Prueba 4

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Encuentre la respuesta al impulso de un sistema discreto causal que aproxime lo mejor posible al sistema no causal que calcula el promedio móvil (respuesta al impulso: $h[n] = (1\ \underline{1}\ 1)/3$), para cada una de las siguientes suposiciones respecto del valor esperado de la próxima muestra de la entrada

   (a) $\mathrm{E}\{f[n+1]\} = f[n]$.
   (b) $\mathrm{E}\{f[n+1]\} = \frac{1}{2}(f[n] + f[n-1])$.
   (c) $\mathrm{E}\{f[n+1]\} = f[n] + \Delta$, con $\Delta = f[n] - f[n-1]$.

   Resultado: El sistema que interesa aproximar es

$$g[n] = \frac{1}{3}(f[n-1] + f[n] + f[n+1])$$

   Para que sea causal debemos reemplazar $f[n+1]$ con la mejor aproximación posible, $\mathrm{E}\{f[n+1]\}$:

   (a)

$$g[n] = \frac{1}{3}(f[n-1] + f[n] + f[n]) = \frac{1}{3}(f[n-1] + 2f[n])$$

   Es decir,

$$h[n] = (\underline{2}\ 1)/3$$

   (b)

$$g[n] = \frac{1}{3}(f[n-1] + f[n] + \frac{1}{2}(f[n] + f[n-1])) = \frac{1}{2}(f[n-1] + f[n])$$

   Es decir,

$$h[n] = (\underline{1}\ 1)/2$$

   (c)

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{1}{3}(f[n-1] + f[n] + f[n] + \Delta) \\ &= \frac{1}{3}(f[n-1] + f[n] + f[n] + f[n] - f[n-1]) \\ &= f[n] \end{aligned}$$

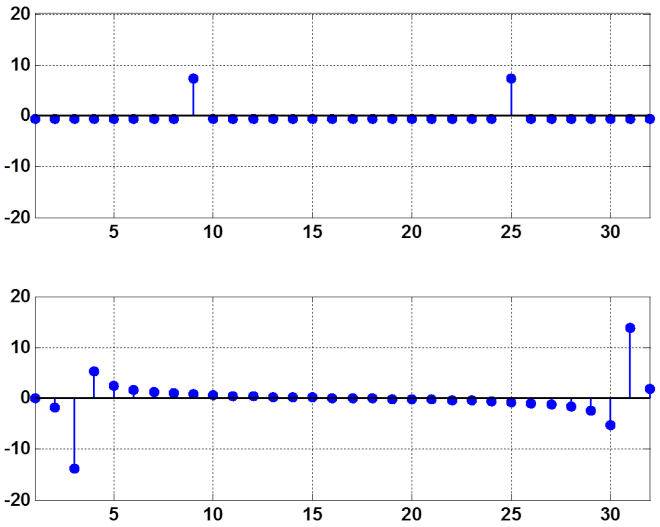
   Es decir,

$$h[n] = (\underline{1})$$

2. [6 ptos] Se tiene un registro de audio que se sabe corresponde a la suma de dos sinusoides reales. El registro tiene 32 muestras, tomadas cada 100 us. Los gráficos de la figura fueron obtenidos con los siguientes comandos Matlab, donde F son los datos en el tiempo.

```
FF = fft(F);
subplot(2,1,1);
stem(real(FF)); axis([1 32 -20 20]);grid
subplot(2,1,2);
stem(imag(FF)); axis([1 32 -20 20]);grid
```

Encuentre lo más aproximado que pueda la frecuencia de cada sinusoide, y la amplitud relativa entre ellas.



Resultado: Comenzamos por encontrar el periodo de muestreo en la frecuencia. Tenemos $N = 32$ y $T = 0.1$ ms, por lo que de $NUT = 1$ sabemos que $U = 1/3.2 \approx 0.31$ kHz. El primer gráfico contiene la parte real y el segundo la imaginaria. Mentalmente podemos imaginarnos la magnitud. Es claro que habrá un pico en la muestra 3 y otro en la 9.

Veamos primero la muestra 3. Se puede apreciar que hubo derrame porque parte de la energía se fue a la muestra 4, por lo que podemos suponer que la frecuencia de esa sinuosoide estará entre esas dos muestras. La muestra 3 corresponde a $k = 2$ (nótese que el primer índice de Matlab es 1), es decir corresponde a la frecuencia $2U \approx 0.62$ kHz. La muestra 4 corresponde a $3U \approx 0.93$ kHz. Podemos decir que la frecuencia de la primera sinusoide es aproximadamente 750 Hz (un poco más cerca de 630 que de 930).

La muestra 4 corresponde a una frecuencia de $8U \approx 2.5$ kHz.

En cuanto a las amplitudes, se puede decir que la primera es aproximadamente el doble que la segunda.

3. [6 ptos] Interesa calcular la DFT de dos señales reales, de largo N cada una: $f[n]$ y $g[n]$. Para eso se propone usar una sola vez el algoritmo FFT para calular DFT$\{f[n]+ig[n]\}$. Encuentre las transformadas $F[k]$ y $G[k]$ de las dos señales a partir del resultado de la FFT.

Resultado: Sea $f_n \longrightarrow F_k$ y $g_n \longrightarrow G_k$. Una propiedad fundamental que debemos usar es que F_k y G_k son hermitianas, es decir

$$\Re F_k = \Re F_{N-k}, \quad \Im F_k = -\Im F_{N-k}, \quad \Re G_k = \Re G_{N-k}, \quad \Im G_k = -\Im G_{N-k}$$

Sea P_k la transformada de $p_n = f_n + ig_n$. Es decir,

$$\begin{aligned} P_k &= F_k + iG_k \\ &= \Re F_k - \Im G_k + i(\Im F_k + \Re G_k) \end{aligned}$$

Las partes reales e imaginarias de P_k serán (usando que son hermitianas)

$$\begin{aligned} \Re P_k = \Re F_k - \Im G_k &= \Re F_{N-k} + \Im G_{N-k} \\ \Re P_{N-k} &= \Re F_{N-k} - \Im G_{N-k} \\ \Im P_k = \Im F_k + \Re G_k &= -\Im F_{N-k} + \Re G_{N-k} \\ \Im P_{N-k} &= \Im F_{N-k} + \Re G_{N-k} \end{aligned}$$

De donde sumando y restando se pueden despejar las partes reales e imaginarias de F y G.

$$\begin{aligned} 2\Re F_{N-k} &= \Re P_k + \Re P_{N-k} \\ 2\Im F_{N-k} &= \Re P_k - \Re P_{N-k} \\ 2\Re G_{N-k} &= \Im P_k + \Im P_{N-k} \\ 2\Im G_{N-k} &= -\Im P_k + \Im P_{N-k} \end{aligned}$$

4. [6 ptos] Se define la transforma P de la señal $f[n]$ de largo N, con p complejo, de la siguiente manera:

$$F(p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-pn/N}$$

Donde

$$\mathrm{Im}\{p\} = 2\pi k \;\; \text{con } k = 0...N-1$$

Dado $F(p)$ encuentre su inversa $f[n]$.

Resultado: Notamos cierto parecido con la transformada de Laplace por lo que conviene definir $p = \sigma + i2\pi k$. La PT será

$$\begin{aligned} F(\sigma + i2\pi k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\sigma n/N} e^{-i2\pi nk/N} \\ &= \mathrm{DFT}\{f[n] e^{-\sigma n/N}\} \end{aligned}$$

La inversa la podemos encontrar comenzando con

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT}\{f[n]e^{-\sigma n/N}\} &= F(p) \\
f[n]e^{-\sigma n/N} &= \mathrm{DFT}^{-1}\{F(p)\} \\
f[n] &= e^{\sigma n/N}\mathrm{DFT}^{-1}\{F(p)\} \\
&= e^{\sigma n/N}\sum_{k=0}^{N-1} F(p)e^{i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} F(p)e^{\sigma n/N}e^{i2\pi nk/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} F(p)e^{pn/N}
\end{aligned}$$