IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS
Interrogación 4
Prof. Rodrigo F. Cádiz

2do. semestre 2019
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 32
Fecha: 04/12/2019

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes. No se pueden consultar libros, ni internet. Si se pueden consultar las carillas de apuntes de interrogaciones anteriores.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.
- Suba sus respuestas en formato pdf a Gradescope, indicando exactamente en qué hoja está la respuesta a cada pregunta, antes del plazo indicado.
- Recuerde el código de honor de la universidad: "Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en las relaciones con los demás integrantes de la comunidad y en la realización de todo trabajo, particularmente en aquellas actividades vinculadas a la docencia, al aprendizaje y la creación, difusión y transferencia del conocimiento. Además, me comprometo a velar por la dignidad e integridad de las personas, evitando incurrir en y, rechazando, toda conducta abusiva de carácter físico, verbal, psicológico y de violencia sexual. Del mismo modo, asumo el compromiso de cuidar los bienes de la Universidad".

---

1. (10 pts.) **Transformada Z y sistemas LTI**

   (a) (2 pts.) Considere un sistema discreto causal LTI cuya función de transferencia es:

   $$H(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

   donde $a \in \mathbb{R}$ y $|a| < 1$. Determine para qué valor o valores de b la respuesta de frecuencia $H(e^{i\omega})$ satisface la condición $|H(e^{i\omega})| = 1$, $\forall \omega$, lo que se conoce como un filtro pasa-todo.

   (b) (2 pts.) Encuentre analíticamente la Transformada Z inversa de

   $$F(z) = \log\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right), \quad |z| > |a|$$

   (c) (2 pts.) La respuesta al escalón de un sistema discreto LTI causal es $2(\frac{1}{3})^n \sqcap[n]$. Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema y la salida cuando la entrada es $f[n] = (\frac{1}{2})^n \sqcap[n]$.

   (d) (4 pts.) Considere un sistema discreto causal LTI cuya respuesta al impulso es de duración finita $h[n] = \{\underline{2}, 2, -2, -2\}$. Encuentre una expresión analítica para la respuesta de frecuencia del sistema $H(e^{i\omega})$ y bosqueje su magnitud y su fase.

Solución

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

(a) La respuesta de frecuencia se obtiene haciendo el cambio de variables $z = e^{i\omega}$. Por lo tanto la respuesta de frecuencia es

$$H(e^{i\omega}) = \frac{b + e^{-i\omega}}{1 - ae^{-i\omega}}$$

La condición que buscamos es,

$$|H(e^{i\omega})| = \left| \frac{b + e^{-i\omega}}{1 - ae^{-i\omega}} \right| = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

es decir,

$$|b + e^{-i\omega}| = |1 - ae^{-i\omega}| = 1$$

$$|b + \cos(\omega) - i\sin(\omega)| = |1 - a\cos(\omega) + ia\sin(\omega)|$$

$$\sqrt{b^2 + 2b\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = \sqrt{1 - 2a\cos(\omega) + a^2\cos^2(\omega) + a^2\sin^2(\omega)}$$

$$b^2 + 2b\cos(\omega) + 1 = 1 - 2a\cos(\omega) + a^2$$

La anterior igualdad se cumple para $b = -a \rightarrow$ **1 pt.**.

(b) Para esta solución asumiremos el logaritmo natural, pero si se asume logaritmo en base 10 aparece un factor de log(10) en la solución. Ambas respuestas se consideran correctas.

Primero notamos que

$$F(z) = -\log(1 - az^{-1})$$

Tomando la derivada:

$$\frac{d}{dz}F(z) = -\frac{az^{-2}}{1 - az^{-1}}$$

y muliplicando por $-z$:

$$-z\frac{d}{dz}F(z) = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, considerando el par

$$a^n \sqcap[n] \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

multiplicando por a y deplazando en una unidad:

$$a^n \sqcap[n-1] \rightarrow \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

Y ahora dividiendo por n (considerando que una señal multiplicada por n equivale a derivar y multiplicar por $-z$ en el dominio z):

$$\frac{a^n}{n}\sqcap[n-1] \rightarrow -\log(1-az^{-1}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c) Tomando Transformada Z:

$$H(z) = \frac{\frac{2}{1-(\frac{1}{3})z^{-1}}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}}$$

Para calcular la inversa podemos utilizar el método de los residuos. Sabemos que hay un polo en $z = 1/3$. Entonces, el residuo correspondiente a ese polo es:

$$\lim_{z\to 1/3}\{z^{n-1}\frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}}\left(z-\frac{1}{3}\right)\} = -4(\frac{1}{3})^n$$

Notamos ademas que el término z^{n-1} introduce un polo en $z = 0$ para $n = 0$. Entonces este residuo es:

$$\lim_{z\to 0} z^{-1}\frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}}z = 6$$

Por lo tanto la respuesta al impulso es

$$h[n] = 6\delta[n] - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

En este caso, hay que calcular la inversa de:

$$G(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\frac{(2z-2)}{z-\frac{1}{3}}$$

Como vemos, hay dos polos en $z = 1/2$ y $z = 1/3$, por lo que los residuos son:

$$\lim_{z\to 1/3}\{z^{n-1}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}}(z-1/3)\} = 8\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

y

$$\lim_{z\to 1/2}\{z^{n-1}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}}(z-1/2)\} = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Por lo que la salida pedida es

$$g[n] = \left(-6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

(d) La respuesta de frecuencia es :

$$H(e^{i\omega}) = 2 + 2e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega} - 2e^{-i3\omega} = 2(1 - e^{-i3\omega}) + 2(e^{-i\omega} - e^{-i2\omega}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Factorizando por $2e^{-i3\omega/2}$:

$$H(e^{i\omega}) = 2e^{-i3\omega/2}(e^{i3\omega/2} - e^{-i3\omega/2}) + 2e^{-i3\omega/2}(e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2})$$

$$H(e^{i\omega}) = ie^{-i3\omega/2}\left(\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)\right) = e^{i(\pi/2 - 3\omega/2)}\left(\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)\right)$$

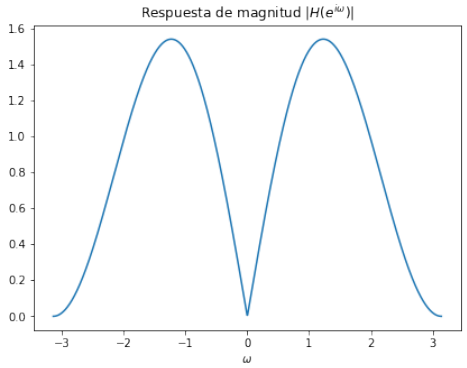
Por lo tanto el módulo es

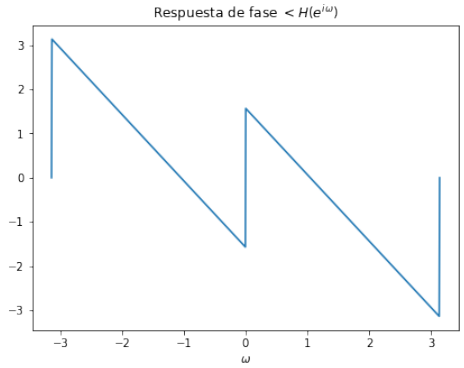
$$|H(e^{i\omega})| = \left|\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)\right| \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y la fase es

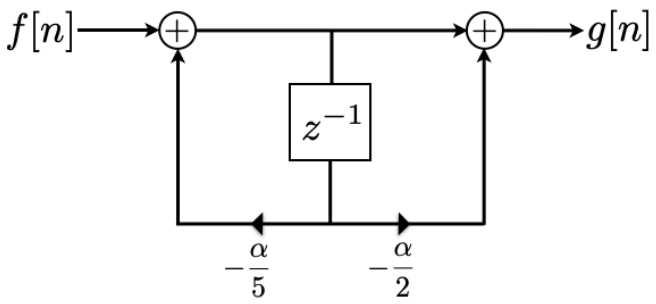
$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \pi/2 - 3\omega/2, & \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) > 0 \\ -\pi/2 - 3\omega/2, & \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) < 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

El bosquejo de ambas respuestas $\rightarrow$ **1 pt.** se puede ver en la siguiente figura:





2. (6 pts.) **Diagrama de bloques.** Considere el sistema discreto causal descrito por el siguiente diagrama de bloques, donde la entrada es $f[n]$ y la salida es $g[n]$.



(a) (2 pts.) Determine la función de transferencia del sistema $H(z)$.

(b) (1 pto.) Grafique $H(z)$ mediante un diagrama de polos y ceros.

(c) (1 pto.) Determine la región de convergencia de $H(z)$.

(d) (1 pto.) Determine los valores de α para los cuales el sistema es estable.

(e) (1 pto.) Determine la salida $g[n]$ cuando $\alpha = 1$ y la entrada es $f[n] = (\frac{2}{5})^n \ \ \forall n$.

Solución

(a) Para resolver este problema mediante Transformada Z, es útil considerar una variable auxiliar $w[n]$, que es la señal entre los dos sumadores. Entonces tenemos las ecuaciones:

$$w[n] = f[n] - \frac{\alpha}{5} w[n-1]$$

y

$$g[n] = w[n] - \frac{\alpha}{2} w[n-1]$$

Expresando ambas ecuaciones en el dominio Z:

$$(1 + \frac{\alpha}{5} z^{-1}) W(z) = F(z)$$

y

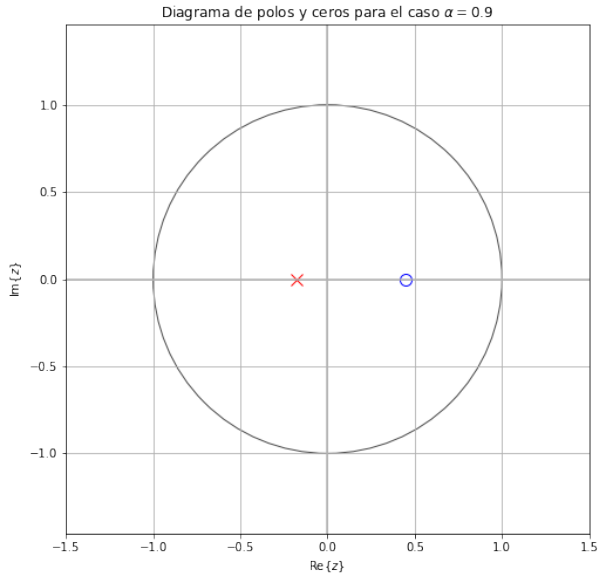
$$G(z) = (1 - \frac{\alpha}{2} z^{-1}) W(z)$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda podemos encontrar la relación entre la entrada y la salida:

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{(1 - \frac{\alpha}{2} z^{-1})}{(1 + \frac{\alpha}{5} z^{-1})} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) El diagrama de polos y ceros, para el caso $a = 0.9$, se muestra en la figura $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...



(c) Como es sistema es causal y el polo está en $z = -\frac{\alpha}{5}$, entonces la ROC es

$$|z| > \left|\frac{\alpha}{5}\right| \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(d) Para que el sistema sea estable, la ROC debe contener al círculo unitario, es decir:

$$\left|\frac{\alpha}{5}\right| < 1$$

lo que implica que

$$|\alpha| < 5 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(e) Si $\alpha = 1$ entonces

$$H(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + \frac{1}{5}z^{-1})}$$

Entonces, dado que las exponenciales son autofunciones de los sistemas LTI, la salida pedida es:

$$g[n] = H\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

3. (8 pts.) **Guitarra**. Implemente un *detector de cuerdas de guitarra*. Esta es una buena oportunidad para poner en acción sus conocimientos sobre Transformada Z y de la evaluación geométrica de la respuesta de frecuencia. Las cuerdas de la guitarra son seis y se afinan en las siguientes frecuencias:

- Sexta cuerda $f = 82,406891$ Hz. Nota: MI
- Quinta cuerda $f = 110$ Hz. Nota: LA

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

- Cuarta cuerda $f = 146,832382$ Hz. Nota: RE
- Tercera cuerda $f = 195,997711$ Hz, Nota: SOL
- Segunda cuerda $f = 246,94165$ Hz. Nota: SI
- Primera cuerda $f = 329,627563$ Hz. Nota: MI

El sonido que cada cuerda de la guitarra produce, si bien es bastante puro, contiene armónicos, es decir, son sonidos que se generan mediante sumas de sinusoides. Por ejemplo, la nota de la sexta cuerda, un MI, tiene un tercer armónico que coincide con la nota MI de la primera cuerda.

(a) (6 pts.) Asuma una frecuencia de muestreo de 44.100 Hz. Determine seis funciones de transferencia $H_k(z), k = 1 \dots 6$ que permitan identificar cual cuerda de la guitarra ha sido pulsada. Cada $H_k(z)$ debe contener exactamente dos polos y dos ceros.

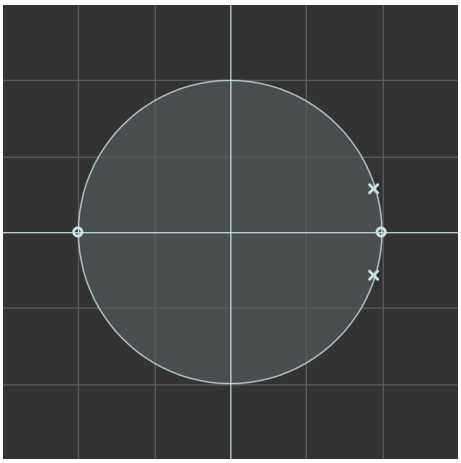
Para cada cuerda, se debe entregar un diagrama de bloques que muestre la implementación del filtro respectivo y especificar la ecuación de diferencias. Cualquier suposición o cálculo hecho para determinar las funciones de transferencia deben ser especificada en su respuesta.

(b) (2 pts.) Es muy posible que el detector de cuerdas calculado hasta ahora pueda confundirse si es que la entrada contiene armónicos, como el caso de la nota MI de la sexta cuerda. Proponga una modificación a cada $H_k(z)$ de manera de solucionar el problema de los armónicos en la guitarra. Especifique cómo serían las $H_k(z)$ modificadas.

(c) (4 pts.) **BONUS:** Implemente su detector de cuerdas en Python, Mathematica o equivalente. Para esto, utilice las grabaciones de las cuerdas de la guitarra disponibles en Classroom. Grafique sus resultados mostrando la efectividad de su implementación.

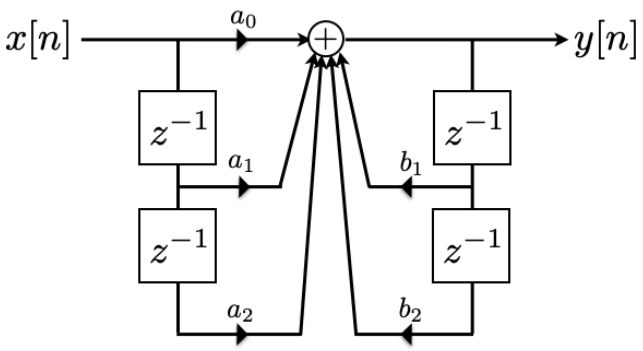
Solución

(a) Para construir los detectores de cada cuerda, la mejor solución, disponiendo de dos polos y dos ceros, es poner los dos ceros en 1 y -1, con el fin de atenuar las frecuencias cero y de Nyquist, y los polos conjugados los más cerca al círculo unitario considerando el ángulo de la frecuencia que se quiera enfatizar, tal como lo muestra el siguiente diagrama de polos y ceros.



Entonces, solo es necesario determinar las posiciones de los polos, dependiendo de cada cuerda, y calcular los coeficientes de un sistema de segundo orden, de acuerdo al siguiente diagrama de bloques:

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



La ecuación genérica que usaremos para este tipo de sistema es:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + b_1y[n-1] + b_2y[n-2]$$

Usando esta forma genérica, los sistemas para cada cuerda son:

Para la sexta cuerda:

$$y[n] = 0.000235x[n] - 0.000235x[n-2] - 1.999393y[n-1] + 0.99953y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para la quinta cuerda:

$$y[n] = 0.000313x[n] - 0.000313x[n-2] - 1.999128y[n-1] + 0.999373y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para la cuarta cuerda:

$$y[n] = 0.000418x[n] - 0.000418x[n-2] - 1.998726y[n-1] + 0.999164y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para la tercera cuerda:

$$y[n] = 0.000558x[n] - 0.000558x[n-2] - 1.998104y[n-1] + 0.998884y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para la segunda cuerda:

$$y[n] = 0.000703x[n] - 0.000703x[n-2] - 1.997357y[n-1] + 0.998594y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para la primera cuerda:

$$y[n] = 0.000938x[n] - 0.000938x[n-2] - 1.995921y[n-1] + 0.998124y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Una forma simple de solucionar este problema es aumentando el orden de los filtros, es decir, introducir más polos y ceros. Con esto se logran pendientes más abruptas cerca de las frecuencias de interés $\rightarrow$ **2 pts.**

4. (8 pts.) **Sistema de segundo orden**. Considere el sistema LTI de segundo orden dado por la ecuación de diferencias con coeficientes constantes a, k y con entrada $f[n]$ y salida $g[n]$:

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$g[n] = kf[n] - kf[n-2] - ag[n-2], \quad 0 < a < 1$$

(a) (4 pts.) Determine la magnitud y fase de la respuesta de frecuencia del sistema en términos de a y k. Escoja el valor de k tal que el valor máximo de la magnitud sea igual a 1. Grafique o bosqueje la respuesta de magnitud y fase para el caso $a = 0.95$.

(b) (2 pts.) Determine la salida $g[n]$ cuando la entrada es $f[n] = \cos(\pi n/2)$ y $a = 0.95$.

(c) (2 pts.) Determine la salida $g[n]$ cuando la entrada es $f[n] = \sin(\pi n/2)$ y $a = 0.95$.

NOTA: Esta pregunta puede ser resuelta en forma analítica o numérica en el computador usando Python, Mathematica o equivalente. En caso que se resuelva de ambas formas, se sumarán 2 puntos de bonificación a la pregunta.

Solución

(a) Tomando Transformada Z:

$$G(z) = kF(z) - kz^{-2}F(z) - az^{-2}G(z)$$

es decir,

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{k - kz^{-2}}{1 + az^{-2}}$$

por lo que la respuesta de frecuencia es

$$H(e^{i\omega}) = \frac{k - ke^{-i2\omega}}{1 + ae^{-i2\omega}} = k\left(\frac{1 - e^{-i2\omega}}{1 + ae^{-i2\omega}}\right) = k\left(\frac{1 - \cos(2\omega) + i\sin(2\omega)}{1 + a\cos(2\omega) - ia\sin(2\omega)}\right)$$

La magnitud es

$$|H(e^{i\omega})| = |k|\frac{\sqrt{1 - 2\cos(2\omega) + \cos^2(2\omega) + \sin^2(2\omega)}}{\sqrt{1 + 2a\cos(2\omega) + a^2\cos^2(2\omega) + a^2\sin^2(2\omega)}}$$

es decir

$$|H(e^{i\omega})| = |k|\frac{\sqrt{2 - 2\cos(2\omega)}}{\sqrt{1 + 2a\cos(2\omega) + a^2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Esta magnitud alcanza su valor máximo para $\omega = \pi/2$. En ese caso, la condición para k es:

$$|k| = \frac{\sqrt{1 - 2a + a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{1 - a}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

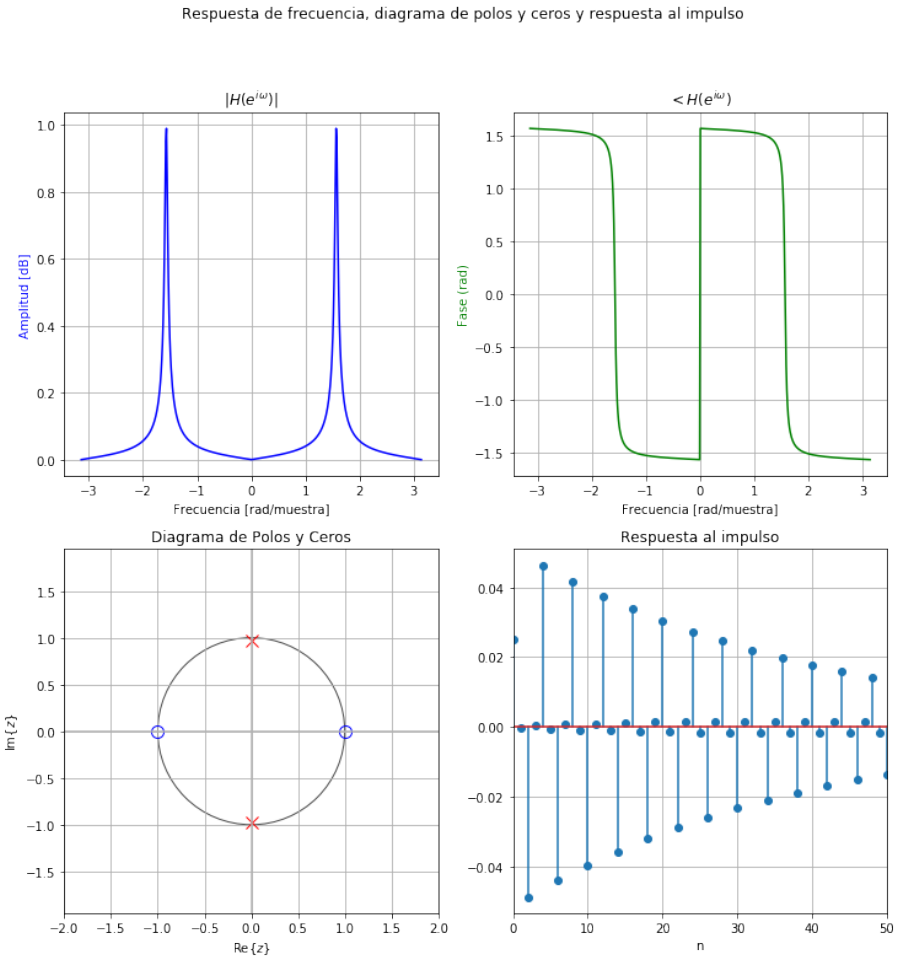
Entonces, si $a = 0.95$, $k = 0.025$

La fase está dada por:

$$\angle H(e^{i\omega}) = \arctan\left(\frac{\sin(2\omega)(a+1)}{2 - 2\cos(2\omega)}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

La respuesta de frecuencia, en magnitud y fase $\rightarrow$ **1 pt.** , además del diagrama de polos y ceros y la respuesta al impulso están graficadas en la siguiente figura:



(b) La salida en este caso estará dada por

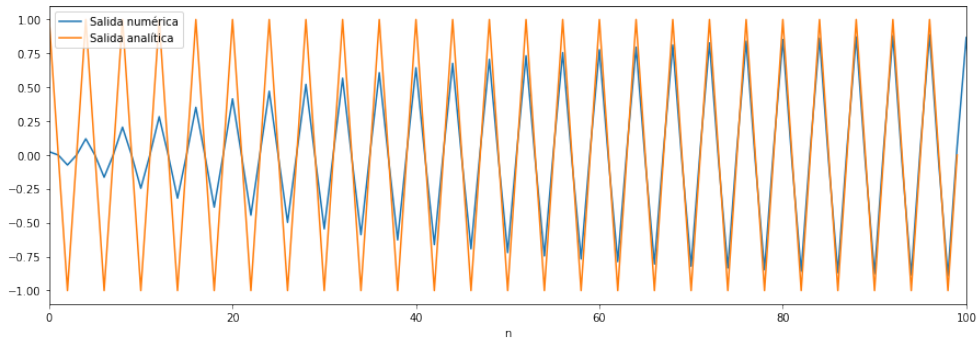
$$g[n] = \frac{1}{2}H(e^{i\pi/2})e^{i\pi n/2} + \frac{1}{2}H(e^{-i\pi/2})e^{-i\pi n/2} = \frac{2k}{2(1-a)}e^{i\pi n/2} + \frac{2k}{2(1-a)}e^{-i\pi n/2}$$

Es decir

$$g[n] = \frac{2k}{1-a}\cos(n\pi/2) = \cos(n\pi/2) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

En la figura se muestra la comparación entre la salida analítica recién calculada y la salida calculada numéricamente mediante la convolución con la respuesta al impulso del sistema. Se observa que la solución numérica demora en converger a la analítica dependiendo del largo de la respuesta al impulso que se utilice.

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...



(c) La salida en este caso estará dada por

$$g[n] = \frac{1}{2i}H(e^{i\pi/2})e^{i\pi n/2} - \frac{1}{2i}H(e^{-i\pi/2})e^{-i\pi n/2} = \frac{2k}{2i(1-a)}e^{i\pi n/2} + \frac{2k}{2i(1-a)}e^{-i\pi n/2}$$

Es decir

$$g[n] = \frac{2k}{1-a}\sin(n\pi/2) = \sin(n\pi/2) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

En la figura se muestra la comparación entre la salida analítica recién calculada y la salida calculada numéricamente mediante la convolución con la respuesta al impulso del sistema. Se observa que la solución numérica demora en converger a la analítica dependiendo del largo de la respuesta al impulso que se utilice.

