IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 1C: Simetría y funciones importantes

1. Introducción

1.1 Introducción
1.2 Sistemas de entrada-salida
1.3 Señales físicas y lógicas
1.4 Señales y funciones continuas versus discretas
1.5 Modelos, ecuaciones diferenciales y de diferencia
1.6 Causalidad
1.7 ¿Cómo graficar funciones complejas?
1.8 Simetrías
1.9 Algunas funciones importantes
1.10 El impulso

1.8 Simetrías

Función real

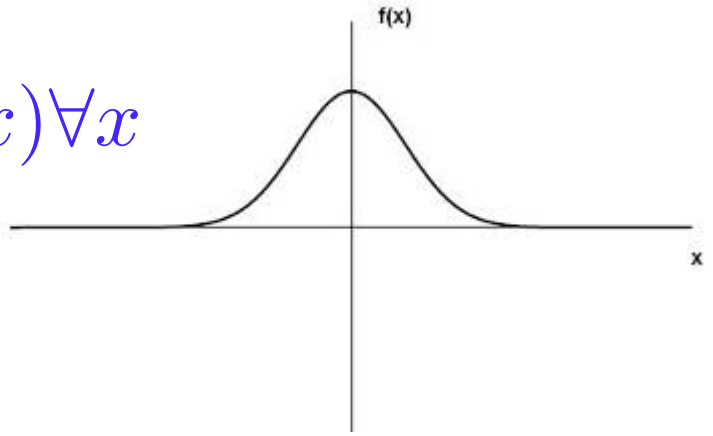
- par
- impar

Función compleja

- hermitiana
- anti-hermitiana

1.8 Simetrías

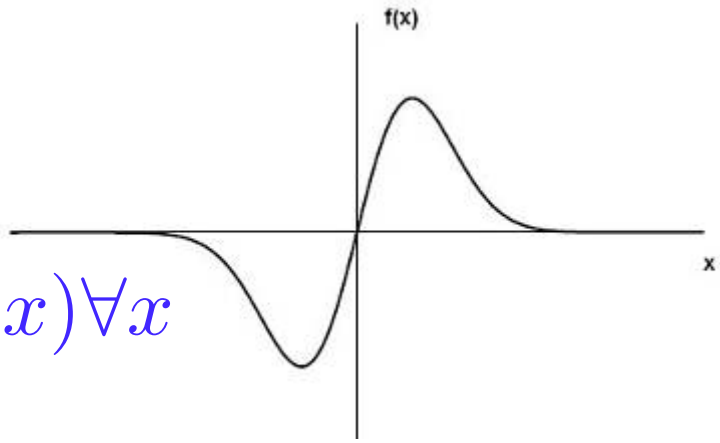
$$f(x) = f(-x) \forall x$$



par

Función real

impar



$$f(-x) = -f(x) \forall x$$

1.8 Simetrías

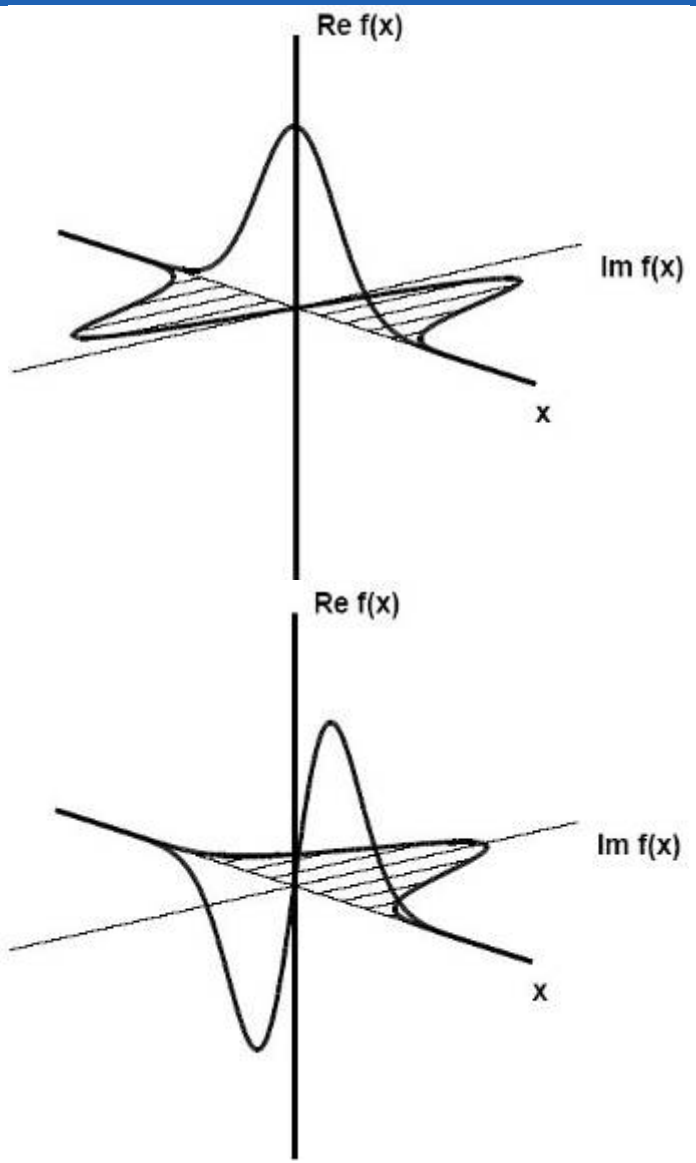
Parte real par, parte imaginaria impar

Función compleja

hermitiana

anti-hermitiana

Parte real impar, parte imaginaria par



Simetrías

Una señal asimétrica f(x) siempre puede descomponerse en una parte par P(x) y otra impar I(x)

$$P(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

$$I(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

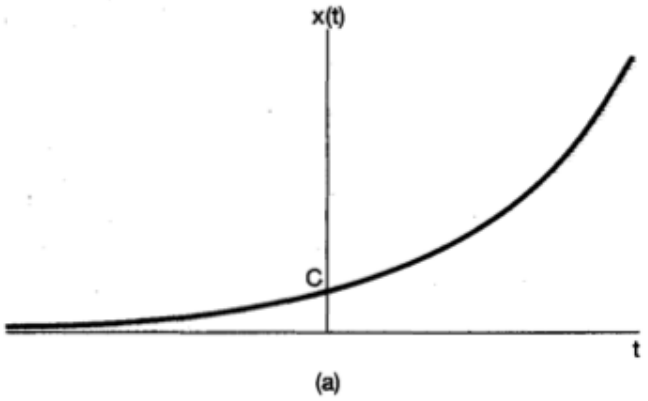
CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Funciones importantes

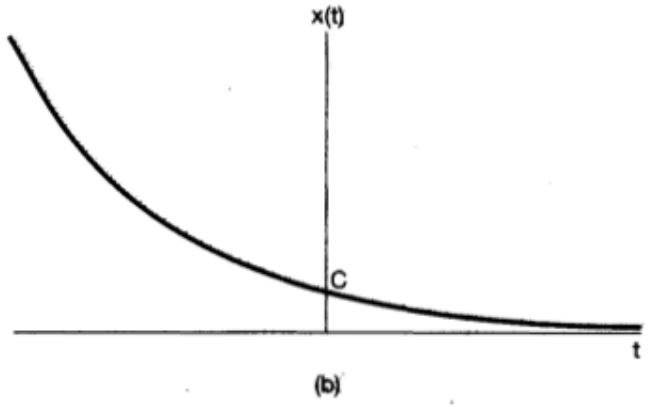
Sinusoide
Exponencial real
Exponencial compleja
Gauss
Uno
Triángulo
Impulso
Rect
Sa
Sinc
Asinc
Escalón
Rampa
Signo
Shah
Horquilla y antihorquilla

Exponencial real

$$x(t) = Ce^{at}$$



$a > 0$



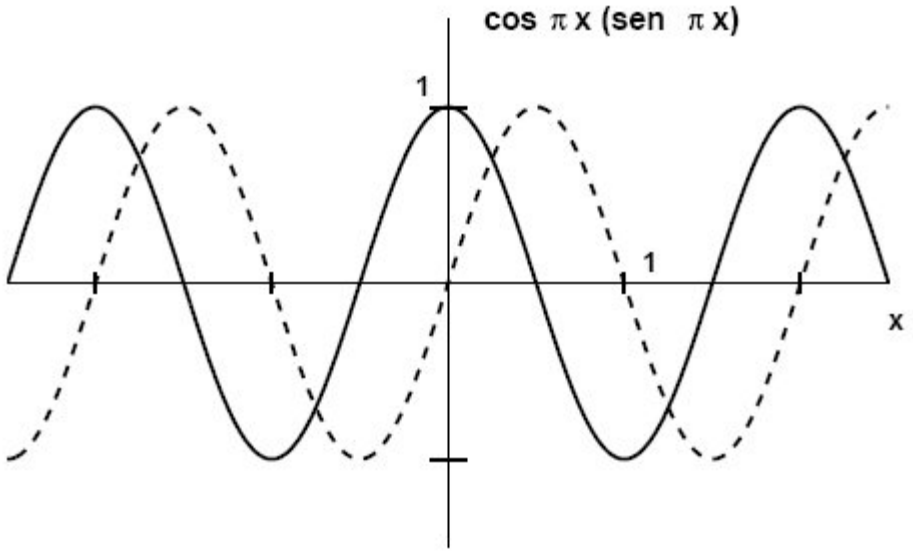
$a < 0$

Oppenheim, pág. 15

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

1.9.1 Sinusoide

$$f(x) = \text{sen}\pi x \qquad f(x) = \cos\pi x$$



Revisa

¿Período? ¿Frecuencia? (t:[seg], x:[mt])

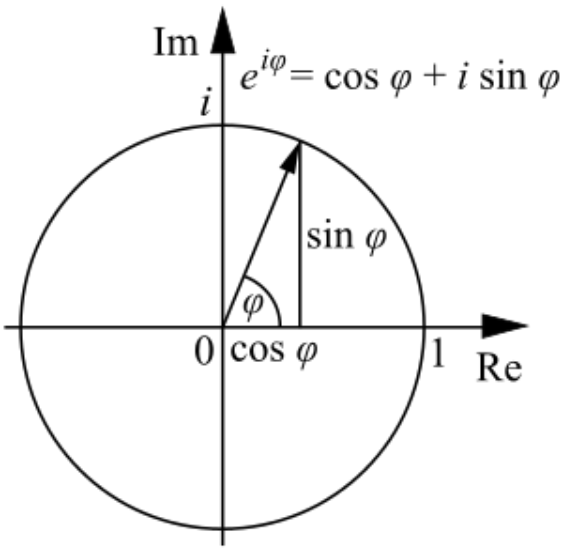
$f(t) = cos(10t)$

$f(x) = 3sen(\pi x + 3)$

$f(t) = bcos(2\pi at)$

Breve recordatorio: Euler

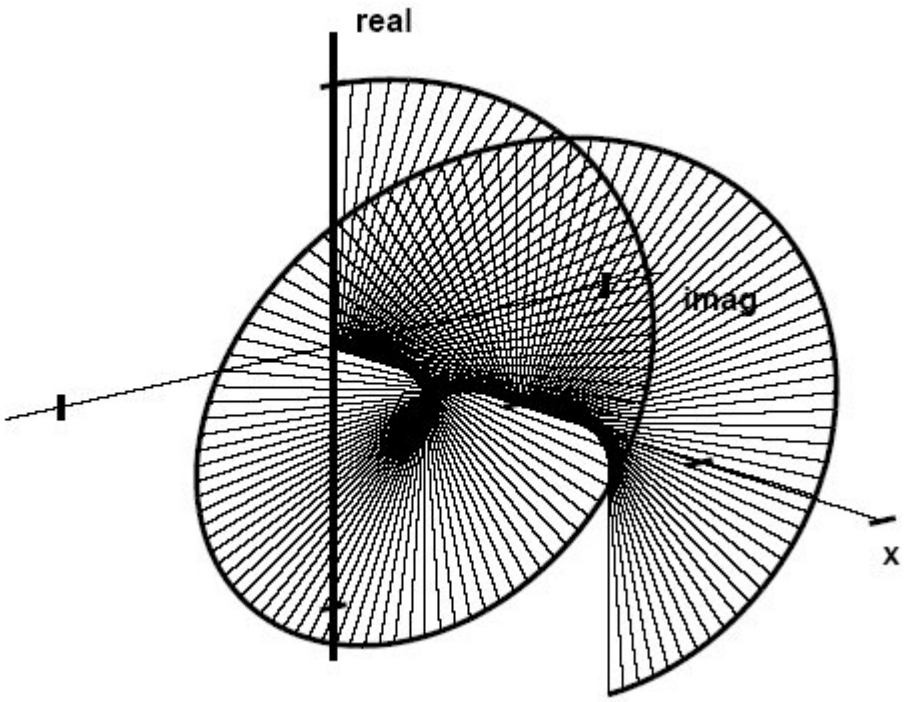
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi$$

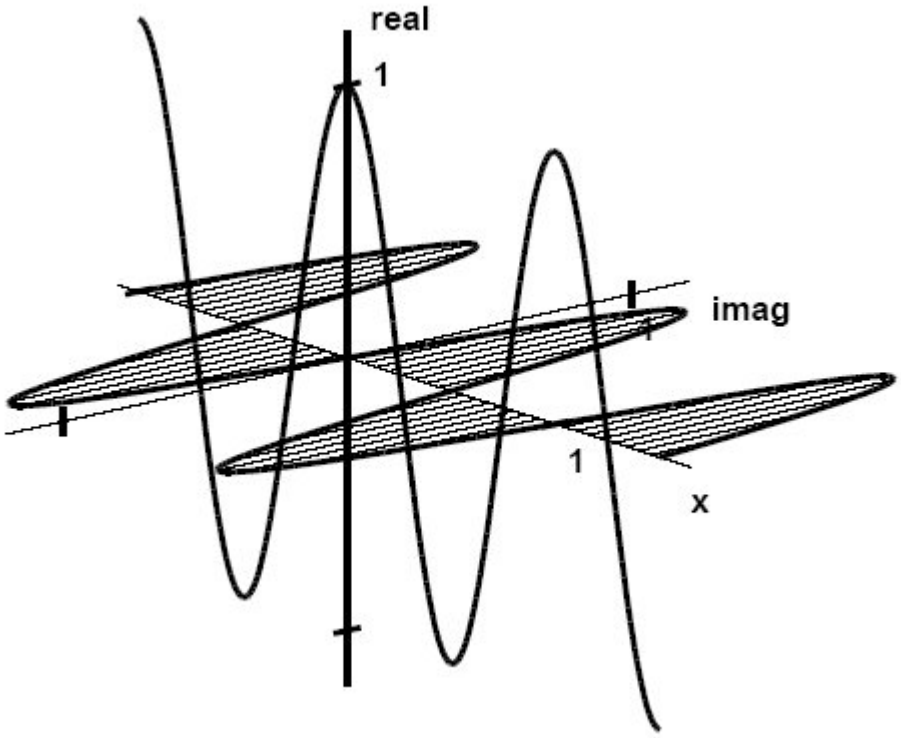


CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

1.9.2 Exponencial compleja

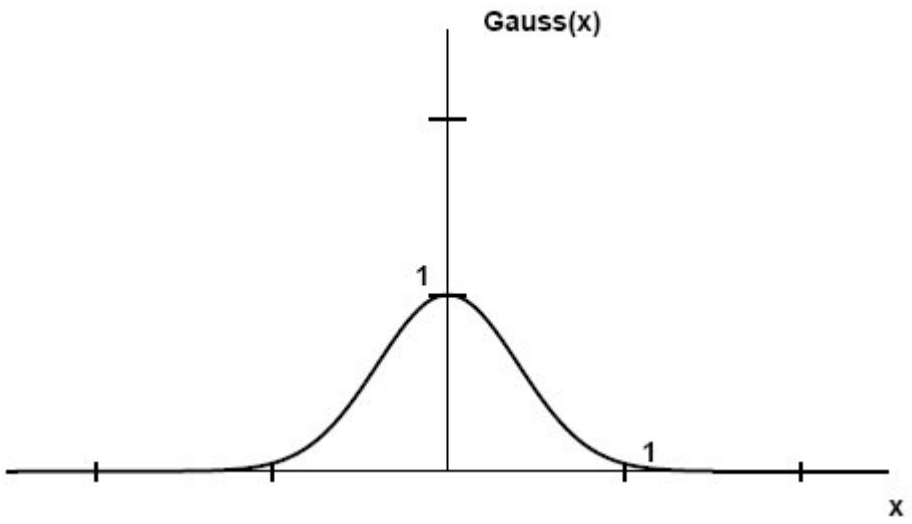
$$f(x) = e^{i2\pi x}$$





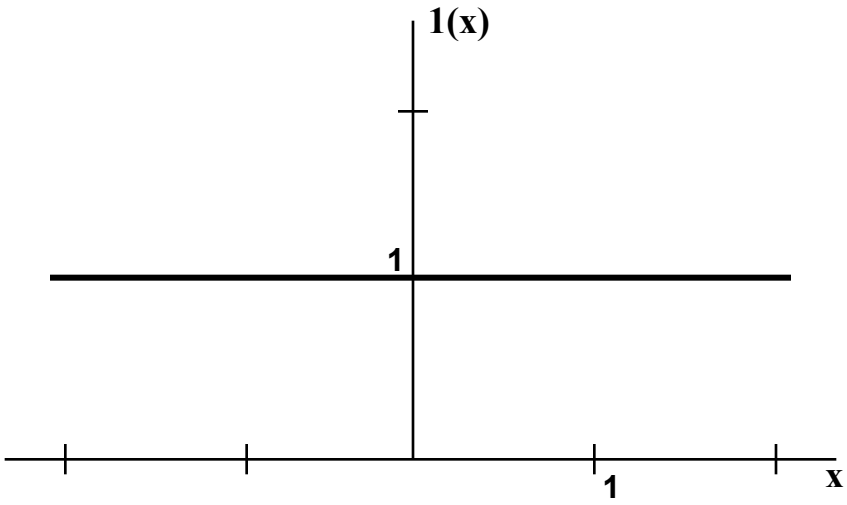
1.9.3 Gauss

$$\text{Gauss}(x) = e^{-\pi x^2}$$



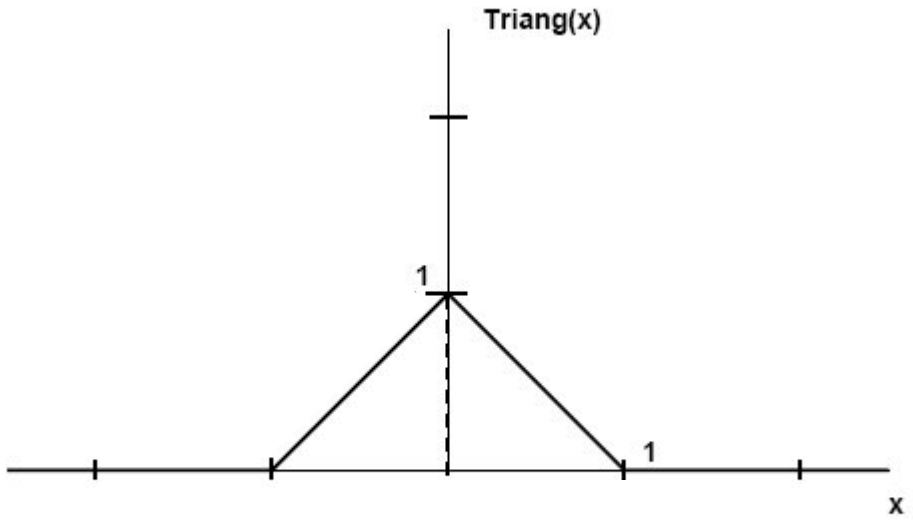
1.9.4 Uno

$$1(x) = 1$$



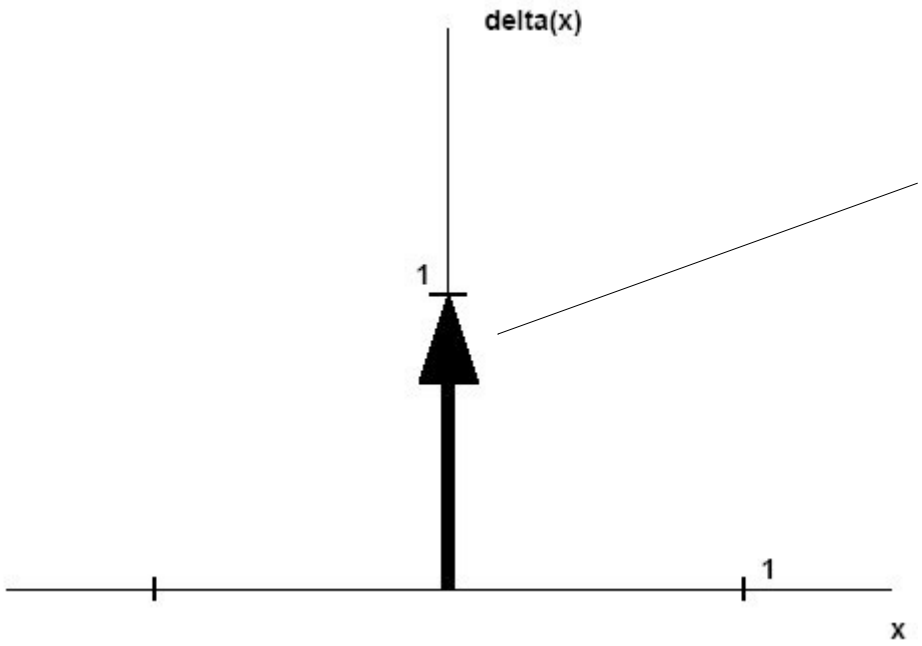
1.9.5 Triángulo

$$\wedge(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$



Impulso

$$\delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$



Esta flecha indica que la *amplitud* es infinita

Diremos que la *magnitud* es uno (el área bajo la curva)

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Impulso unitario escalado



Figura 1.35 Impulso unitario continuo.

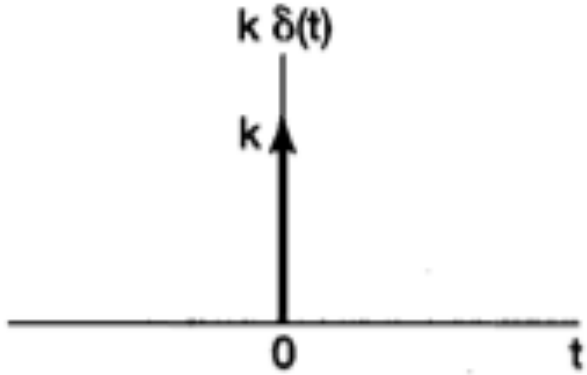


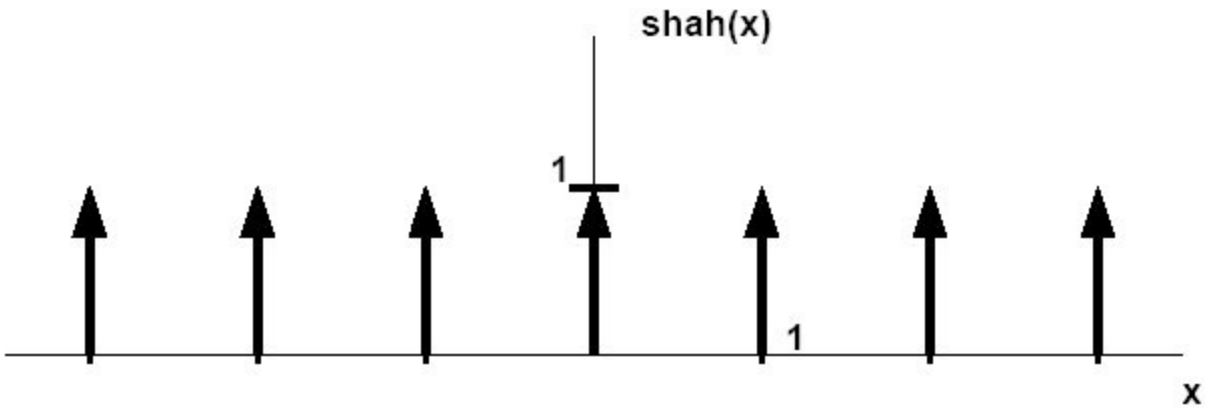
Figura 1.36 Impulso escalado.

Oppenheim, pág. 34

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Shah

$$\text{Ш}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

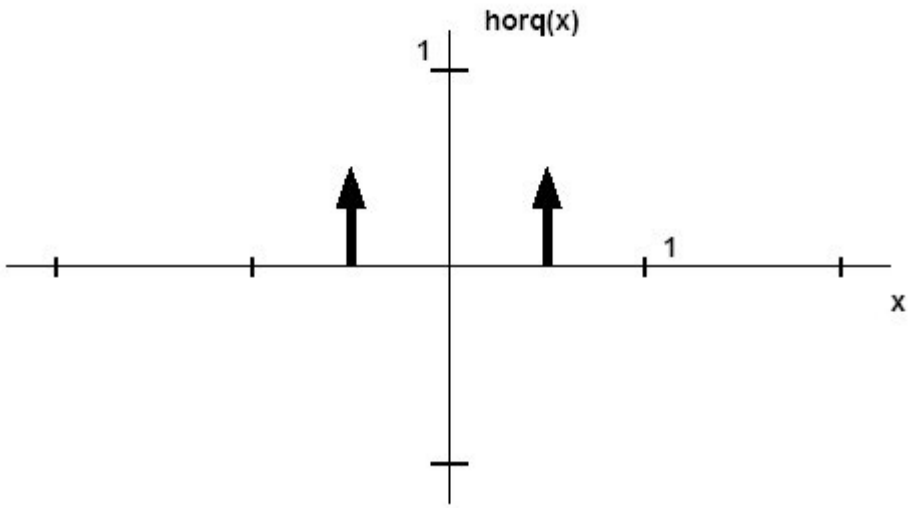


Irarrázaval, pág. 28

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Horquilla

$$\uparrow\uparrow(x) = \frac{1}{2}[\delta(x + 1/2) + \delta(x - 1/2)]$$

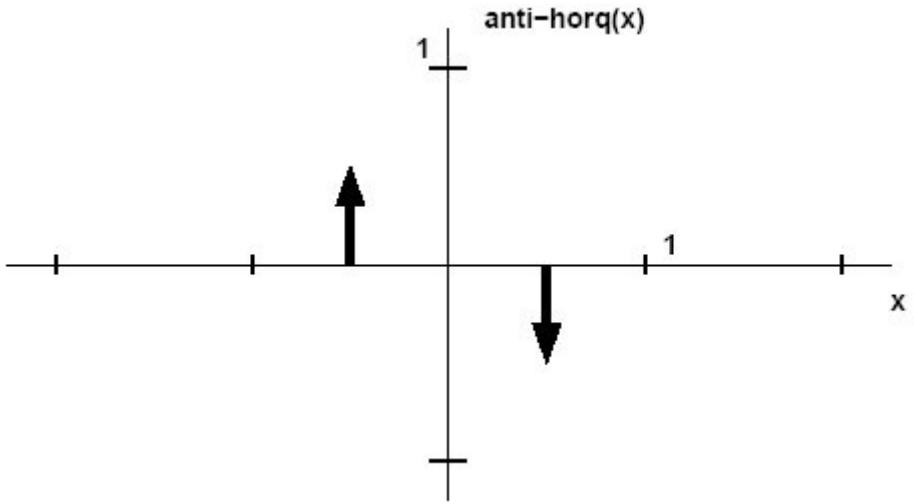


Irarrázaval, pág. 29

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Antihorquilla

$$\uparrow\downarrow (x) = \frac{1}{2}[\delta(x + 1/2) - \delta(x - 1/2)]$$

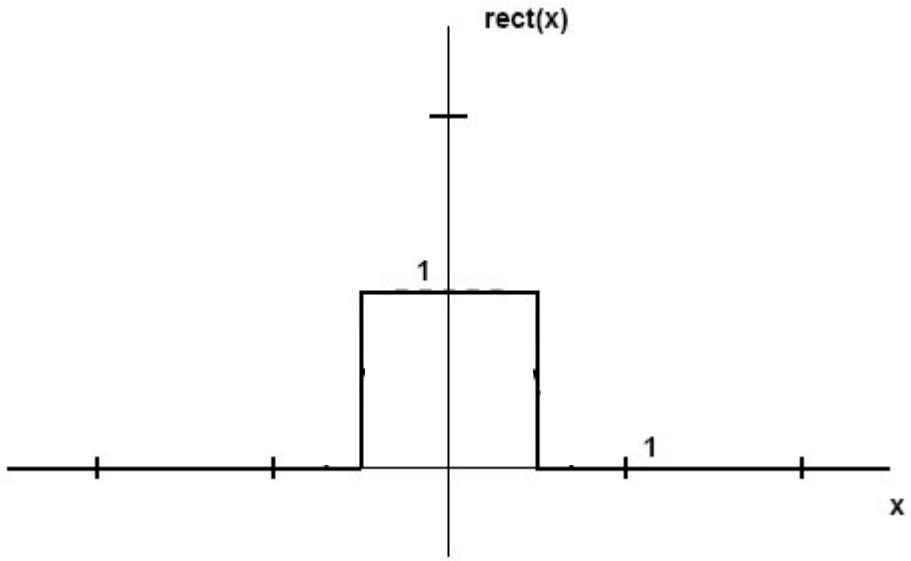


Irarrázaval, pág. 29

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

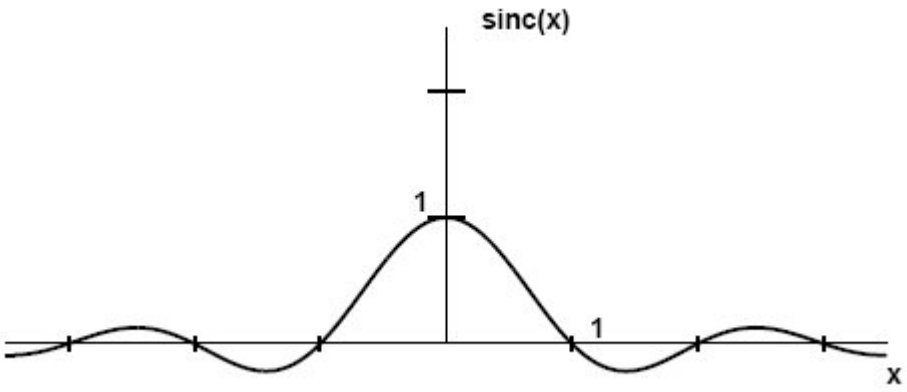
1.9.7 Rect

$$\sqcap(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases}$$



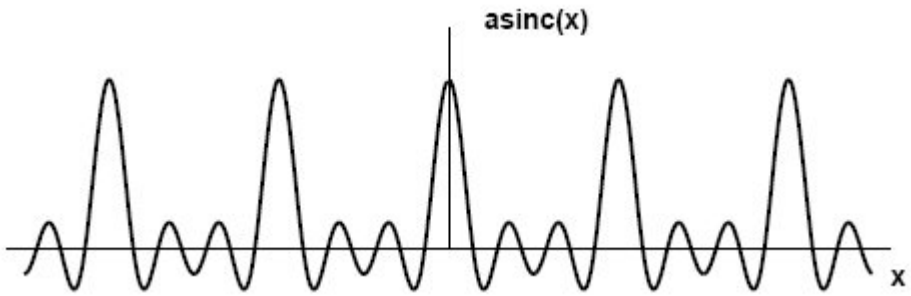
1.9.8 Sinc

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}$$



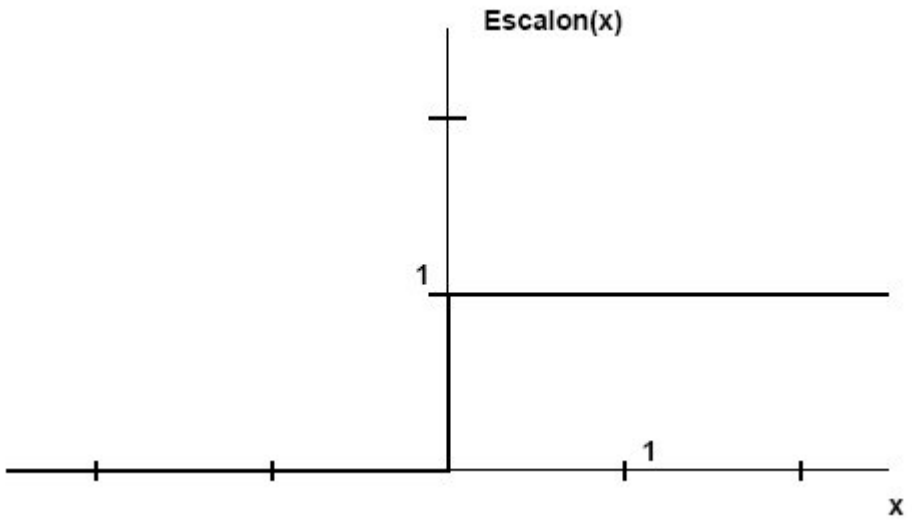
1.9.9 Asinc

$$\text{asinc}_N(x) = \frac{\text{sen}\,\pi x(2N+1)}{\text{sen}\,\pi x}$$



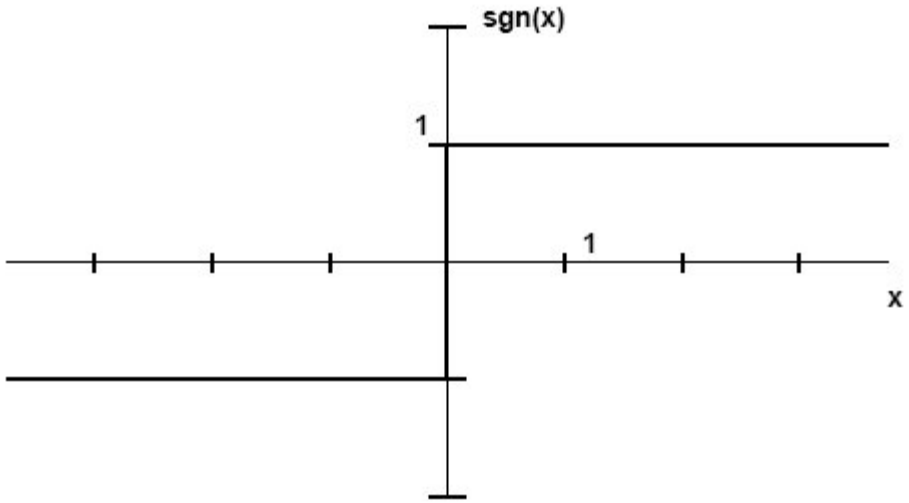
1.9.10 Escalón

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



1.9.11 Signo

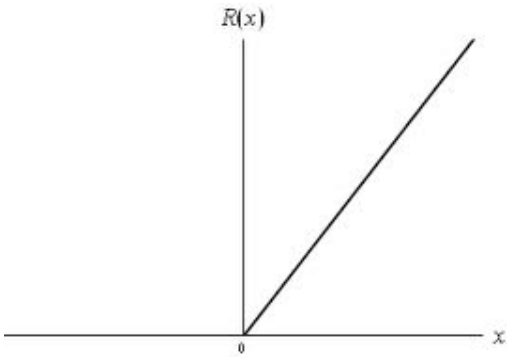
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Rampa

$$R(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$R(x) = xu(x) = x\sqcap(x)$$



CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Energía y Potencia

La energía total de una señal contínua f(t) en el intervalo de tiempo

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

es

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Energía y Potencia

Interesa conocer la energía total de una señal f(t) contínua, la cual puede calcularse como:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

Energía y Potencia

De manera análoga, la potencia promedio de una señal f(t) contínua, se define como:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$$

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Energía y Potencia

El cálculo de la energía total en el caso contínuo o discreto, puede no converger para algunas señales.

Por ejemplo, si f(t) o f(n) son iguales todo el tiempo a un valor constante distinto de cero.

En este caso, estas señales tienen energía infinita.

Las señales periódicas tienen energía infinita y en su mayoría potencia promedio finita.

Las señales de duración limitada son señales de energía finita.

CITA
Centro de Investigación en Tecnologías de Audio
Pontificia Universidad Católica de Chile

Energía y Potencia

Tres tipos de señales:

De energía total finita $E_\infty < \infty \rightarrow P_\infty = 0$

Potencia promedio finita $P_\infty < \infty \rightarrow E_\infty = \infty$

De energía y potencia promedio infinitas

$$E_\infty = \infty, P_\infty = \infty$$