IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Examen

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2023
Tiempo: 2.5 hrs.
Puntos: 40
Fecha: 10/07/2023

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo ocho carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (4 pts.) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-2t}\sqcap(t)$$

Calcule la salida a la entrada

$$f(t) = \sqcap\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Solución

Observamos que $\sqcap(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}) = \sqcap(t) - \sqcap(t-3)$. En el dominio de Laplace, tenemos que

$$G(s) = F(s)H(s) = \frac{1}{s+2}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right) = \frac{1-e^{-3s}}{s(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)} - \frac{e^{-3s}}{s(s+2)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Al tomar la inversa, al lado izquierdo tenemos una función y al lado derecho la misma función desplazada 3 unidades.

Para calcular la inversa, usamos el teorema de los residuos

$$\lim_{s\to 0} \frac{e^{st}s}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$\lim_{s\to -2} \frac{e^{st}(s+2)}{s(s+2)} = -\frac{e^{-2t}}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo tanto

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)\sqcap(t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2(t-3)}}{2}\right)\sqcap(t-3) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por favor mire la página siguiente ...

2. (4 pts.) Un filtro LTI recibe la entrada $f(t) = 4\cos(2\pi t) + 8\sin(3\pi t)$ y produce la salida $g(t) = -2\cos(2\pi t)$. Escriba todo lo que se pueda decir de la respuesta de frecuencia del filtro.

Solución

La entrada contiene componentes sinusoidales de frecuencia 1 y $\frac{3}{2}$ → **2 pts.** Como en la salida solo está presente la frecuencia 1, entonces lo único que puede deducirse es que

$$H(1) = -\frac{1}{2} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

y

$$H\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

3. (4 pts.) Suponga que la señal f con Serie de Fourier

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \cos(\frac{3nt}{2})$$

pasa por un sistema con respuesta de frecuencia dada por

$$|H(u)| = \sqcap\left(\frac{\pi u}{2}\right), \quad \angle H(u) = -\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u)$$

¿Cual es la salida del sistema?

Solución

La frecuencia fundamental de la señal f es $\frac{3}{4\pi}$ → **1 pt.** Como la respuesta de magnitud deja pasar frecuencias hasta $\frac{1}{\pi}$, entonces solo la componente de frecuencia fundamental estará en la salida → **1 pt.** Respecto a la fase, la sinusoide se desfasará una cantidad igual a la respuesta de fase evaluada en la frecuencia fundamental → **1 pt.** Entonces

$$g(t) = 2\cos(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

4. (4 pts.) Considere un filtro discreto FIR de promedio móvil con respuesta al impulso

$$h[n] = \frac{1}{3}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\right)$$

Calcule la respuesta de frecuencia $H(u)$ del sistema en términos de alguna función sinusoidal.

Solución

La transformada Z de la respuesta al impulso es

$$H(z) = \frac{1}{3}\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

con ROC todo el plano z. Entonces la respuesta de frecuencia es

$$\tilde{H}(u) = H(z)\Big|_{z=e^{i2\pi u}} = \frac{1}{3}\left(1 + e^{-i2\pi u} + e^{-i4\pi u}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$\tilde{H}(u) = \frac{e^{-i2\pi u}}{3}\left(e^{-i2\pi u} + 1 + e^{i2\pi u}\right) = \frac{e^{-i2\pi u}}{3}\left(1 + 2\cos(2\pi u)\right) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

5. (4 pts.) Encuentre la respuesta al impulso del sistema inicialmente en reposo descrito por la ecuación de diferencias

$$g[n] = 2.5g[n-1] - g[n-2] + f[n] + f[n-1]$$

Solución

En el dominio z tenemos

$$G(z)(1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}) = F(z)(1 + z^{-1})$$

por lo que

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - 2.5z + 1} = \frac{z^2 + z}{(z-2)(z-0.5)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La respuesta al impulso la calculamos mediante el método de los residuos

$$\lim_{z\to 0.5} \frac{z^{n-1}(z^2+z)}{(z-0.5)(z-2)}(z-0.5) = \frac{(0.5)^{n-1}((0.5)^2+0.5)}{-1.5} = -\frac{2}{3}(0.5^{n+1}+0.5^n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$\lim_{z\to 2} \frac{z^{n-1}(z^2+z)}{(z-0.5)(z-2)}(z-2) = \frac{(0.5)^{n-1}((0.5)^2+0.5)}{-2.5} = -\frac{2}{5}(2^{n+1}+2^n) = -\frac{6}{5}(2)^n \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo que

$$h[n] = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{6}{5}(2)^n\right)\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

6. (4 pts.) Determine la estabilidad del sistema oscilador armónico simple descrito por la ecuación diferencial

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = f(t)$$

Solución

En el dominio de Laplace la ecuación es

$$G(s)(s^2 + \omega^2) = F(s)$$

por lo que función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

cuyos polos están en $\pm i\omega$ $\rightarrow$ **1 pt.** , es decir están sobre el eje imaginario $\rightarrow$ **1 pt.** por lo que el sistema es críticamente estable $\rightarrow$ **1 pt.**

7. (4 pts.) Calcule $\mathcal{F}\{|x|\}(u)$, es decir la Transformada de Fourier de la función valor absoluto de x.

Solución

Sabemos que $f(x) = |x| = x\,\mathrm{sgn}(x)$ $\rightarrow$ **1 pt.** por lo que

$$F(u) = \mathcal{F}\{x\} * \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(x)\} = \frac{i}{2\pi}\delta' * \frac{1}{i\pi}\text{v.p.}\{\frac{1}{u}\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\delta * \frac{d}{du}\{\frac{1}{i\pi}\text{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\} = \frac{i}{2\pi}\frac{i}{\pi}\text{v.p.}\{\frac{1}{u^2}\} = \frac{i^2}{2\pi^2}\text{v.p.}\{\frac{1}{u^2}\} = -\frac{1}{2\pi^2}\text{v.p.}\{\frac{1}{u^2}\} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

8. (4 pts.) Suponga que $f(t)$ puede ser muestreada sin aliasión con período de muestreo T_s. ¿Qué período de muestreo se necesitaría para muestrear sin aliasión la señal $f^3(t)$?

Solución

Si $f(t)$ puede ser muestreada sin aliasión, $F(u)$ es de ancho de banda limitado $\rightarrow$ **1 pt.** En el dominio de Fourier, la transformada de Fourier de la señal $f^3(t)$ es $(F(u) * F(u)) * F(u)$ $\rightarrow$ **1 pt.** , que tiene el triple de ancho que $F(u)$ $\rightarrow$ **1 pt.** , por lo que el período de muestreo necesario es menor que un tercio de T_s, es decir $< \frac{T_s}{3}$ $\rightarrow$ **1 pt.**

9. (4 pts.) Suponga que si la entrada a un sistema LTI es la señal

$$f(t) = \sqcap(x - \frac{1}{2})$$

la salida es

$$g(t) = \mathrm{ramp}(t) - 2\,\mathrm{ramp}(t-1) + \mathrm{ramp}(t-2)$$

donde ramp es la señal rampa, es decir $\text{ramp}(t) = t\sqcap(t)$.
¿Cual es la salida si la entrada es la señal $\delta - \delta_1$ (o, abusando notación $\delta(t) - \delta(t-1)$)?

Solución

Observamos que la entrada $\delta - \delta_1$ es la derivada de la entrada original → **1 pt.** , por lo que la salida también debe ser la derivada de la salida original → **1 pt.** , es decir

$$\sqcap(t) - 2\sqcap(t-1) + \sqcap(t-2) \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

10. (4 pts.) Calcule la convolución cíclica de período 4 entre las secuencias

$$[\underline{1}, 2, 3] \;\; y \;\; [\underline{1}, 2, 3, 4]$$

Solución

Para calcular la convolución cíclica de período 4 agregamos un cero a la señal de largo 3, → **1 pt.** entonces se debe calcular

$$[\underline{1}, 2, 3, 0] \circledast_4 [\underline{1}, 2, 3, 4] \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

$$= [\underline{1}, 2, 3, 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [\underline{18}, 16, 10, 16] \rightarrow \textbf{2 pts.}$$