Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 5

21 de Abril 2023

Pregunta 1

Considere la función periódica con período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 < x < \pi \\ \pi\ , & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

[5 pts.] Exprese $f(x)$ como una serie de Fourier.

[1 pt.] Demuestre a partir del resultado que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

a. El período de la señal es 2π por lo que $\omega = 1$. Calculando los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi dx = \frac{3\pi}{4}$$

Ahora:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2\pi}((-1)^k - 1)$$

Esto es $\frac{-2}{k^2\pi}$ con k impar y cero en otros casos.
De manera similar:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin(kx)dx = -\frac{1}{k}$$

Entonces la función es:

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + ...\right] - \left[\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + ...\right]$$

b. Para demostrar lo pedido basta con encontrar un valor que elimine los $\cos(kx)$, por ejemplo tomando $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \left[(1) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{5}(1) + ...\right]$$

Entonces:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$