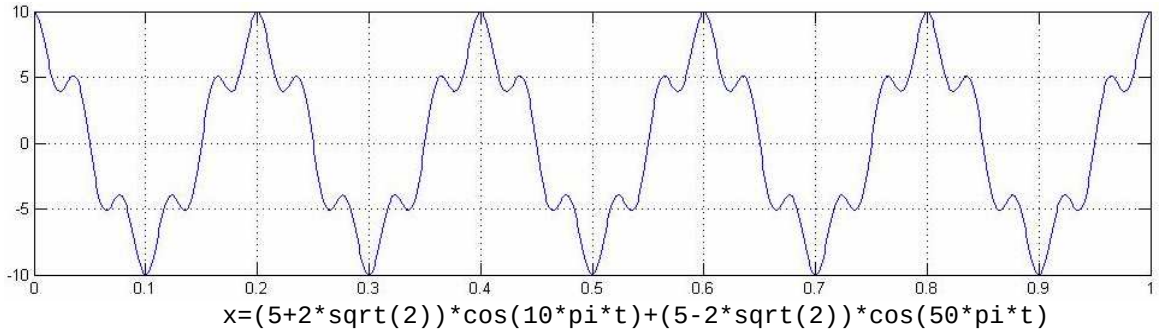
Es decir $A\frac{\sqrt{2}}{2} - B\frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ 0.5p

Juntando esta ecuación con la primera obtenemos:

$A = 5 + 2\sqrt{2} = 7.83 \approx 8$

$B = 5 - 2\sqrt{2} = 2.17 \approx 2$ 0.25p

El gráfico obtenido computacionalmente corrobora nuestro resultado.



Si se plantes la solución en base a serie de Fourier, la asignación de puntaje para cada parte (a y b) será la siguiente:

- 0,5 ptos. por la expresión analítica.
- 0,5 ptos. por las expresiones correctas que permiten calcular los coeficientes.