Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2007-2

INTERROGACION Nº 1

1. La figura 1 muestra la interconexión de dos sistemas S_1 y S_2. S_1 describe la transmisión por la atmósfera de una señal $x(t) = u(t) - u(t-1)$ que se refleja en varios objetos. La señal recibida es $y(t) = x(t) + 0{,}5x(t-4) + 0{,}25x(t-8)$. S_2 describe el procesamiento de la señal $y(t)$, obteniéndose la señal $z(t)$, según muestra la figura 2. Se pide graficar la variación en el tiempo de las señales $x(t),\ y(t),\ z(t)$.

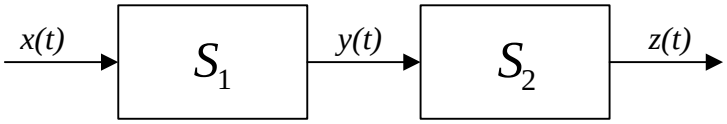


Figura 1

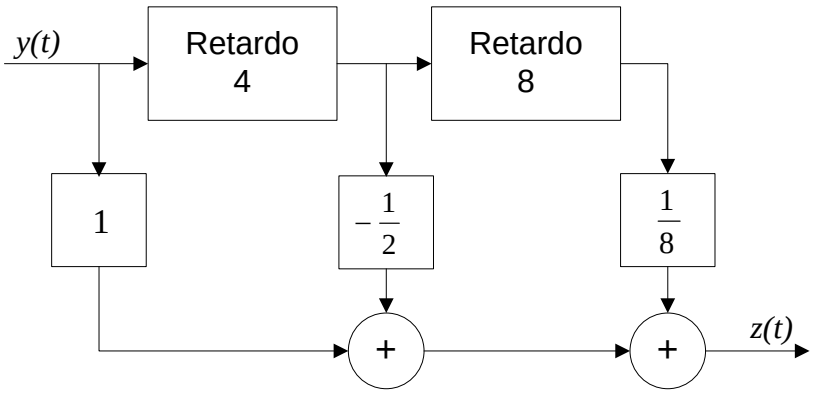


Figura 2

2. Para el diagrama de simulación de la figura 3 se pide:

2.1 Obtener la ecuación diferencial.
2.2 Determinar la correspondiente función respuesta al impulso.
2.3 Utilizar la convolución para obtener la respuesta $y(t)$ para una entrada $x(t) = u(t-2)$ y condiciones iniciales nulas.
2.4 Graficar aproximadamente la salida $y(t)$.

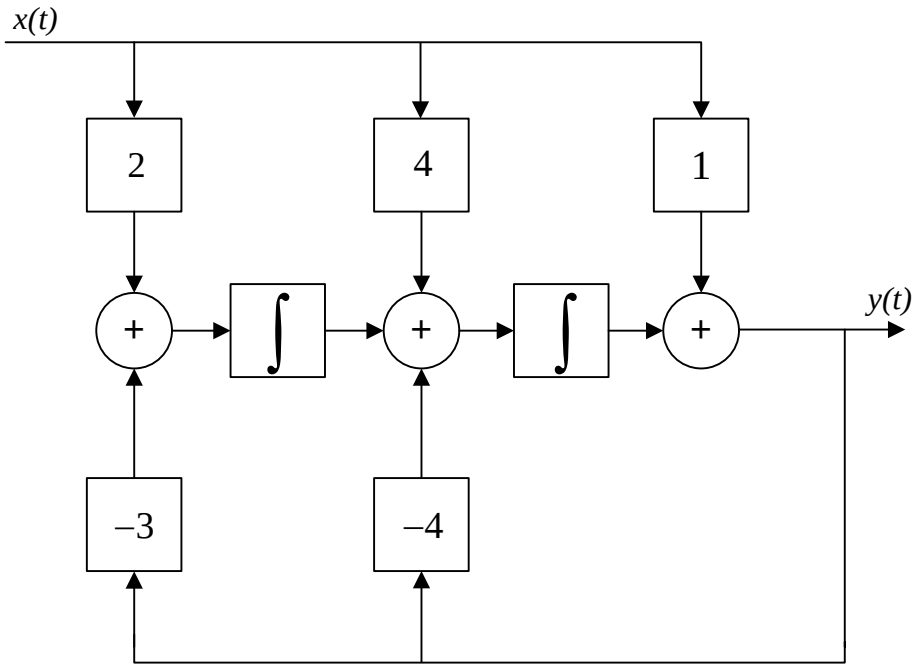


Figura 3

3. Considere la señal $x(t)$ que se muestra en figura 4.

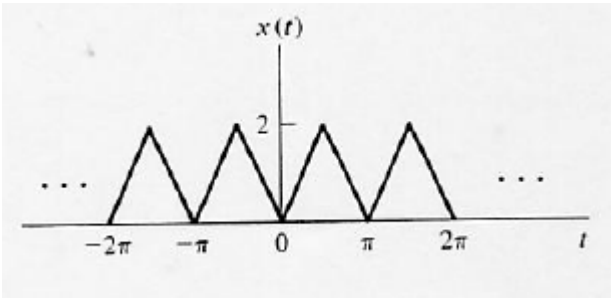


Figura 4

3.1 Determine el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$.

3.2 Obtenga una aproximación hasta el tercer armónico de $x(t)$.

3.3 Aplique el Teorema de Parseval para calcular la potencia media de $x(t)$.

Observaciones

Tiempo: 2 horas.

Las aclaraciones de enunciado deben solicitarse en voz alta y sólo en los primeros 15 minutos. Pasado este tiempo no se aceptan más preguntas. Si considera que en alguna pregunta falta información, realice una suposición razonable que no se contradiga con el enunciado y déjelo claramente expresado en su respuesta. Responda las preguntas en hojas separadas. No olvide colocar su nombre en cada hoja de respuesta. Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2007-2

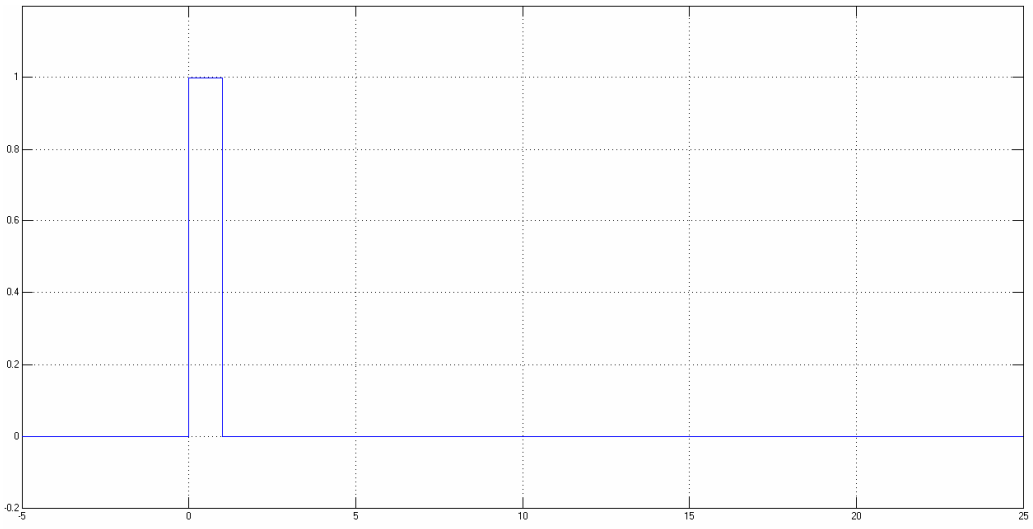
PAUTA INTERROGACION 1

Problema 1

Se define $x(t)$ como:

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

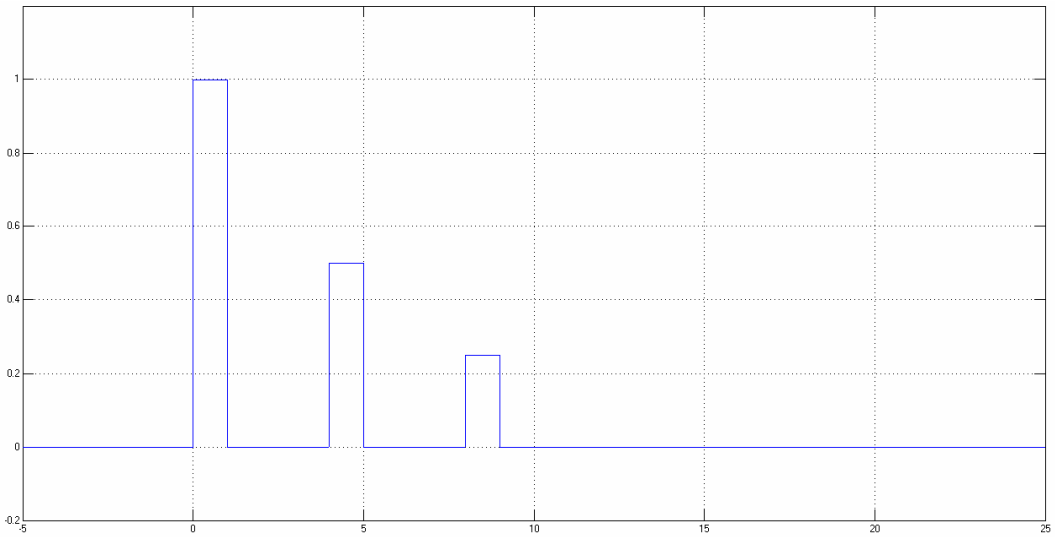
Luego su gráfico en el tiempo es:



Similarmente se define $y(t)$ como:

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x(t-4) + \frac{1}{4}x(t-8)$$

Luego su gráfico en el tiempo es:



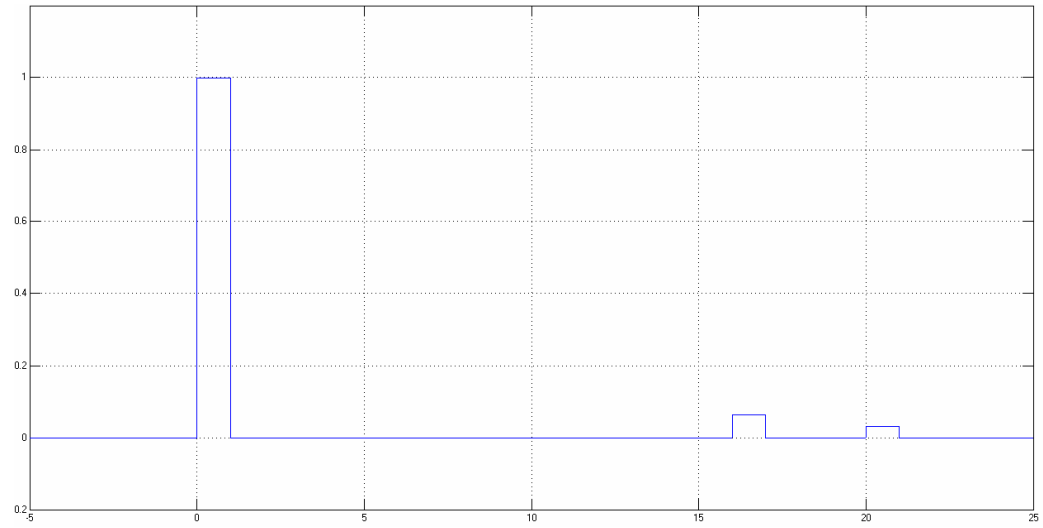
Finalmente del diagrama de simulación se obtiene:

$$z(t) = y(t) - \frac{1}{2}y(t-4) + \frac{1}{8}y(t-12)$$

Que en función de $x(t)$ queda:

$$z(t) = x(t) + \frac{1}{16}x(t-16) + \frac{1}{32}x(t-20)$$

Y su gráfico en función del tiempo es:



Asignación de Puntaje:

Gráfico de $x(t)$: 1.5 puntos
Gráfico de $y(t)$: 1.5 puntos
Expresión para $z(t)$: 1.0 puntos
Gráfico de $z(t)$: 2.0 puntos

Problema 2

Para el diagrama de simulación de la figura 3 se pide:

2.1 Obtener la ecuación diferencial. (**1.5 ptos.**)

Observando el diagrama de simulación obtenemos que la respuesta al sistema, en función de la entrada $x(t)$ se puede escribir como:

$$y(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{t} \left(4x(t) - 4y(t) + \int_{-\infty}^{t} (2x(t) - 3y(t)) dt \right) dt$$

Al derivar dos veces esta relación, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} - 4\frac{dy(t)}{dt} + 2x(t) - 3y(t)$$

Reordenando:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

También es posible plantear la ecuación diferencial considerando las entradas a los integradores..

2.2 Determinar la correspondiente función respuesta al impulso. (**1.5 ptos.**)

Para obtener la respuesta al impulso del sistema utilizaremos la transformada de Laplace unilateral, asumiendo condiciones iniciales nulas. Dada la relación entre las transformadas $\frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow sY(s) - y(0)$, la ecuación diferencial se transforma en:

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = s^2 X(s) + 4sX(s) + 2X(s)$$

La transformada de $x(t) = \delta(t)$ es $X(s) = 1$, por lo tanto al despejar la relación anterior obtenemos:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s^2 + 4s + 3} = 1 - \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

$$= 1 - \frac{1}{(s+3)(s+1)}$$

Realizando la expansión en fracciones parciales de $\frac{1}{(s+3)(s+1)}$, obtenemos

$$\frac{1}{(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} = \frac{(A+B)s + A + 3B}{(s+3)(s+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A+3B=1 \end{array}\right\} A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(s+3)(s+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

También es posible encontrar los coeficientes utilizando residuos:

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = F(s)(s+3)_{s=-3}\Big| = -\frac{1}{2}$$

$$B = F(s)(s+1)_{s=-1}\Big| = \frac{1}{2}$$

Al reemplazar esta expresión en la respuesta al impulso obtenemos finalmente:

$$H(s) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

Utilizando el par de transformada $\frac{1}{s+a} \Leftrightarrow e^{-at}u(t)$, obtenemos que la respuesta al impulso del sistema es:

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

2.3 Utilizar la convolución para obtener la respuesta $y(t)$ para una entrada $x(t) = u(t-2)$ y condiciones iniciales nulas. (**1.5 ptos.**)

- Método 1: Calculando la convolución directamente.

$$y(t) = x(t) * h(t) = u(t-2) * \left(\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t)\right)$$

$$= u(t-2) + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)\left(\frac{1}{2}e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau) - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\right)d\tau$$

$$= u(t-2) + \frac{1}{2}\int_{2}^{t}\left(e^{-3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)}\right)u(\tau-2)u(t-\tau)d\tau$$

$$= u(t-2) + \frac{1}{2}e^{-3t}\int_{2}^{t} e^{3\tau}u(\tau-2)u(t-\tau)d\tau - \frac{1}{2}e^{-t}\int_{2}^{t} e^{\tau}u(\tau-2)u(t-\tau)d\tau$$

$$= u(t-2) + \frac{1}{2}e^{-3t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}u(\tau-2)u(t-\tau)\right]_2^t - \frac{1}{2}e^{-t}\left[e^{\tau}u(\tau-2)u(t-\tau)\right]_2^t$$

$$= u(t-2) + \frac{1}{6}e^{-3t}\left(0 - e^{6}u(t-2)\right) - \frac{1}{2}e^{-t}\left(0 - e^{2}u(t-2)\right)$$

$$= u(t-2) - \frac{1}{6}e^{6}e^{-3t}u(t-2) + \frac{1}{2}e^{2}e^{-t}u(t-2)$$

$$= u(t-2) - \frac{1}{6}e^{-3(t-2)}u(t-2) + \frac{1}{2}e^{-(t-2)}u(t-2)$$

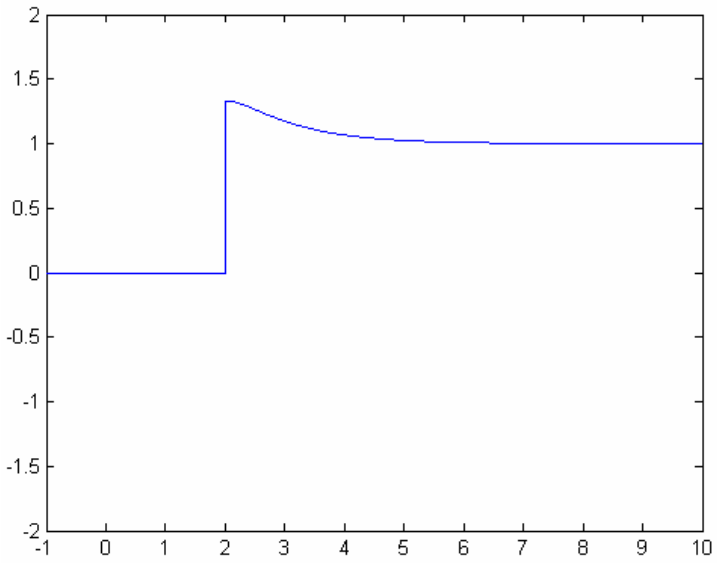
- Método 2: Calculando la respuesta al escalón y desplazando el resultado en 2.

$$y_u(t) = u(t) * h(t) = u(t) * \left(\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t)\right)$$

$$= u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

$$y(t) = y_u(t-2) = u(t-2) - \frac{1}{6}e^{-3(t-2)}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(t-2)}u(t-2)$$

2.4 Graficar aproximadamente la salida $y(t)$. (**1.5 ptos.**)



La asignación de puntaje en esta pregunta será de acuerdo a:

- 0.5 ptos. t < 2: $y(t) = 0$
- 0.5 ptos. t = 2^+: $y(2+) = 4/3$
- 0.5 ptos t = ∞: $y(\infty) = 1$

Problema 3

Considere la señal $x(t)$ que se muestra en la figura 4.

3.1 Determine el desarrollo de Fourier de $x(t)$ (**3 ptos.**)

Observando el gráfico, observamos que la señal es periódica y con periodo T = π. El desarrollo de Fourier entrega coeficientes:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-\frac{j2\pi nt}{T}}dt$$

Para evaluar esta integral, es conveniente utilizar el intervalo entre $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. De esta manera los coeficientes de Fourier son:

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)e^{-j2nt}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} -\frac{4t}{\pi}e^{-j2nt}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{4t}{\pi}e^{-j2nt}dt$$

Por otro lado, la integral indefinida de $f(t) = te^{-j2nt}$, integrando por partes es:

$$F(t) = \int te^{-j2nt}dt = \left(\frac{jt}{2n} + \frac{1}{(2n)^2}\right)e^{-j2nt} + C$$

Por lo tanto, los coeficientes son:

$$C_n = -\frac{4}{\pi^2}\left(F(0) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{4}{\pi^2}\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F(0)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\left(-\frac{j\frac{\pi}{2}}{2n} + \frac{1}{(2n)^2}\right)e^{jn\pi} + \left(\frac{j\frac{\pi}{2}}{2n} + \frac{1}{(2n)^2}\right)e^{-jn\pi} - 2\left(\frac{1}{(2n)^2}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{2}e^{jn\pi} + \frac{1}{2}e^{-jn\pi}\right) - \frac{j\pi}{2n}\left(\frac{1}{2}e^{jn\pi} - \frac{1}{2}e^{-jn\pi}\right) - 2\left(\frac{1}{(2n)^2}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2n^2}\cos(n\pi) - \frac{j\pi}{2n}\, j\sin(n\pi) - \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n}\sin(n\pi) - \frac{2}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{2}{\pi n}\sin(n\pi)$$

Finalmente

$$C_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi^2} & n \quad impar \\ 0 & n \quad par \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Notar que $C_n = C_{-n}$.

Finalmente, la expansión en series de Fourier de la señal $x(t)$ es:

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{j2nt} + C_{-n}e^{-j2nt}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(e^{j2nt} + e^{-j2nt}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, 2\cos(2nt)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2nt)$$

También es posible encontrar la forma trigonométrica de la expansión de Fourier, tal que:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Dado que la señal es par, $b_n = 0 \;\; \forall n$. Comparando con la expansión anterior, observamos que:

$$a_0 = 1, a_n = -\frac{8}{\pi^2 n^2}$$

Con lo cual la expansión en serie de Fourier es:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$
$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos(2nt)$$

Ambas expansiones, evidentemente, son iguales.

3.2 Obtenga una aproximación hasta el tercer armónico de $x(t)$ (**1.5 ptos.**)

$$C_0 = 1$$
$$C_1 = C_{-1} = \frac{2}{1^2\pi^2}(-1-1) = -\frac{4}{\pi^2}$$
$$C_2 = C_{-2} = \frac{2}{2^2\pi^2}(1-1) = 0$$
$$C_3 = C_{-3} = \frac{2}{3^2\pi^2}(-1-1) = -\frac{4}{9\pi^2}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{j2nt}$$
$$= C_0 e^{j0t} + C_1\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) + C_3\left(e^{j6t} + e^{-j6t}\right)$$
$$= 1 + 2C_1\cos(2t) + 2C_3\cos(6t)$$
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos(2t) - \frac{8}{9\pi^2}\cos(6t)$$

3.3 Aplique el teorema de Parseval para calcular la potencia media de $x(t)$ (**1.5 ptos.**)

El teorema de Parseval afirma que:

$$P_{med} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Dado que $C_n = C_{-n}$ y $C_0 = 1$,

$$P_{med} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|^2$$

Dado que tratamos solo con los coeficientes impares, realizamos el cambio de variable $n = 2m+1$

$$P_{med} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2\left|C_{2m-1}\right|^2$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2\left|-\frac{4}{(2m-1)^2\pi^2}\right|^2$$
$$= 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$$

Es posible comprobar que:

$$P_{med} = 1 + \frac{8}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}$$
$$= 2$$

Para obtener el puntaje máximo basta con expresar $P_{med} = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, no es necesario resolver la sumatoria.

Por otro lado, si calculamos la potencia integrando en el tiempo $P_{med} = \frac{1}{T}\int_T \left|x(t)\right|^2 dt$, obtenemos que la potencia es

$$P_{med} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)^2\, dt$$
$$= \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi}\left(\frac{4t}{\pi}\right)^2 dt$$
$$= \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi} t^2 dt$$
$$= \frac{8}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2$$

Como era de esperar, ambas expresiones para la potencia son iguales.