Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 3

Entrega: 23 de octubre a las 23:59 hrs.

Instrucciones generales

1. Para la parte de implementación, debe adjuntar un código desarrollado en Python (*.ipynb*).
2. Deben entregar un PDF con el desarrollo llamado *Apellido*_Tarea3.pdf (donde *Apellido* es su apellido).
3. La tarea es individual, pero pueden comentar las preguntas con sus compañeros.
4. Cada eje de los gráfico debe incluir un nombre descriptivo y su respectiva unidad.

Ejercicios Teóricos

1. Sea un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$y'''(t) + 6y''(t) + 8y'(t) = x''(t) + 4x'(t) + 3x(t)$$

   a)[**0.5 puntos**] Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

   b)[**0.5 puntos**] Sin calcular $h(t)$, encuentre $\lim_{t\to\infty} h(t)$ la respuesta al impulso del sistema.

   c)[**0.5 puntos**] Bosqueje el diagrama de polos y ceros del sistema.

   d)[**0.5 puntos**] Calcule $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema.

2. [**2 puntos**] La señal $x(t) = \cos^2(2\pi \cdot 2000 \cdot t)\cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t)$ es muestreada a $F_s = 9000$ Hz y luego reconvertida a una señal analógica $y(t)$. Escriba la señal de salida $y(t)$.

3. Suponga que tiene una piscina, y que en ella deja caer un piedra. Para caracterizar el flujo de la piscina, decide hacer un video, y se da cuenta que en este video se ven vórtices que giran en el agua. El más pequeño de estos vórtices es de 3 [mm] y además se da cuenta que el más rápido de estos vórtices da una vuelta completa en 0.05 [seg].

- **[0.4 puntos]** Determine cuál es la frecuencia espacial mínima de muestreo del fluído.
- **[0.4 puntos]** Determine cuál es la frecuencia temporal mínima de muestreo del fluído.
- **[0.4 puntos]** Ahora suponga que usted debe filtrar cada *frame* del video. Al hacerlo se ven anillos que distorsionan la imagen. ¿Qué fenómeno está viendo?
- **[0.4 puntos]** ¿Qué tipo de filtro se pudo haber usado? Justifique.
- **[0.4 puntos]** Determine si esto afecta las frecuencias espaciales, temporales o ambas. Justifique.

4. El teorema de Parseval relaciona los dominios de tiempo y frecuencia mediante el promedio de energía de una señal según la relación:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Donde T es el período de la señal $x(t)$ y a_k los coeficientes de su serie de Fourier.

a) **[1 punto]** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier de $y(t) = |x(t)|^2$. *Hint:* $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$

b) **[1 punto]** Use el resultado previo para demostrar el teorema de Parseval.

Ejercicios de Implementación

1. La convolución discreta lineal se define como:

$$f[n] *_l g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-m]g[m]$$

Por otro lado, la convolución cíclica se define como:

$$f[n] * g[n] = \sum_{m=0}^{Q-1} f[n-m|P]g[m]$$

donde P es el largo de la secuencia $f[n]$ y Q es el largo de la secuencia $g[n]$ ($P \geq Q$).

a) **[1 punto]** Genere una función en *Python* que permita calcular la convolución discreta lineal entre dos señales de largo M y N, respectivamente.

b) **[1 punto]** Genere otra función en *Python* que permita calcular la convolución cíclica entre dos señales de largo P y Q, respectivamente.

c) **[1 punto]** Un sistema LTI continuo recibe como entrada $f(t) = \sqcap((t-5)/5)$. La respuesta al impulso del sistema es igual a $h(t) = (0.9)^t \sin(\pi t)u(t)$. Para conocer la salida del sistema, usted obtiene 100 muestras de la señal de entrada a una tasa de muestreo de 0.1 segundos. Además, considere que:

1) La primera muestra se toma en $t = 0$.
2) El número de muestras de $h(t)$ es libre, pero debe estar justificado.
3) Se debe justificar qué expresión de convolución se considera.

Grafique la señal discreta que se vería en la salida del sistema.

d) **[1 punto]** Grafique la salida si se hubiera elegido la otra forma de convolución. ¿Los resultados son equivalentes? De existir diferencias, explique a qué se deben.

2. Esta pregunta tiene cómo objetivo que se familiaricen con los conceptos fundamentales de los filtros, además de poder graficar e interpretar el espectro de un filtro.

a) **[0.5 puntos]** En el contexto del curso, ¿qué son los filtros y para qué se usan? ¿Cómo se describen?

b) **[0.5 puntos]** Defina las siguientes características de un filtro:

- Frecuencia de corte.
- Banda pasante.
- Banda rechazada.
- Ancho de banda.

c) **[0.5 puntos]** Para cada uno de los siguientes tipos de filtros, descríbalos según las características descritas anteriormente:

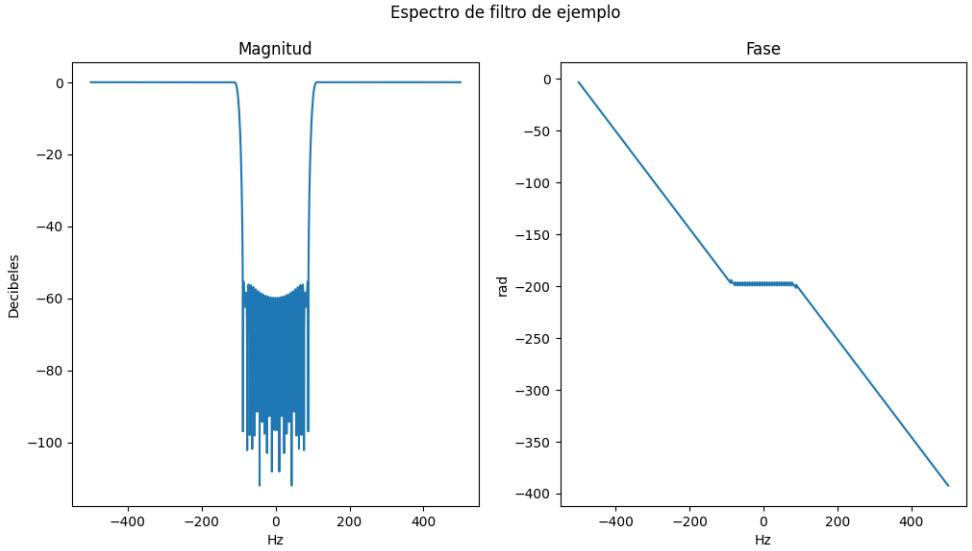
- Filtro pasa-bajos.
- Filtro pasa-altos.
- Filtro pasa-banda.
- Filtro rechaza-banda.
- Filtro resonador.
- Filtro notch.

d) **[0.5 puntos]** Elija tres de los filtros anteriores, y busque un ejemplo de una aplicación de este en la vida real. Para hacer esto tiene que definir su propósito e incluir una imagen de la magnitud y fase del filtro (pueden usar imágenes de una bibliografía confiable). Además, a partir del gráfico comente sobre las características del filtro (recuerden el inciso a)).

e) **[1 punto]** Escriba una función en *Python* que tome tres inputs, un *array* de numpy de la respuesta al impulso de un filtro, el periodo de muestreo y el número de puntos del *array*, y grafique la magnitud (en dB) y fase del filtro en una misma figura. Para lograr esto va a tener que tomar la DFT de la respuesta al impulso, ya que esto corresponde a la respuesta en frecuencia del filtro. Recuerden incluir

la función en el .pdf y expliquen detalladamente su funcionamiento.

Si implementan correctamente la función, deberían llegar al siguiente resultado si usan la respuesta al impulso contenida en el archivo *impulse_response0.npy*:



Consideraciones adicionales

- Las cuatro respuestas al impulso incluidas en Canvas fueron muestreadas a $1000Hz$ (deberían poder concluirlo viendo la figura anterior).
- Los gráficos tienen que estar centrados en $0Hz$ (la función *fftshift* de scipy les podría servir).
- El valor máximo de la magnitud debe estar en $0dB$ (deben normalizar por el valor máximo).
- Recuerden que en el primer taller del curso vimos como graficar correctamente la fase de un *array* complejo.
- Recuerden que cuando toman la fft de una señal el resultado es un *array*, por lo que si quieren obtener el dominio del espectro deben usar el teorema de Nyquist y NUT=1.

f) **[1 punto]** Utilice la función diseñada en el inciso anterior para caracterizar los otros tres filtros incluidos en Canvas (*impulse_response1.npy*, *impulse_response2.npy*, *impulse_response3.npy*). Incluyan las figuras generadas y comentan respecto al tipo de filtro, frecuencia/s de corte, banda pasante y banda rechazada.