Ayudantía 8

DTFT y DFFT

Señales y Sistemas

21 de octubre de 2022

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Resumen: DTFT

La **Transformada de Fourier de tiempo discreto** es para señales que son:

- Discretas en el tiempo.
- Periódicas y continuas en la frecuencia.

Se define como:

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i2\pi unT}$$

Y su inversa:

$$f[n] = T \int_0^{\frac{1}{T}} \tilde{F}(u) e^{i2\pi unT} du$$

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Ejercicio 1: DFFT

Encuentre la DTFT de la señal discreta $f[n] = \alpha^n \ u_n$ considerando un período de muestreo T y $0 \leq \alpha \leq 1$:

Partimos escribiendo la definición de la DTFT:

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \ u_n \ e^{-i2\pi unT}$$

Sabemos que el escalón nos restringe la sumatoria:

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \ e^{-i2\pi unT}$$

Esto es lo mismo que

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \ e^{-i2\pi uT})^n$$

Y asumiendo que $\alpha \ e^{-i2\pi uT}$ es menor a 1, podemos aplicar la fórmula de la sumatoria geométrica, por lo que nos queda:

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-i2\pi uT}}$$

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Ejercicio 2: DTFT

Demuestre la propiedad de la convolución lineal para la DTFT

- Estamos buscando la siguiente propiedad:

$$f[n] *_l g[n] \xrightarrow{DTFT} \bar{\mathcal{F}}(u)\bar{\mathcal{G}}(u)$$

- Escribimos la definición de la convolución lineal y luego aplicamos la definición de la DTFT:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-k]g[k] \right) e^{-i2\pi unT}$$

- Hacemos el cambio de variable $n - k = m$ y ordenamos un poco, por lo que nos queda lo siguiente:

$$\sum_{k+m=-\infty}^{\infty} f[m] \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \right) e^{-i2\pi u(m+k)T}$$

Ejercicio 2: DTFT

- Nos damos cuenta que k es una constante en nuestra sumatoria de m, por lo que es posible aproximar $k + m = -\infty$ a $m = -\infty$ para el limite inferior, lo mismo para el superior, solo que queda $m = \infty$:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \right) e^{-i2\pi u(m+k)T}$$

- Volviendo a ordenar:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] e^{-i2\pi umT} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \right) e^{-i2\pi ukT}$$

- Que sabemos que por definición es:

$$\bar{\mathcal{F}}(u)\bar{\mathcal{G}}(u)$$

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Resumen: DFFT

La **Transformada de Fourier de frecuencia discreta** es para señales que son:

- Periódicas y continuas en el tiempo.
- Discretas en la frecuencia.

Lo que la transforma en la serie de Fourier.
Se define como:

$$F[K] = U \int_0^{\frac{1}{U}} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi kxU} dx$$

Y su inversa:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{i2\pi xUk}$$

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Ejercicio 1: DFFT

Encuentre la DFFT de una señal periódica rectangular de período T, que vale 1 entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y vale 1 entre 3T/4 y T.

- Para realizar este ejercicio, analizamos que es un tren de pulsos de un rect de ancho 4. Al ser un rect tenemos la *intuición* de que en Fourier debería ser un sinc (o similar). Resolvemos aplicando la definición de DFFT:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\pi k \frac{x}{T}} f(x) dx$$

- Dado que $f(x) = 1$ entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y 1 entre 3T/4 y T podemos dividir esto en 3 integrales:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} e^{-i2\pi k \frac{x}{T}} \cdot 1 dx + \int_{T/4}^{3T/4} e^{-i2\pi k \frac{x}{T}} \cdot 0 dx + \int_{3T/4}^{T} e^{-i2\pi k \frac{x}{T}} \cdot 1 dx \right]$$

Ejercicio 1: DFFT

Encuentre la DFFT de una señal periódica rectangular de período T, que vale 1 entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y vale 1 entre 3T/4 y T.

- Luego, resolviendo llegamos a:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{-i2\pi k} \left[e^{-i2\pi \frac{k}{4}} - 1 + e^{-i2\pi k} - e^{-i2\pi \frac{3k}{4}} \right]$$

- Resolviendo y reemplazando las exponenciales por su fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k} \left[\cos\left(2\pi \frac{k}{4}\right) - i \sin\left(2\pi \frac{k}{4}\right) - 1 + \cos(2\pi k) - i \sin(2\pi k) - \cos\left(2\pi \frac{3k}{4}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{3k}{4}\right) \right]$$

Ejercicio 1: DFFT

Encuentre la DFFT de una señal periódica rectangular de período T, que vale 1 entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y vale 1 entre 3T/4 y T.

- Por simetría en el círculo unitario $\cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right) = \cos\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)$ (ver video ayudantía para aclarar).
  Si k es un entero (válido en el mundo discreto): $\cos(2\pi k) = 1$ y $\sin(2\pi k) = 0$. Luego, considerando los dos puntos anteriores, la expresión de $\tilde{F}[k]$ se reduce a:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[-i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)\right]$$

- Dado k entero y usando simetrías tendremos que:
  $\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) = -\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)$, por lo que:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[-2i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right)\right]$$

Ejercicio 1: DFFT

Encuentre la DFFT de una señal periódica rectangular de período T, que vale 1 entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y vale 1 entre 3T/4 y T.

- Simplificando:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

- Haciendo un cambio de variable (sugiero usar v=k/2), tendremos finalmente:

$$\boxed{\tilde{F}[k] = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}\right)}$$

Contenido

1. Resumen: DTFT
2. Ejercicio 1: DTFT
3. Ejercicio 2: DTFT
4. Resumen: DFFT
5. Ejercicio 1: DFFT
6. Ejercicio 2: DFFT

Ejercicio 2: DFFT

Demuestre a partir de la expresión:

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t - n\tau)$$

Donde τ es una constante real.
La fórmula de Poisson:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(k)$$

Ejercicio 2: DFFT

- Para esto tomamos la DFFT de $\phi(t)$:
  (Propongo demostrar que ϕ es periódica para su aprendizaje personal).

$$\Phi[k] = U \int_0^{1/U} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} f(t - n\tau) \right] e^{-i2\pi kUx} dx$$

- Dado que la integral es un operador lineal:

$$\Phi[k] = U \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{1/U} f(t - n\tau) \right] e^{-i2\pi kUx} dx$$

Ejercicio 2: DFFT

- Dado que estamos sumando infinitas porciones de integrales, esto es como **tomar la integral entre** $-\infty$ e ∞, lo que transforma la suma de las integrales en la **transformada de Fourier de f**(recomiendo reflexionar sobre eso). Luego:

$$\Phi[k] = UF(u)$$

- **AHORA:** sabemos que los coeficientes complejos de fourier vienen de la DFFT, por lo que podemos escribir $\phi(t)$ en su forma de serie de Fourier:

$$\phi(t))sum_{-\infty}^{infty} C_k e^{-i2\pi Ut}$$

Ejercicio 2: DFFT

- Reemplazo ϕ y los coeficientes de Fourier:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(t - n\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} UF(u)e^{-i2\pi kUt}$$

- Tomando U=1 y t = 0 obtengo:

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(k)}$$